$j > m$, aucun parmi les points $p_1, \dots, p_k$ n'est un sommet de S_j. Il en résulte que tous les sommets de S_j, donc tous les points de S_j, ont l'abscisse $\leqslant \frac{1}{k+1}$. On en conclut immédiatement que $\bar{S}_0 \cdot \mathrm{Ls}\, S_i = 0$.

Remarque. Les simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ sont, en général, *singuliers*. Mais on peut s'arranger de façon qu'ils ne le soient pas; plus encore: que, pour chaque i, les sommets $p_1, \dots, p_i$ soient linéairement indépendants. On définit à ce but $f_0(q_i)$ comme un point dont toutes les coordonnées sauf l'abscisse (qui est égale à $1/i$) coïncident avec les coordonnées d'un point convenablement choisi dans l'espace de Hilbert dans l'entourage de $f(a_i)$.

La série $\Sigma p_{i_0} \dots p_{i_k}$ représente alors une décomposition *simpliciale* du polytope infinie qu'elle définit.

Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

On doit à MM. Alexander et Lefschetz la notion importante de la connexité locale en dimension n [1]): un espace (métrique séparable) Y [2]) est dit *localement connexe au point p en dimension n*, lorsqu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que, pour chaque fonction continue $y = f(x)$, définie sur la sphère S_n [3]) et assujettie à la condition $|f(x) - p| < \eta$ [4]), il existe une fonction continue $\varphi(x, t)$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$, satisfaisant aux conditions

$$\varphi(x, 0) = f(x), \quad \varphi(x, 1) = p, \quad |\varphi(x, t) - p| < \varepsilon.$$

Les espaces localement connexes en toute dimension $\leqslant n$ peuvent être caractérisés par la condition suivante (v. théorème 1 où cette condition s'exprime par l'inégalité $c_l(Y) \geqslant n$): chaque fonction continue $f(x)$, définie sur un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable **arbitraire** X et dont les valeurs appartiennent à Y, peut être étendue sur un entourage de A (sans que ses valeurs quittent l'espace Y), pourvue que $\dim (X - A) \leqslant n + 1$.

*) Présenté à la Soc. Pol. Math. à Varsovie, le 14 Déc. 1934.

[1]) S. Lefschetz, Ann. of Math. 35 (1934), p. 119.

[2]) Les espaces X, Y etc. considérés dans cet ouvrage sont toujours supposés métriques séparables. M. Lefschetz fait, dans la définition de la connexité locale, l'hypothèse de compacité. Nous l'omettons en vue surtout des applications aux espaces fonctionnels (qui, en général, ne sont pas compacts).

[3]) S_n est l'ensemble des points de l'espace cartésien à $n+1$ dimensions tels que $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$. En remplaçant dans cette égalité le symbole $=$ par $\leqslant$, on obtient le sphéroïde à $n+1$ dimensions, que nous désignons par Q_{n+1}.

En particulier S_0 se compose de deux points, S_{-1} est l'ensemble vide. Q_0 se compose d'un seul point.

[4]) $|q - p|$ désigne la distance entre q et p.

Cette condition — purement topologique, qui n'a même pas récours à la notion de sphère — nous servira comme point de départ de nos recherches. Comme on verra, elle se prête surtout aux applications.

En outre, elle permet d'embrasser les deux cas extrêmes (qui ont été étudiés de plus près): le cas où $n=0$, c. à d. où l'espace Y est localement connexe par arcs, et le cas $n=\aleph_0$, où l'espace est un rétracte absolu de voisinage [1]). Notamment, nous allons démontrer que notre condition équivaut à l'hypothèse que, Z étant un surespace de Y dans lequel Y est fermé, Y est un rétracte d'un de ses entourages (dans Z), pourvue que $\dim(Z-Y)\leqslant n+1$; donc dans le cas particulier, où $n=\aleph_0$, c. à d. où l'on ne fait aucune hypothèse ni sur la dimension de $X-Y$ ni sur celle de $Z-Y$, Y est un rétracte absolu de voisinage.

Si l'on remplace la condition considérée par la condition plus restrictive qui s'en obtient en demandant que la fonction $f(x)$ se laisse étendre sur l'espace X tout entier (et non seulement sur un entourage de A), on parvient à une généralisation de la notion d'espace péanien (= espace compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs) [2]). Tout, comme auparavant, le cas $n=0$ est celui de l'espace péanien (si Y est compact), le cas $n=\aleph_0$ est celui de rétracte absolu [3]). On parvient ainsi à une notion que l'on pourrait nommer notion *d'espace péanien en dimensions* $\leqslant n$ (en symboles $c(Y)\geqslant n$).

Le problème s'impose d'étendre la théorie des espaces péaniens (en dimension 0) aux espaces péaniens en dimensions $\leqslant n$ est d'approfondir ainsi l'étude des espaces qui se distinguent par leur régularité parmi les autres.

