Hilfssatz 4:

Es ist

$$L_d(1) < 3 \log |d|.$$

Unter Benutzung der drei letzten Hilfssätze lässt sich nun der Beweis von (2) folgendermassen führen. Wäre (2) falsch, so gäbe es ein positives $\varepsilon < 1$ und beliebig grosse $|d|$, so dass entweder $L_d(1) > |d|^{\varepsilon}$ oder $L_d(1) < |d|^{-\varepsilon}$ ist. Es sei

$$3 \log |d| < |d|^{\varepsilon}. \tag{8}$$

Dann muss nach Hilfssatz 4 der Fall

$$L_d(1) < |d|^{-\varepsilon} \tag{9}$$

vorliegen. Ist auch noch

$$|d|^{\frac{\varepsilon}{2}} > \frac{4 e^{4\pi}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \tag{10}$$

so liefert (9) die Ungleichung

$$L_d(1) < (1-\varepsilon)\, \varepsilon\, 2^{-2} e^{-4\pi} |d|^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Nach den Hilfssätzen 2 und 3 ist dann also $\zeta(1-\varepsilon, \mathfrak{K}_1) > 0$. Weiterhin sei ein festes d gewählt, das den Ungleichungen (8) und (10) genügt.

Die Function $\zeta(s, \mathfrak{K}_1)$ wird negativ unendlich, wenn s wachsend gegen 1 strebt. Sie hat also eine Nullstelle σ im Intervall $1-\varepsilon < \sigma < 1$. Nach Hilfssatz 3 ist auch $\zeta(\sigma, \mathfrak{K}_2) = 0$. Wendet man Hilfssatz 2 mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2$ an und benutzt Hilfssatz 3, so erhält man die Ungleichung

$$L_d(1)\, L_D(1)\, L_t(1) > \sigma(1-\sigma)\, 2^{-4} e^{-8\pi} |d\,D\,t|^{\frac{\sigma-1}{2}}.$$

Nach (7) und Hilfssatz 4 ist daher

$$L_D(1) > \frac{\sigma(1-\sigma)}{3^2 \cdot 2^4 \cdot e^{8\pi} \log |d| \log |d\,D|} |d\,D|^{\sigma-1}$$

und folglich wegen $\sigma - 1 > -\varepsilon$ für alle hinreichend grossen $|D|$ die Abschätzung

$$L_D(1) > |D|^{-\varepsilon}$$

gültig. Also kann (9) nur für endlich viele d gelten, in Widerspruch zur Annahme, dass (2) falsch sei.

(Eingegangen am 4. Dezember 1934.)

Über eine Riemannsche Identität.

Von

S. Chowla (Waltair) und A. Walfisz (Radość).

Einleitung.

Im sechsten Abschnitt seiner berühmten Habilitationsschrift [1]) führt Riemann die Funktion (x) folgendermassen ein: „Man bezeichne der Kürze wegen durch (x) den Ueberschuss von x über die nächste ganze Zahl, oder, wenn x zwischen zweien in der Mitte liegt und diese Bestimmung zweideutig wird, den Mittelwerth aus den beiden Werthen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, also die Null".

Im dreizehnten Abschnitt heisst es dann: „Ebenso wohl aber, wie hienach für eine Function trotz der durchgängingen Möglichkeit der Integration die Fourier'sche Reihe nicht convergiren und selbst ihr Glied zuletzt unendlich gross werden kann, — ebenso wohl können trotz der durchgängingen Unmöglichkeit der Integration von $f(x)$ zwischen je zwei noch so nahen Werthen unendlich viele Werthe von x liegen, für welche die Reihe Ω convergirt.

Ein Beispiel liefert, (nx) in der Bedeutung, wie oben (Art. 6) genommen, die durch die Reihe

$$\sum_{1,\infty} \frac{(n\,x)}{n}$$

gegebene Function, welche für jeden rationalen Werth von x vorhanden ist und sich durch die trigonometrische Reihe

[1]) „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (1854) [Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13** (1867), S. 87 — 132].

$$\sum_{1,\infty}^{n} \frac{\Sigma^{\theta} - (-)\, 1^{\theta}}{n\,\pi} \sin 2\, n\, x\, \pi\,,$$

wo für θ alle Theiler von n zu setzen sind, darstellen lässt, welche aber in keinem noch so kleinen Grössenintervall zwischen endlichen Grenzen enthalten ist und folglich nirgends eine Integration zulässt".

Für reelle u sei

$$(1) \qquad R(u) = u - [u], \quad \psi(u) = \begin{cases} R(u) - \frac{1}{2}, & \text{sobald } u \text{ nicht ganz} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen ferner

$$(2) \qquad t(n) = \sum_{d\mid n} (-1)^d \cdot$$

θ sei reell. Dann lassen sich die obigen Behauptungen wie folgt ausdrücken: 1) *für rationale* θ *gilt*

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \psi\left(n\,\theta + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, t(n) \sin 2\, n\, \pi\, \theta;$$

2) *die durch die linke Seite von* (3) (für gewisse θ-Werte) *dargestellte Funktion liegt auf keiner noch so kleinen Strecke zwischen endlichen Grenzen.*

Die Beweise hierfür findet man weder in der Riemannschen Abhandlung, noch unseres Wissens sonst wo. Wir hielten es daher nicht für überflüssig auf diese Fragestellung einzugehen, und zwar in einem etwas breiteren Rahmen, unter Hinzuziehung gewisser irrationaler θ. Wir finden:

I. (3) *gilt:* 1) *für alle rationalen* θ; 2) *für fast alle* θ (d. h. für alle, eine geeignete Lebesguesche Nullmenge ausgenommen); 3) *für alle algebraischen Irrationalitäten.*

II. $\varphi(x)$ *bedeute eine beliebige Funktion von* x, *die für* $x > 0$ (definiert und) *positiv ist und für* $x \to \infty$ *monoton gegen Null abnimmt. Dann gibt es zwei auf der* θ*-Achse dicht liegende Mengen* $M_1 = M_1(\varphi)$, $M_2 = M_2(\varphi)$ *rationaler* $\theta = \frac{p}{q}$, *so dass*

$$(4) \qquad \text{in } M_1: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \psi\left(n\,\theta + \frac{1}{2}\right) \leqq -\varphi(q) \log q,$$

$$(5) \qquad \text{in } M_2: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \psi\left(n\,\theta + \frac{1}{2}\right) \geqq \varphi(q) \log q.$$

III. *Ist* $\varphi(x)$ *wie bei* II *erklärt, so gibt es eine auf der* θ*-Achse dicht liegende Menge* $M_3 = M_3(\varphi)$ *irrationaler* θ, *so dass in* M_3

$$(6) \qquad \liminf_{x=\infty} \frac{1}{\varphi(x) \log x} \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n}\, \psi\left(n\,\theta + \frac{1}{2}\right) \leqq -1,$$

$$(7) \qquad \limsup_{x=\infty} \frac{1}{\varphi(x) \log x} \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n}\, \psi\left(n\,\theta + \frac{1}{2}\right) \geqq 1,$$

$$(8) \qquad \liminf_{x=\infty} \frac{1}{\varphi(x) \log x} \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n}\, t(n) \sin 2\, n\, \pi\, \theta \leqq -1,$$

$$(9) \qquad \limsup_{x=\infty} \frac{1}{\varphi(x) \log x} \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n}\, t(n) \sin 2\, n\, \pi\, \theta \geqq 1$$

(falls untere Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins).