Dans la I[re] partie de cet ouvrage nous établirons quelques conditions qui caractérisent les espaces localement connexes et les espaces

[1]) Suivant M. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), p. 153, un ensemble B est dit *rétracte* de A, lorsque $B\subset A$ et lorsqu'il existe une transformation continue $f(x)$ de A en B (dite „rétraction") telle que $f(x)=x$ pour $x\in B$.

Un espace Y est un rétracte absolu de voisinage, lorsque dans chaque surespace Z dans lequel Y est fermé, il existe un entourage de Y dont Y est un rétracte (nous modifions légèrement la définition de M. Borsuk afin d'éviter l'hypothèse de la compacité de Y). Cf. K. Borsuk, Fund. Math. 19 (1932) p. 222.

[2]) = image continue de l'intervalle.

[3]) Y est dit un rétracte absolu, lorsqu'il est un rétracte de chaque sur-espace dont il constitue un sous-ensemble fermé.

péaniens en dimensions $\leqslant n$. Dans la II[me] nous établirons plusieurs formules qui concernent les opérations fondamentales sur les espaces: elle servent à calculer la „connexité" de la somme $A+B$ de deux ensembles, de leur produit cartésien $A\times B$, de leur puissance A^B (= espace des transformations continues de B en sous-ensembles de A). Il est surtout remarquable que l'on peut calculer la connexité de l'espace fonctionnel (qui n'est pas, en général, compact, bien que les espaces des arguments et des valeurs soient compacts): on verra, en particulier, que si l'espace Y et péanien en toute dimension $\leqslant n$ (et seulement dans ce cas), l'espace fonctionnel Y^X est péanien en dimension 0, quel que soit l'espace compact X de dimension $\leqslant n$ [1]).

I. Conditions nécessaires et suffisantes.

1. ***Grade de l'homotopie.*** Désignons, comme d'habitude, par Y^X l'espace des fonctions continues $y=f(x)$ définies sur l'espace X tout entier et transformant cet espace en sous-ensemble de Y. Si l'espace X est compact, l'espace Y^X devient métrique séparable en définissant la distance entre ses éléments par la formule

$$|f-g|=\max_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

où $|y_1-y_2|$ désigne la distance dans l'espace Y.

Soit $X=S_n$. Supposons que chaque fonction $f\in Y^{S_n}$ admet une extension f^* qui appartient à $Y^{Q_{n+1}}$ (c. à d. que f est homotope à une constante dans Y). Désignons, pour f fixe, par $\chi(f)$ la borne inférieure des nombres $\delta[f^*(Q_{n+1})]$ [2]), où f^* est une extension variable de f appartenant à $Y^{Q_{n+1}}$. Nous appelons ce nombre *le grade de l'homotopie de la fonction* f.

Si on suppose que l'espace Y est localement connexe au point p en dimension n, la fonctionnelle $\chi(f)$ n'est définie que dans le voisinage de p (considéré comme une constante appartenant à Y^{S_n}). Cette fonctionnelle est *continue* au point p. En effet, la fonction $\varphi(x,t)$ de la p. 269 définit la fonction f^* en posant $f^*[x\cdot(1-t)]=\varphi(x,t)$. On voit aussitôt que $f^*\in Y^{Q_{n+1}}$ et que $\delta[f^*(Q_{n+1})]\leqslant 2\varepsilon$.

[1]) Cet énoncé est dû à MM. Borsuk et Eilenberg. Plusieurs autres m'ont été suggérés aussi par ces deux auteurs.

[2]) $\delta(A)$, le diamètre de A, désigne la borne supérieure des distances $|a-a'|$ où a et a' parcourent l'ensemble A.

Inversement, la continuité de la fonctionnelle $\chi(f)$ au point p entraîne la connexité locale en dimension n en ce point. Ces deux notions sont donc équivalentes.

Remarquons encore que la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$,... vers la constante p s'exprime par la condition

$$\lim_{i=\infty} \delta[p+f_i(S_n)]=0.$$

Si cette condition implique que $\lim_{i=\infty} \chi(f_i)=0$, et dans ce cas seulement, la fonctionnelle $\chi(f)$ est continue au point p (donc l'espace Y est localement connexe au point p en dimension n).

Dans le cas où $n=0$, la fonction f n'admet que deux valeurs p et q (différentes ou non). Le grade de l'homotopie de f coïncide alors avec la borne inférieure du diamètre des arcs pq contenus dans Y, — nommée par M. Mazurkiewicz „distance relative" de p et q. „L'oscillation au point p", introduite, par cet auteur [1]), n'est rien d'autre que l'oscillation de la fonctionnelle $\chi(f)$ au point p, dans le sens habituel de ce terme [2]). On pourrait donc la nommer oscillation d'ordre 0, en appelant *oscillation d'ordre n* l'oscillation de la fonctionnelle $\chi(f)$ pour $f \epsilon Y^{S_n}$.