Wir haben uns mit ähnlichen Fragestellungen (wenn auch nicht im heutigen Umfang) bei der Chowlaschen Identität

$$(10) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \psi(n\,\theta) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, d(n) \sin 2\, n\, \pi\, \theta$$

befasst, worin

$$(11) \qquad d(n) = \sum_{d\mid n} 1$$

ist; doch wollen wir lieber manches wiederholen, als unsere Arbeiten [2]) voraussetzen, zumal wir an einigen Stellen mit wesentlich einfacheren Hilfsmitteln auskommen.

Die folgenden Vereinbarungen mögen für die ganze vorliegende Abhandlung gelten.

Wir bezeichnen unterschiedslos: mit A positive absolute Konstanten; mit c positive Konstanten, die nur von θ abhängen dürfen; mit B und C komplexe Zahlen, für die $|B| \leqq A$, $|C| \leqq c$ ist.

---

[2]) S. D. Chowla „Some problems of diophantine approximation (I)" [Mathematische Zeitschrift 33 (1931), S. 544—563]; A Walfisz „Über einige trigonometrische Summen" [ebenda, S. 564—601].

Bei allen x-Abschätzungen wird stillschweigend angenommen, dass $x > c$ ist.

Da $\psi\left(n\theta + \frac{1}{2}\right)$ und $\sin 2n\pi\theta$ in θ die Periode Eins haben, so darf durchweg

$$0 < \theta < 1$$

vorausgesetzt werden. Es sei dann

$$\theta = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots \tag{12}$$

die Entwicklung von θ in einen (gegebenenfalls endlichen) regelmässigen Kettenbruch;

$$\frac{h_1}{k_1}, \ \frac{h_2}{k_2}, \dots \tag{13}$$

mögen die Näherungsbrüche bei der Darstellung (12) sein [3]. Ist θ rational, so habe es die Form

$$\theta = \frac{p}{q}; \quad p \geqq 1, \quad q \geqq 2; \quad (p, q) = 1. \tag{14}$$

Für reelle u setzen wir schliesslich

$$\{u\} = \mathrm{Min}\,(R(u),\ 1 - R(u)) \tag{15}$$

(die positiv genommene Entfernung von u zur nächst gelegenen ganzen Zahl).

Die fetten Zahlen weisen auf Formeln hin, die an den betreffenden Stellen benutzt werden.

§ 1.

Wir werden die Behauptungen I zunächst für die Identität (10) beweisen und sodann den (sehr leichten) Übergang zu (3) ausführen.

Um anzudeuten, für welchen der drei Fälle von I die folgenden Formeln gelten, hängen wir der Formelnummer hin und wieder die Zeiger 1, 2, 3 an. Im Falle 2) schliessen wir die rationalen θ als Nullmenge aus; im Falle 3) sei θ eine irrationale algebraische Zahl r-ten Grades (man beachte $r \geqq 2$). Für beliebiges $a \geqq 0$ setzen wir

[3]) Für die im folgenden benutzten Eigenschaften der Kettenbrüche verweisen wir auf das Buch von O. Perron „Die Lehre von den Kettenbrüchen" (Leipzig und Berlin 1913, zweite Auflage 1929).

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a. \tag{16}$$

Hilfssatz 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n\theta)}{n} \ \textit{konvergiert}. \tag{$17_{1,2,3}$}$$

Beweis:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv\!\!\!/\ 0 \ (\mathrm{mod}\ q)}}^{q-1} \psi(n\theta) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv\!\!\!/\ 0 \ (\mathrm{mod}\ q)}}^{q-1} \psi\left(\frac{np}{q}\right) = \sum_{n=1}^{q-1} \psi\left(\frac{n}{q}\right) \tag{18_1}$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q-1} n - \frac{q-1}{2} = 0 \quad \mathbf{(14,\ 1)},$$

$$\sum_{n \leqq x} \psi(n\theta) = B q \quad \mathbf{(18)}; \tag{19_1}$$

$$\sum_{n \leqq x} \psi(n\theta) = C \log^2 x \quad ^{4)}; \tag{20_2}$$

$$\sum_{n \leqq x} \psi(n\theta) = C x^{1 - \frac{1}{r-1}} \log x \ ^{5)}. \tag{21_3}$$

Hilfssatz 2: *Für beliebiges θ ist*

$$\sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2n\pi\theta - \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin 2n\pi\theta = B a \log^3 x. \tag{22}$$

Beweis: Wegen

$$0 \leqq 1 - d^{-a} \leqq a \log d \qquad (d = 1, 2, 3, \dots),$$

16) und (11) ist die linke Seite von (22)

$$= \sum_{n \leqq x} \frac{\sin 2n\pi\theta}{n} \sum_{d|n} (1 - d^{-a}) = B a \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \log d$$

$$= Ba \sum_{n \leqq x} \frac{d(n)\log n}{n} = B a \log^3 x.$$

[4]) A. Khintchine „Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen" [Mathematische Zeitschrift 18 (1923), S. 289—306], Satz 2 mit $\varepsilon = 1$.

[5]) A. Ostrowski „Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1922), S. 77—98], S. 81.

Hilfssatz 3:

$$(23_1) \qquad \sum_{n\leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^a} \sin 2\, n\, \pi\, \theta = B\, q \sqrt{x},$$

$$(24_{2,3}) \qquad \sum_{n\leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^a} \sin 2\, n\, \pi\, \theta = B \sum_{m\leqq\sqrt{x}} \operatorname{Min}\left(\frac{x}{m},\ \frac{1}{\{m\,\theta\}}\right) + B\sqrt{x}.$$

Beweis:

$$\sum_{n\leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^a} \sin 2\, n\, \pi\, \theta = \sum_{n\leqq x} \sin 2\, n\, \pi\, \theta \sum_{d\mid n} d^{-a} = \sum_{m\, n\leqq x} \frac{\sin 2\, m\, n\, \pi\, \theta}{m^a} \quad (16)$$

$$= \sum_{m\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{m^a} \sum_{m\leqq n\leqq \frac{x}{m}} \sin 2\, m\, n\, \pi\, \theta$$

$$+ \sum_{n\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{n<m\leqq\frac{x}{n}} \frac{\sin 2\, m\, n\, \pi\, \theta}{m^a} - \sum_{m\leqq\sqrt{x}} \frac{\sin 2\, m^2\, \pi\, \theta}{m^a}$$

$$(25) \qquad = \sum_{m\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{m^a} \sum_{m\leqq n\leqq\frac{x}{m}} \sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta$$

$$+ \sum_{m\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{m\leqq n\leqq\frac{x}{m}} \frac{\sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta}{n^a} + B\sqrt{x}.$$

$$(26_1) \qquad \sum_{n=1\ (\mathrm{mod}\ q)}^{q} \sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta = 0 \quad (14),$$

$$(27_1) \qquad \sum_{m\leqq n\leqq\frac{x}{m}} \sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta = B\, q, \quad \sum_{m\leqq n\leqq\frac{x}{m}} \frac{\sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta}{n^a} = B\, q \quad (26).$$

Läuft n über eine Reihe aufeinanderfolgender ganzer Zahlen, so ist für irrationales θ

$$\sum_{n} \sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta = \Im \sum e^{2n\pi m\theta i} = \frac{B}{\sin \pi\, m\, \theta} = \frac{B}{\{m\,\theta\}} \quad (1, 15);$$

ist also überdies $0 < n \leqq \frac{x}{m}$, so gilt

$$(28) \qquad \sum_{n} \sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta = B \operatorname{Min}\left(\frac{x}{m},\ \frac{1}{\{m\,\theta\}}\right),$$

$$(29_{2,3}) \qquad \sum_{m\leqq n\leqq\frac{x}{m}} \sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta = B \operatorname{Min}\left(\frac{x}{m},\ \frac{1}{\{m\,\theta\}}\right) \quad (28).$$

$$(30_{2,3}) \qquad \sum_{m\leqq n\leqq\frac{x}{m}} \frac{\sin 2\, n\, \pi\, m\, \theta}{n^a} = B \operatorname{Min}\left(\frac{x}{m},\ \frac{1}{\{m\,\theta\}}\right) \quad (28).$$

(23) folgt aus (25) und (27); (24) aus (25), (29) und (30).

Hilfssatz 4 (A. Khintchine [6]): *Es sei $F(x)$ für $x \geqq 1$ stetig und positiv; $x\, F(x)$ nehme beständig ab; das Integral*

$$\int_1^\infty F(x)\, dx$$

sei konvergent. Die Ungleichung

$$(31_2) \qquad \left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{F(k)}{k}$$

besitzt dann höchstens eine endliche Anzahl von Lösungen in ganzen h, k.

Aus Hilfssatz 4 folgt leicht der (längst bekannte)

Hilfssatz 5:

$$(32_2) \qquad k_{n+1} = C\, k_n \log^2 k_n \qquad (n > 1).$$

Beweis: Wir wenden Hilfssatz 4 mit

$$F(x) = \frac{1}{x \log^2 2\, x} \qquad (x \geqq 1)$$

an. (31) besagt dann, dass für jedes Paar ganzer Zahlen h, k mit $k > 0$

$$(33_2) \qquad \left|\theta - \frac{h}{k}\right| \geqq \frac{c}{k^2 \log^2 2\, k}$$

[6] A. Khintchine „Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen" [Mathematische Annalen 92 (1924), S. 115—125], Satz II.

ist. Andererseits gilt für die Näherungsbrüche (13) eines irrationalen θ bekanntlich

$$\frac{1}{2\,k_n\,k_{n+1}} < \left|\theta - \frac{h_n}{k_n}\right| < \frac{1}{k_n\,k_{n+1}}. \tag{34}$$

Aus (33) mit $h = h_n$, $k = k_n$ und (34) folgt (32).

Hilfssatz 6 (H. Behnke [7])): *Für irrationales θ ist*

$$\sum_{m<k_n} \frac{1}{\{m\,\theta\}} = B\,k_n \log k_n \qquad (n \geqq 2). \tag{35}$$

Hilfssatz 7:

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{\{m\,\theta\}} = C\,x \log^3 x. \tag{36_2}$$

Beweis: Wir bestimmen $n = n(x)$ durch

$$k_{n-1} \leqq x < k_n. \tag{37}$$

Aus (32), (35) und (37) folgt dann

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{\{m\,\theta\}} \leqq \sum_{m<k_n} \frac{1}{\{m\,\theta\}} = B\,k_n \log k_n = C\,k_{n-1} \log^3 k_{n-1} = C\,x \log^3 x.$$

Hilfssatz 8:

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^a} \sin 2\,n\,\pi\,\theta = C\,x^{\frac{1}{2}} \log^3 x. \tag{38_2}$$

Beweis: (24), (36).

Hilfssatz 9 (H. Behnke [8])): *Für irrationales θ ist*

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ k_n \nmid m}} \frac{1}{\{m\,\theta\}} = B\,x \log x \qquad (k_n \leqq x < k_{n+1}). \tag{39}$$

Hilfssatz 10 (Liouville [9])): *Für ganze h, k mit $k > 0$ ist*

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| \geqq \frac{c}{k^r}. \tag{40_3}$$

[7]) H. Behnke „Zur Theorie der diophantischen Approximationen" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 3 (1924), S. 261—318], S. 289.

[8]) a. a. O. [7]).

[9]) Vgl. z. B. Perron, a. a. O. [3]), S. 139 (I Aufl.).

Hilfssatz 11:

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\sigma_a(n)}{n^a} \sin 2\,n\,\pi\,\theta = C\,x^{1-\frac{1}{r}} \log x. \tag{41_3}$$

Beweis:

$$\sum_{\substack{m \leqq x^{1-\frac{1}{r}} \\ k_n \nmid m}} \frac{1}{\{m\,\theta\}} = B\,x^{1-\frac{1}{r}} \log x \qquad \left(k_n \leqq x^{1-\frac{1}{r}} < k_{n+1}\right) \qquad \text{(39)}, \tag{42}$$

$$k_{n+1} \leqq c\,k_n^{\,r-1}, \quad k_n \geqq c\,k_{n+1}^{\frac{1}{r-1}} \geqq c\,x^{\frac{1}{r}} \qquad \text{(34, 40)}, \tag{43_3}$$

$$\sum_{\substack{m \leqq x^{1-\frac{1}{r}} \\ k_n \mid m}} \frac{x}{m} = \sum_{k_n b \leqq x^{1-\frac{1}{r}}} \frac{x}{k_n\,b} \leqq \frac{x}{k_n} \sum_{b \leqq x} \frac{1}{b}$$

$$\leqq c\,\frac{x}{k_n} \log x \leqq c x^{1-\frac{1}{r}} \log x \qquad \text{(43)}. \tag{44_3}$$

(41) folgt aus (24), (42) und (44).

Hilfssatz 12:

$$\sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2\,n\,\pi\,\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin 2\,n\,\pi\,\theta + B\,a \log^3 x + B\,q\,x^{-\frac{1}{2}}, \tag{45_1}$$

$$\sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2\,n\,\pi\,\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin 2\,n\,\pi\,\theta + B\,a \log^3 x + C\,x^{-\frac{1}{2}} \log^3 x, \tag{46_2}$$

$$\sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2\,n\,\pi\,\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin 2\,n\,\pi\,\theta + B\,a \log^3 x + C\,x^{-\frac{1}{r}} \log x. \tag{47_3}$$

Beweis: Dass die in (45), (46), (47) rechts auftretende Reihe konvergiert, folgt aus (23), (38), (41). Durch partielle Summation ergibt sich nämlich

$$\sum_{n>x} \frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}} \sin 2\,n\,\pi\,\theta = B\,q\,x^{-\frac{1}{2}}, \tag{48_1}$$

$$(49_2)\qquad \sum_{n>x}\frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}}\sin 2n\pi\theta = C x^{-\frac{1}{2}}\log^3 x,$$

$$(50_3)\qquad \sum_{n>x}\frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}}\sin 2n\pi\theta = C x^{-\frac{1}{r}}\log x.$$

Zugleich folgen (45), (46), (47) aus (22), (48), (49), (50).

Hilfssatz 13: *Für beliebiges θ ist*

$$(51)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n^{n+a}} = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}}\sin 2n\pi\theta \quad (a>0)\ ^{10)}.$$

Beweis: Wegen

$$\sum_{n\leqq x}\frac{\sigma_a(n)}{n^{1+a}}\sin 2n\pi\theta = \sum_{n\leqq x}\frac{\sin 2n\pi\theta}{n^{1+a}}\sum_{d|n}d^a = \sum_{m\,n\leqq x}\frac{\sin 2mn\pi\theta}{n^{1+a}m} \quad (16)$$

$$= \sum_{n\leqq x}\frac{1}{n^{1+a}}\sum_{m\leqq\frac{x}{n}}\frac{\sin 2m\pi n\theta}{m},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi n\theta}{m} = -\pi\psi(n\theta)\ ^{11)}$$

und der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n^{1+a}}$, braucht nur bei wachsendem x

$$(52)\qquad \sum_{n\leqq x}\frac{1}{n^{1+a}}\sum_{m>\frac{x}{n}}\frac{\sin 2m\pi n\theta}{m}\longrightarrow 0$$

nachgewiesen zu werden.

Für rationale θ ist die innere Summe von (52) nach (26) gleich $C\frac{n}{x}$, also die Behauptung klar. Für irrationale θ wähle man zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein $\xi=\xi(\varepsilon)$ mit

$$\sum_{n>\xi}\frac{1}{n^{1+a}}<\varepsilon$$

[10]) Für $a=1$ vgl. E. Landau „Konvergenzbeweis einer Lerchschen Reihe" [Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême, Classe des Sciences, 1919, 2 S.].

[11]) Vgl. z. B. E. Landau „Vorlesungen über Zahlentheorie" (Leipzig 1927), Bd. II, S. 58—59.

und sodann ein $x_0=x_0(\varepsilon)>\xi$ mit

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq\xi}\frac{1}{\{n\theta\}}<\varepsilon \quad \text{für} \quad x\geqq x_0.$$

Wegen

$$\sum_{m>\frac{x}{n}}\frac{\sin 2m\pi n\theta}{m} = B\,\mathrm{Min}\left(1,\frac{n}{x\{n\theta\}}\right)\ ^{11)}$$

ist dann für $x\geqq x_0$ die linke Seite von (52)

$$= B\sum_{n\leqq\xi}\frac{1}{n}\frac{n}{x\{n\theta\}} + B\sum_{n>\xi}\frac{1}{n^{1+a}} = B\varepsilon.$$

Hilfssatz 14:

$$(10_{1,2,3})\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n} = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n}\sin 2n\pi\theta.$$

Beweis: Aus (17) folgt durch partielle Summation, dass für jedes unserer θ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n^{1+a}}$ gleichmässig in a konvergiert. Also ist

$$(53_{1,2,3})\qquad \lim_{a=0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n^{1+a}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n},$$

$$(54_1)\qquad \sum_{n\leqq x}\frac{d(n)}{n}\sin 2n\pi\theta = -\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n} + B\,q\,x^{-\frac{1}{2}} \quad (53, 45, 51),$$

womit (10_1) nachgewiesen ist. Ebenso folgen (10_2) und (10_3) aus (53), (46), (51) und (53), (47), (51).

Hilfssatz 15: *Für $n=1, 2, 3, \ldots$ ist*

$$(55)\qquad t(2n)=2d(n)-d(2n), \quad t(2n-1)=-d(2n-1).$$

Beweis: Nach (2) und (11) ist

$$d(2n)+t(2n)=\sum_{d|2n}(1+(-1)^d)=2\sum_{2d|2n}1=2\sum_{d|n}1=2d(n),$$

$$d(2n-1)+t(2n-1)=\sum_{d|(2n-1)}(1+(-1)^d)=\sum_{d|(2n-1)}(1-1)=0.$$

Hilfssatz 16: *Für reelle u ist*

(56) $$\psi\left(u+\frac{1}{2}\right)=\psi(2u)-\psi(u).$$

Beweis: Die drei Glieder von (56) haben nach (1) in u die Periode Eins. Man darf also $0\leqq u<1$ annehmen. Für $u=0$, $0<u<\frac{1}{2}$, $u=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<u<1$ lautet die Behauptung: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0-0$, $u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=2u-\frac{1}{2}-\left(u-\frac{1}{2}\right)$, $0=0-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$, $u+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}=2u-1-\frac{1}{2}-\left(u-\frac{1}{2}\right)$ (1).

Hilfssatz 17: *Sind die Reihen rechterhand konvergent, so gilt*

(57) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t(n)}{n}\sin 2n\pi\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n}\sin 4n\pi\theta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n}\sin 2n\pi\theta,$$

(58) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi\left(n\theta+\frac{1}{2}\right)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(2n\theta)}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n}.$$

Beweis:

$$\sum_{n\leqq x}\frac{t(n)}{n}\sin 2n\pi\theta=\sum_{n\leqq\frac{x}{2}}\frac{d(n)}{n}\sin 4n\pi\theta-\sum_{n\leqq x}\frac{d(n)}{n}\sin 2n\pi\theta \qquad (55),$$

$$\sum_{n\leqq x}\frac{\psi\left(n\theta+\frac{1}{2}\right)}{n}=\sum_{n\leqq x}\frac{\psi(2n\theta)}{n}-\sum_{n\leqq x}\frac{\psi(n\theta)}{n} \qquad (56).$$

Hilfssatz 18: *Besteht $\mathfrak{M}$ aus fast allen θ, so gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ gleicher Eigenschaft, die mit jedem θ auch 2θ enthält.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{M}_2$ die Menge aller $\frac{\theta}{2}$, θ in $\mathfrak{M}$. Dann enthält $\mathfrak{M}_2$ fast alle θ und $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}\mathfrak{M}_2$ hat die verlangten Eigenschaften.

Beweis von I: Unsere Zahlklassen 1) und 3) haben offenbar die Eigenschaft, dass sie mit jedem θ auch 2θ enthalten. Für die Klasse 2), bei der (10_2) richtig ist, darf das nach Hilfssatz 18 angenommen werden. Die Behauptungen I folgen daher aus (10), (57) und (58).

§ 2.

In diesem Paragraphen ist θ durchweg rational, von der Gestalt (14).

Hilfssatz 19: *Es seien p, q, p_1, q_1 natürliche Zahlen mit $|pq_1-qp_1|=1$, $q>q_1\geqq 2$. Dann gilt*

(59) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n}=-\frac{1}{2q_1}\log q+B\log q_1 \text{ für } pq_1-qp_1=1,$$

(60) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n}=\frac{1}{2q_1}\log q+B\log q_1 \text{ für } pq_1-qp_1=-1.$$

Beweis: [12]) Wir setzen

(61) $$\left[\frac{q}{q_1}\right]=M.$$

1) Es sei $pq_1-qp_1=1$.

(62) $$\frac{p}{q}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{qq_1}.$$

(63) $$R\left(n\frac{p}{q}\right)=R\left(n\frac{p_1}{q_1}\right)+B\frac{n}{qq_1} \quad (n<q) \quad (1,\ 62),$$

$$\sum_{n<q}\frac{1}{n}\psi\left(n\frac{p}{q}\right)=\sum_{n<q}\frac{1}{n}R\left(n\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n<q}\frac{1}{n} \qquad (1)$$

($n\frac{p}{q}$ ist keine ganze Zahl, weil sonst q in n aufgehen müsste)

$$=\sum_{n<q}\frac{1}{n}R\left(n\frac{p_1}{q_1}\right)+B\sum_{n<q}\frac{1}{n}\frac{n}{qq_1}-\frac{1}{2}\log q+B \qquad (63)$$

(64) $$=\sum_{n<q}\frac{1}{n}R\left(n\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{1}{2}\log q+B.$$

[12]) Wir benutzen hier (wie auch im nächsten Paragraphen, beim Beweise von (6) und (7)) einen Gedankengang Ostrowskis: a. a. O. [5]), S. 78—79.

$$\sum_{n<q}\frac{1}{n}R\left(n\frac{p_1}{q_1}\right)=\sum_{n\leqq Mq_1}\frac{1}{n}R\left(n\frac{p_1}{q_1}\right)+B\sum_{Mq_1<n<(M+1)q_1}\frac{1}{n} \qquad (61)$$

$$=\sum_{n\leqq Mq_1}\frac{1}{n}R\left(n\frac{p_1}{q_1}\right)+B=\sum_{a=0}^{M-1}\sum_{b=1}^{q_1-1}\frac{1}{aq_1+b}R\left((aq_1+b)\frac{p_1}{q_1}\right)+B$$

$$=\sum_{a=0}^{M-1}\sum_{b=1}^{q_1-1}\frac{1}{aq_1+b}R\left(b\frac{p_1}{q_1}\right)+B=\sum_{a=1}^{M-1}\sum_{b=1}^{q_1-1}\frac{1}{aq_1+b}R\left(b\frac{p_1}{q_1}\right)+B\log q_1$$

$$=\sum_{a=1}^{M-1}\sum_{b=1}^{q_1-1}\frac{1}{aq_1}R\left(b\frac{p_1}{q_1}\right)+B\sum_{a=1}^{M-1}\sum_{b=1}^{q_1-1}\left(\frac{1}{aq_1}-\frac{1}{aq_1+b}\right)+B\log q_1$$

$$=\frac{1}{q_1}\sum_{a=1}^{M-1}\frac{1}{a}\sum_{b=1}^{q_1-1}R\left(b\frac{p_1}{q_1}\right)+B\sum_{a=1}^{M-1}\sum_{b=1}^{q_1-1}\frac{q_1}{a^2q_1^2}+B\log q_1$$

$$=\frac{1}{q_1}(\log M+B)\frac{(q_1-1)q_1}{2q_1}+B\log q_1$$

(65) $$=\frac{1}{2}\log M-\frac{1}{2q_1}\log M+B\log q_1.$$

$$\sum_{n<q}\frac{1}{n}\psi\left(n\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{2}\log M-\frac{1}{2q_1}\log M-\frac{1}{2}\log q+B\log q_1 \qquad (64, 65)$$

$$=\frac{1}{2}\log M-\frac{1}{2q_1}\log M-\frac{1}{2}\log Mq_1+B\log q_1 \qquad (61)$$

$$=-\frac{1}{2q_1}\log M+B\log q_1=-\frac{1}{2q_1}\log Mq_1+B\log q_1$$

(66) $$=-\frac{1}{2q_1}\log q+B\log q_1.$$

(67) $$\sum_{n\geqq q}\frac{1}{n}\psi\left(n\frac{p}{q}\right)=B\sum_{s\geqq q}\frac{q}{s^2}+B=B \qquad (19, 14).$$

(59) folgt aus (66) und (67).

2) Es sei $pq_1-qp_1=-1$.

(62′) $$\frac{p}{q}-\frac{p_1}{q_1}=-\frac{1}{qq_1}.$$

(63) trifft im allgemeinen auch zu. Eine Ausnahme tritt dann und nur dann ein, wenn $n\equiv 0 \pmod{q_1}$ ist, in welchem Falle

(63′) $$R\left(n\frac{p}{q}\right)=1+B\frac{n}{qq_1}=1+R\left(n\frac{p_1}{q_1}\right)+B\frac{n}{qq_1}.$$

Das Zusatzglied 1 in (63′), welches in (63) nicht vorkommt, ergibt für $\sum_{n<q}\frac{1}{n}\psi\left(n\frac{p}{q}\right)$ eine Vermehrung um

(68) $$\sum_{\substack{n<q\\ n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q_1)}}\frac{1}{n}=\frac{1}{q_1}\sum_{n<\frac{q}{q_1}}\frac{1}{n}=\frac{1}{q_1}\log q+B \qquad (61).$$

Es ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n\theta)}{n}=-\frac{1}{2q_1}\log q+\frac{1}{q_1}\log q+B\log q_1 \qquad (59, 68)$$

(60) $$=\frac{1}{2q_1}\log q+B\log q_1.$$

Hilfssatz 20: *Ist überdies $q_1\geqq 4$ gerade, so gilt*

(69) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi\left(n\theta+\frac{1}{2}\right)}{n}=-\frac{1}{2q_1}\log q+B\log q_1 \quad \textit{für } pq_1-qp_1=1,$$

(70) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi\left(n\theta+\frac{1}{2}\right)}{n}=\frac{1}{2q_1}\log q+B\log q_1 \quad \textit{für } pq_1-qp_1=-1.$$

Beweis: (58), (59), (60) und

$$pq_1-qp_1=2p\cdot\frac{q_1}{2}-qp_1;\quad 2\theta=\frac{2p}{q},\quad (2p, q)=1.$$

Beweis von II: Es sei E das Intervall $0<\theta<1$ der θ-Achse, I ein beliebiges offenes Teilintervall. Dann haben wir zu zeigen, dass es in I einen Wert θ mit (14), (4) und einen anderen mit (14), (5) gibt.

Zunächst einmal gibt es in I einen gekürzten Bruch $\theta_1=\frac{p_1}{q_1}$,

$q_1 \geqq 4$ gerade. Teilt man nämlich I in 3 Intervalle der Länge l, von denen das mittlere geschlossen, die beiden anderen offen sind, und wählt im mittleren ein $\frac{p}{q}$ mit $q \equiv 3 \pmod 4$ und $\frac{1}{q} < l$, so hat einer der beiden Brüche

$$\frac{p}{q+1}, \quad \frac{p+1}{q+1}$$

wenn man ihn als gekürzten Bruch $\frac{p_1}{q_1}$ schreibt, die verlangte Eigenschaft; nämlich für ungerades p der erste, für gerades der zweite. Ein solches $\frac{p_1}{q_1}$ halten wir fest.

Es übertreffe A die absoluten Werte der beiden in (69) und (70) auftretenden B. Es sei Q so gross, dass

$$\frac{1}{4\,q_1} \geqq \varphi(q), \quad A \log q_1 \leqq \frac{1}{4\,q_1} \log q \quad (q \geqq Q). \tag{71}$$

1) Wir betrachten zunächst die unendlich vielen in I gelegenen θ mit (14) und (62). Unter ihnen gibt es eins mit $q \geqq Q$. Für dieses ist (4) nach (69) und (71) erfüllt.

2) Sodann nehmen wir alle in I gelegenen θ mit (14) und (62). Unter ihnen kommt eins mit $q \geqq Q$ vor und für dieses ist (5) nach (70), (71) erfüllt.

§ 3.

In diesem Paragraphen ist θ eine irrationale Zahl von der Gestalt (12), mit den Näherungsbrüchen (13).

Hilfssatz 21: *Für gerades k_n ist*

$$\sum_{r<k_{n+1}} \frac{\psi\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right)}{r} = -\frac{1}{2\,k_n} \log k_{n+1} + B \log k_n \quad (n \text{ gerade}), \tag{72}$$

$$\sum_{r<k_{n+1}} \frac{\psi\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right)}{r} = \frac{1}{2\,k_n} \log k_{n+1} + B \log k_n \quad (n \text{ ungerade}). \tag{73}$$

Beweis: Wir setzen

$$\left[\frac{k_{n+1}}{k_n}\right] = M. \tag{74}$$

1) Es sei n gerade.

$$0 < \theta - \frac{h_n}{k_n} < \frac{1}{k_n\,k_{n+1}}. \tag{75}$$

$$R\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right) = R\left(r\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) + B\,\frac{r}{k_n\,k_{n+1}} \quad (r < k_{n+1}) \quad \mathbf{(1,\ 75)}, \tag{76}$$

$$\sum_{r<k_{n+1}} \frac{1}{r}\,\psi\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right) = \sum_{r<k_{n+1}} \frac{1}{r}\,R\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{r<k_{n+1}} \frac{1}{r} \quad \mathbf{(1)}$$

$$= \sum_{r<k_{n+1}} \frac{1}{r}\,R\left(r\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) + B \sum_{r<k_{n+1}} \frac{1}{r}\,\frac{r}{k_n\,k_{n+1}} - \frac{1}{2}\log k_{n+1} + B \quad \mathbf{(76)}$$

$$= \sum_{r<k_{n+1}} \frac{1}{r}\,R\left(r\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log k_{n+1} + B. \tag{77}$$

$$\sum_{r<k_{n+1}} \frac{1}{r}\,R\left(r\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{r \leqq Mk_n} \frac{1}{r}\,R\left(r\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) + B \sum_{Mk_n < r < (M+1)k_n} \frac{1}{r} \quad \mathbf{(74)}$$

$$= \sum_{r \leqq Mk_n} \frac{1}{r}\,R\left(r\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) + B$$

$$= \sum_{a=1}^{M-1} \sum_{b=0}^{k_n-1} \frac{1}{a\,k_n+b}\,R\left((a\,k_n+b)\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) + B \log k_n$$

$$= \sum_{a=1}^{M-1} \sum_{b=0}^{k_n-1} \frac{1}{a\,k_n+b}\,R\left(b\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) + B \log k_n$$

$$= \sum_{a=1}^{M-1} \sum_{b=0}^{k_n-1} \frac{1}{a\,k_n}\,R\left(b\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) + B \sum_{a=1}^{M-1} \sum_{b=0}^{k_n-1} \left(\frac{1}{a\,k_n} - \frac{1}{ak_n+b}\right) + B \log k_n$$

$$= \frac{1}{k_n} \sum_{a=1}^{M-1} \frac{1}{a} \sum_{b=0}^{k_n-1} R\left(b\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right) + B \sum_{a=1}^{M-1} \sum_{b=0}^{k_n-1} \frac{k_n}{a^2\,k_n^2} + B \log k_n$$

$$=\frac{1}{k_n}(\log M+B)\,\frac{(k_n-1)\,k_n}{2\,k_n}+B\log k_n$$

$$(78)\qquad =\frac{1}{2}\log M-\frac{1}{2\,k_n}\log M+B\log k_n\,.$$

$$\sum_{r<k_{n+1}}\frac{1}{r}\,\psi\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log M-\frac{1}{2\,k_n}\log M-\frac{1}{2}\log k_{n+1}+B\log k_n\qquad (77,\ 78)$$

$$=\frac{1}{2}\log M-\frac{1}{2\,k_n}\log M-\frac{1}{2}\log M\,k_n+B\log k_n\qquad (74)$$

$$=-\frac{1}{2\,k_n}\log M+B\log k_n=-\frac{1}{2\,k_n}\log M\,k_n+B\log k_n$$

$$(72)\qquad =-\frac{1}{2\,k_n}\log k_{n+1}+B\log k_n\qquad (74).$$

2) Es sei n ungerade.

$$(75')\qquad -\frac{1}{k_n\,k_{n+1}}<\theta-\frac{h_n}{k_n}<0.$$

(76) trifft im allgemeinen auch zu. Eine Ausnahme tritt dann und nur dann ein, wenn $r\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}$ ganz, d. h. r ein ungerades Vielfaches von $\frac{k_n}{2}$ ist, in welchem Falle

$$(76')\qquad R\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right)=1+B\,\frac{r}{k_n\,k_{n+1}}$$

$$=1+R\left(r\,\frac{h_n}{k_n}+\frac{1}{2}\right)+B\,\frac{r}{k_n\,k_{n+1}}\,.$$

Das Zusatzglied 1 in (76′), das in (76) nicht vorkommt, ergibt für $\sum\limits_{r<k_{n+1}}\frac{1}{r}\,\psi\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right)$ eine Vermehrung um

$$\sum_{\substack{\frac{k_n}{2}\,u<k_{n+1}\\ u \text{ ungerade}}}\frac{1}{\frac{k_n}{2}\,u}=\frac{2}{k_n}\sum_{\substack{u<\frac{2k_{n+1}}{k_n}\\ u \text{ ungerade}}}\frac{1}{u}=\frac{2}{k_n}\,\frac{1}{2}\log M+B$$

$$(79)\qquad =\frac{1}{k_n}\log k_{n+1}+B\qquad (74).$$

Es ist also

$$\sum_{r<k_{n+1}}\frac{1}{r}\,\psi\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2\,k_n}\log k_{n+1}+\frac{1}{k_n}\log k_{n+1}+B\log k_n\qquad (72,\ 79)$$

$$(73)\qquad =\frac{1}{2\,k_n}\log k_{n+1}+B\log k_n\,.$$

Einführung von M_3. Beweis von (6) und (7): I und und θ_1 mögen dieselbe Bedeutung wie beim Beweise von II haben. Wir ergänzen

$$(80)\qquad \theta_1=\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_m}=\frac{p_1}{q_1}=\frac{h_m}{k_m}$$

irgendwie so zu einer in I liegenden irrationalen Zahl

$$(81)\qquad \theta=\frac{1|}{|a_1}+\ldots+\frac{1|}{|a_m}+\frac{1|}{|a_{m+1}}+\ldots,$$

dass erstens alle auf a_m folgenden Kettenbruchnenner ungerade sind; zweitens

$$(82)\qquad \frac{1}{4\,k_n}\geqq\varphi(k_{n+1}),\quad A\log k_n\leqq\frac{1}{4\,k_n}\log k_{n+1}\qquad (n>m)$$

ist, wobei A die absoluten Werte der beiden in (72) und (73) auftretenden B übertrifft und drittens die Ungleichungen (100) gelten (die wir aber erst beim Beweise von (8) und (9) benutzen werden). Dann ist

$$\sum_{r<k_{n+1}}\frac{1}{r}\,\psi\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right)$$

$$\leqq-\varphi(k_{n+1})\log k_{n+1}\ \text{für } n \text{ gerade, } k_n \text{ gerade, } n>m\qquad (72,\ 82),$$

$$\sum_{r<k_{n+1}}\frac{1}{r}\,\psi\left(r\,\theta+\frac{1}{2}\right)$$

$$\geqq\varphi(k_{n+1})\log k_{n+1}\ \text{für } n \text{ ungerade, } k_n \text{ gerade, } n>m\qquad (73,\ 82),$$

Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, dass k_n gerade ist sowohl für unendlich viele gerade, wie auch für unendlich viele ungerade n. Das sieht man aber sofort aus folgendem Schema, in welchem g eine gerade, u eine ungerade Zahl bedeutet:

$$(83)\qquad \left|\begin{array}{lllllllllll} n-m & =0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \ldots \\ a_n & = & u & u & u & u & u & u & u & u & u \ldots \\ k_n & =g & u & u & g & u & u & g & u & u & g \ldots \end{array}\right.$$

Hilfssatz 22: *Es sei*

$$(84)\qquad p \text{ und } q \text{ ganz}, \quad q>1, \quad (p,q)=1;$$

$$(85)\qquad y=\sigma+\tau i, \ \sigma \text{ und } \tau \text{ reell}, \ 0<\sigma \leqq \frac{1}{q^2}, \quad |\tau| \leqq \sigma;$$

$$(86)\qquad z=e^{\frac{2p\pi i}{q}-y}, \quad f(s)=\sum_{r=1}^{\infty} \frac{d(r)}{r} s^r \text{ für } |s|<1.$$

Dann ist, wenn $\log y$ *den Hauptzweig bedeutet,*

$$(87)\qquad \Im\big(f(z)\big)=\frac{1}{q}\log|y|\,\Im(\log y)+Bq.$$

Beweis: Im folgenden bedeute γ die Eulersche Konstante.

$$(88)\qquad D(R)=\sum_{r\leqq R}\frac{d(r)}{r}e^{\frac{2rp\pi i}{q}}=\sum_{ab\leqq R}\frac{1}{ab}e^{\frac{2abp\pi i}{q}}$$

$$=2\sum_{a\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{a}\sum_{a\leqq b\leqq\frac{R}{a}}\frac{1}{b}e^{\frac{2abp\pi i}{q}}-\sum_{a\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{a^2}e^{\frac{2a^2p\pi i}{q}}$$

$$=2\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{R}\\ q\nmid a}}\frac{1}{a}\sum_{a\leqq b\leqq\frac{R}{a}}\frac{1}{b}e^{\frac{2abp\pi i}{q}}+2\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{R}\\ q\mid a}}\frac{1}{a}\sum_{a\leqq b\leqq\frac{R}{a}}\frac{1}{b}e^{\frac{2abp\pi i}{q}}+B$$

$$=B\sum_{\substack{a\leqq\sqrt{R}\\ q\nmid a}}\frac{1}{a}\frac{q}{a}+2\sum_{a\leqq\frac{\sqrt{R}}{q}}\frac{1}{qa}\sum_{qa\leqq b\leqq\frac{R}{qa}}\frac{1}{b}+B \qquad (84)$$

$$=\frac{2}{q}\sum_{a\leqq\frac{\sqrt{R}}{q}}\frac{1}{a}\left(\log\frac{R}{q^2a^2}+\frac{B}{qa}\right)+Bq$$

$$=\frac{2}{q}\sum_{a\leqq\frac{\sqrt{R}}{q}}\frac{1}{a}\log\frac{R}{q^2}-\frac{4}{q}\sum_{a\leqq\frac{\sqrt{R}}{q}}\frac{\log a}{a}+Bq$$

$$=\frac{2}{q}\log\frac{R}{q^2}\left(\log\frac{\sqrt{R}}{q}+\gamma\right)-\frac{4}{q}\,\frac{1}{2}\log^2\frac{\sqrt{R}}{q}+Bq$$

$$=\frac{1}{q}\log^2\frac{R}{q^2}+\frac{2\gamma}{q}\log\frac{R}{q^2}-\frac{1}{2q}\log^2\frac{R}{q^2}+Bq$$

$$=\frac{1}{2q}\log^2\frac{R}{q^2}+\frac{2\gamma}{q}\log\frac{R}{q^2}+Bq$$

$$=\frac{1}{2q}(\log R-2\log q)^2+\frac{2\gamma}{q}(\log R-2\log q)+Bq$$

$$=\frac{1}{2q}\log^2 R+\frac{2(\gamma-\log q)}{q}\log R+Bq$$

$$(89)=\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{R}\frac{\log m}{m}+\frac{2(\gamma-\log q)}{q}\sum_{m=1}^{R}\frac{1}{m}+Bq.$$

$$f(z)=f\left(e^{\frac{2p\pi i}{q}-y}\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{d(r)}{r}e^{\frac{2rp\pi i}{q}-ry}=\left(1-e^{-y}\right)\sum_{r=1}^{\infty}D(r)\,e^{-ry}$$

(84—86, 88)

$$=\frac{1}{q}\left(1-e^{-y}\right)\sum_{r=1}^{\infty}e^{-ry}\sum_{m=1}^{r}\frac{\log m}{m}$$

$$+\frac{2(\gamma-\log q)}{q}\left(1-e^{-y}\right)\sum_{r=1}^{\infty}e^{-ry}\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{m}+B\sigma q\sum_{r=1}^{\infty}e^{-r\sigma} \qquad \textbf{(89, 85)}$$

$$=\frac{1}{q}\left(1-e^{-y}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m}\sum_{r=m}^{\infty}e^{-ry}$$

$$+\frac{2(\gamma-\log q)}{q}\left(1-e^{-y}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{r=m}^{\infty}e^{-ry}+Bq \qquad (85)$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m}e^{-my}+\frac{2(\gamma-\log q)}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}e^{-my}+Bq$$

$$(90)\qquad =\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m}e^{-my}+\frac{2(\gamma-\log q)}{q}\log\frac{1}{1-e^{-y}}+Bq.$$

$$\sum_{a+b=m}\frac{1}{ab}=\frac{1}{m}\sum_{a+b=m}\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{m}\sum_{a+b=m}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$(91)\qquad =\frac{2}{m}\sum_{a=1}^{m-1}\frac{1}{a}=\frac{2}{m}\sum_{a=1}^{m}\frac{1}{a}+\frac{B}{m^2}=\frac{2}{m}\log m+\frac{2\gamma}{m}+\frac{B}{m^2},$$

$$(92)\qquad \frac{\log m}{m}=\frac{1}{2}\sum_{a+b=m}\frac{1}{ab}-\frac{\gamma}{m}+\frac{B}{m^2} \qquad (91).$$

$$\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m}e^{-my}=\frac{1}{2q}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-my}\sum_{a+b=m}\frac{1}{ab}-\frac{\gamma}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}e^{-my}+B \quad (92)$$

$$=\frac{1}{2q}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}e^{-my}\right)^2-\frac{\gamma}{q}\log\frac{1}{1-e^{-y}}+B$$

$$(93)\qquad =\frac{1}{2q}\log^2\frac{1}{1-e^{-y}}-\frac{\gamma}{q}\log\frac{1}{1-e^{-y}}+B.$$

$$f(z)=\frac{1}{2q}\log^2\frac{1}{1-e^{-y}}+\frac{\gamma-2\log q}{q}\log\frac{1}{1-e^{-y}}+Bq \qquad (90,\ 93)$$

$$(94)\qquad =\frac{1}{2q}\log^2\frac{1}{y}+\frac{\gamma-2\log q}{q}\log\frac{1}{y}+Bq \qquad (85).$$

Nimmt man in (94) den Imaginärteil, so folgt (87).

Hilfssatz 23: *Ist überdies $q>2$ gerade und*

$$(95)\qquad g(s)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{t(r)}{r}s^r \quad \text{für} \quad |s|<1,$$

so gilt

$$(96)\qquad \Im(g(z))=\frac{1}{q}\log|y|\,\Im(\log y)+Bq.$$

Beweis: Wegen $|z|<1$ ist nach (55), (86), (95)

$$(97)\qquad g(z)=f(z^2)-f(z).$$

Wendet man (84) — (87) mit $p, \frac{q}{2}$, $2y$, 2σ, 2τ, z^2 statt $p, q, y,$ σ, t, z an, so ergibt sich

$$\Im(f(z^2))=\frac{2}{q}\log|2y|\,\Im(\log 2y)+Bq$$

$$(98)\qquad =\frac{2}{q}\log|y|\,\Im(\log y)+Bq.$$

(96) folgt aus (97), (98), (87).

Beweis von (8) und (9): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass

$$(99)\qquad \varphi(2)=1;\quad \varphi(x)\geqq\frac{1}{x}\quad \text{für}\quad x\geqq 2$$

ist. θ möge dieselbe Bedeutung wie beim Beweise von (6) und (7) haben. Die Ungleichungen (82) brauchen wir jetzt nicht, wohl aber die zugleich geltenden

$$(100)\qquad k_n\geqq 7;\quad k_n^5\leqq\log k_{n+1},\quad \varphi\left(\sqrt{k_{n+1}}\right)\leqq\frac{1}{k_n^3}\qquad (n>m).$$

n sei bis auf Weiteres eine beliebige ganze Zahl mit

$$(101)\qquad n>m,\quad n-m\equiv 0 \pmod 3,\ \text{also}\ k_n\equiv 0 \pmod 2 \qquad (83).$$

Wir setzen

$$(102)\qquad (-1)^n\left(\theta-\frac{h_n}{k_n}\right)=\left|\theta-\frac{h_n}{k_n}\right|=\frac{\omega_n}{k_n k_{n+1}},\ \text{so dass}\ \frac{1}{2}<\omega_n<1 \quad (34),$$

$$(103)\qquad \left\{\begin{aligned} &p=h_n,\ q=k_n,\ \sigma=\sigma_n=\frac{1}{k_{n+1}},\ \tau=\tau_n=-2\pi\left(\theta-\frac{h_n}{k_n}\right),\\ &y=y_n=\sigma_n+\tau_n i,\ z=z_n=e^{\frac{2h_n\pi i}{k_n}-y_n},\end{aligned}\right.$$

$$D_1(R)=\sum_{r=1}^{R}\frac{t(r)}{r}\sin 2r\pi\theta. \tag{104}$$

Die durch (103) festgelegten p, q, σ, τ, y, z erfüllen die Bedingungen (84)—(86), denn es ist

$$0<\sigma_n=\frac{1}{k_{n+1}}\leqq\frac{1}{k_n^2},\ |\tau_n|<\frac{2\pi}{k_n k_{n+1}}\leqq\sigma_n\quad (100),$$

und alle übrigen Beziehungen sind offenbar erfüllt. Wegen (101) darf daher (96) mit den Werten (103) angewandt werden:

$$\Im(g(z_n))=\frac{1}{k_n}\log|y_n|\,\Im(\log y_n)+B\,k_n. \tag{105}$$

Hierin ist

$$\Im(g(z_n))=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{t(r)}{r}\sin 2r\pi\theta\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}\quad (95,\ 103)$$

$$=\left(1-e^{-\frac{1}{k_{n+1}}}\right)\sum_{r=1}^{\infty}D_1(r)\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}\qquad (104); \tag{106}$$

$$y_n=\frac{1}{k_{n+1}}\left(1+\frac{B}{k_n}\right),\ |y_n|=\frac{1}{k_{n+1}}\left(1+\frac{B}{k_n}\right),$$

$$\log|y_n|=-\log k_{n+1}+\frac{B}{k_n}, \tag{107}$$

$$\Im(\log y_n)=\operatorname{arctg}\left(-2\pi\left(\theta-\frac{h_n}{k_n}\right)k_{n+1}\right)$$

$$=(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}\frac{2\pi\omega_n}{k_n}=(-1)^{n+1}\frac{2\pi\omega_n}{k_n}+\frac{B}{k_n^3}, \tag{108}$$

$$(-1)^n\left(1-e^{-\frac{1}{k_{n+1}}}\right)\sum_{r=1}^{\infty}D_1(r)\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}$$

$$=\frac{2\pi\omega_n\log k_{n+1}}{k_n^2}+B\,\frac{\log k_{n+1}}{k^4}+B\,k_n\quad (105—108)$$

$$=\frac{2\pi\omega_n\log k_{n+1}}{k_n^2}+B\,\frac{\log k_{n+1}}{k_n^4}\quad (100)$$

$$\geqq(\pi-1)\frac{\log k_{n+1}}{k_n^2}\geqq 2\,\frac{\log k_{n+1}}{k_n^2}\ \text{ für } n>m+A\quad (102), \tag{109}$$

$$(-1)^n\sum_{r=1}^{\infty}D_1(r)\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}\geqq\frac{k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n^2}\ \text{ für } n>m+A\ (109). \tag{110}$$

Wir nehmen jetzt an, dass für alle hinreichend grossen r, etwa für $r\geqq r_0>1$, eine der beiden Ungleichungen

$$D_1(r)<\varphi(r)\log r\quad\text{oder}\quad D_1(r)>-\varphi(r)\log r \tag{111}$$

erfüllt ist; je nachdem dies für die erste oder für die zweite Ungleichung (111) der Fall ist, setzen wir $\mathfrak{e}=1$ oder $\mathfrak{e}=-1$. Jedenfalls ist dann

$$\mathfrak{e}\sum_{r=1}^{\infty}D_1(r)\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}\leqq\sum_{r<r_0}|D_1(r)|+\sum_{r\geqq r_0}\varphi(r)\log r\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}. \tag{112}$$

Wir wählen ein $n_0>m$ mit

$$\sum_{r<r_0}|D_1(r)|\leqq\sqrt{k_{n+1}}\log k_{n+1},\ \sqrt{k_{n+1}}>r_0\ \text{ für } n\geqq n_0. \tag{113}$$

Aus (112), (113), (99) und (100) folgt für $n\geqq n_0$

$$\mathfrak{e}\sum_{r=1}^{\infty}D_1(r)\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}\leqq\sqrt{k_{n+1}}\log k_{n+1}+\sum_{r_0\leqq r\leqq\sqrt{k_{n+1}}}\varphi(r)\log r\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}$$

$$+\sum_{r>\sqrt{k_{n+1}}}\varphi(r)\log r\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}$$

$$\leqq\sqrt{k_{n+1}}\log k_{n+1}+\varphi(2)\sqrt{k_{n+1}}\log k_{n+1}+\varphi(\sqrt{k_{n+1}})\sum_{r=2}^{\infty}\log r\,e^{-\frac{r}{k_{n+1}}}$$

$$\leqq 2\sqrt{k_{n+1}}\log k_{n+1}+A\,\varphi(\sqrt{k_{n+1}})\,k_{n+1}\log k_{n+1}$$

$$\leqq A\,\varphi(\sqrt{k_{n+1}})\,k_{n+1}\log k_{n+1}\leqq A\,\frac{k_{n+1}\log k_{n+1}}{k_n^3}. \tag{114}$$

Aus (101), (110) und (114) folgt für $n \geqq n_1 \geqq n_0$, $n \equiv m \pmod 3$ und $n \equiv 0 \pmod 2$ für $\mathfrak{e} = 1$, $n \equiv 1 \pmod 2$ für $\mathfrak{e} = -1$,

$$\frac{k_{n+1} \log k_{n+1}}{k_n^2} \leqq A \frac{k_{n+1} \log k_{n+1}}{k_n^3}.$$

Da dies unmöglich ist, kann keine der Ungleichungen (111) für alle hinreichend grossen r erfüllt sein. Wegen (104) sind damit (8) und (9) bewiesen.

(Eingegangen am 6. Juli 1934.)

Note on Dirichlet's L-functions.

By

S. Chowla (Waltair, India).

Let

$$L(s) = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s} \qquad (s > 0)$$

where $\chi(n)$ is a real non principal character mod k;

$$S_1(x) = \sum_{n \leqq x} \chi(n), \quad S_m(x) = \sum_{n \leqq x} S_{m-1}(n) \qquad (m \geqq 2).$$

Let $m = m(\chi)$ be the least positive integer (if any) such that

$$S_m(x) \geqq 0 \qquad (x \geqq 1).$$

(1) *If m exists, then* $$L(s) > 0 \qquad (s > 0).$$ [1]

For $S_m(1) = 1$, $S_m(n) \geqq 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$, whence

$$(s > 0) \qquad L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} S_1(n) \{n^{-s} - (n+1)^{-s}\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} S_2(n) \{n^{-s} - 2(n+1)^{-s} + (n+2)^{-s}\} = \ldots$$

(2) $$= \sum_{n=1}^{\infty} S_m(n) \sum_{t=0}^{m} (-1)^t \frac{m!}{t!\,(m-t)!} (n+t)^{-s}$$

---

[1]) By a theorem of Hecke, a proof of (1) yields important consequences on the magnitude of the class-number of binary quadratic forms of a given negative discriminant. See E. Landau „Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper" [Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1918, p. 285—295], p. 287.