Il est à remarquer que des notions analogues au grade de l'homotopie et à l'oscillation d'ordre n se présentent aussi dans la théorie de l'homologie.

2. *Coefficients $c(Y)$ et $c_l(Y)$.*

Définition. *Y étant un espace métrique (non vide), $c_l(Y)$ désigne le plus grand entier n, s'il existe, tel que, A étant un sous-ensemble fermé d'un espace métrique séparable X assujetti à l'inégalité*

$$\text{(1)} \qquad \dim(X-A) \leqslant n+1,$$

à chaque fonction f appartenant à Y^A correspond un entourage E de A (dans X) et une extension $f^* \epsilon Y^E$.

Si le plus grand n de ce genre n'existe pas, on pose $c_l(Y)=\aleph_0$, lorsque la condition exprimée dans la définition est vraie pour chaque X (que la dimension de $X-A$ soit finie ou infinie); on pose $c_l(Y)=\omega$ dans le cas contraire (c. à d. lorsque la condition est réalisée toujours pour $X-A$ de dimension finie).

La définition du *coefficient* $c(Y)$ s'obtient de la précédente, en y substituant X à E.

On a évidemment $c_l(Y) \geqslant c(Y)$.

[1]) Fund. Math. 1 (1920), p. 170.
[2]) Voir par ex. *Topologie I*, p. 85.

Remarque. Les exemples suivants, dûs à M. Borsuk, prouvent l'existence des espaces Y tels que $c(Y)=\omega$ (et $\neq \aleph_0$), resp. que $c_l(Y)=\omega$ (et $\neq \aleph_0$).

1°. Y s'obtient par la réunion d'une suite infinie de sphères $S_0, S_1,$... placées de manière que $S_n \cdot S_{n+1}$ se réduise à un seul point, que $S_n \cdot S_{n+i}=0$ pour $i>1$ et que la suite converge vers un point p situé en dehors de la somme $S_0+S_1+\dots$ Ce point appartient aussi à Y.

On a

$$c_l(Y)=\omega \quad \text{et} \quad c_l(Y)\neq\aleph_0.$$

2°. L'ensemble Y de l'exemple précédent peut être imaginé situé dans l'espace de Hilbert de façon que les abscisses de ses points s'annulent. Soit q le point $(1,0,0,0,\dots)$. Unissons q à chaque point de Y par un segment rectiligne. L'ensemble ainsi obtenu a le coefficient $c=\omega$ et cependant $c\neq\aleph_0$.

3. ***Théorème 1.*** *Y étant un espace métrique séparable (non vide), chacune des conditions suivantes équivaut à l'inégalité*

$$\text{(0)} \qquad c_l(Y) \geqslant n:$$

I. Y est localement connexe en chaque dimension $\leqslant n$ [1]).

II. Z étant un sur-espace de Y tel que $\dim(Z-Y) \leqslant n+1$ et dans lequel Y est fermé, il existe un entourage de Y (dans Z) dont Y est un rétracte [2]).

III. Pour chaque point $p \epsilon Y$ et chaque $\varepsilon>0$, il existe un $\eta>0$ tel que, X étant un espace métrique séparable et A un sous-ensemble fermé de X tel que $\dim(X-A) \leqslant n+1$, à chaque fonction $f \epsilon Y^A$ telle que $\delta[p+f(A)]<\eta$ correspond une extension $f^* \epsilon Y^X$ de f satisfaisant à l'inégalité $\delta[p+f^*(X)]<\varepsilon$.

Démonstration. 1) I implique II.

D'après un théorème général [3]), il existe un sur-espace X de Y tel que Y est fermé (dans X), $X-Y$ est un polytope (infini) de dimension $\leqslant n+1$ et une fonction $g \epsilon X^Z$ qui est une identité sur Y. Il suffit donc de démontrer que Y est un rétracte d'un de ses entourages E dans X (puisque $g^{-1}(E)$ est un entourage de Y dans Z).

Cette dernière proposition va être établie par induction; nous allons démontrer 1°: qu'elle est vraie lorsque $\dim(X-Y)=0$

[1]) dans le sens de M. Lefschetz, voir p. 269.
[2]) Plus précisément: Z étant un espace arbitraire et Y^* un sous-ensemble fermé de Z, homéomorphe à Y et tel que $\dim(X-Y^*) \leqslant n+1$, Y^* est un rétracte d'un entourage dans Z. Pour simplifier les notations, nous identifions ici et dans la suite les points de Y avec ceux de Y^* qui viennent leur correspondre dans l'homéomorphie en question.
[3]) Voir ma note de ce volume p. 269, théor. 2, où l'on remplace X par Z, G par $Z-Y$, Z par X et f par l'identité.

2°: que si elle est vraie pour $\dim(X-Y) \leqslant k$, elle l'est encore pour $\dim(X-Y) = k+1$.

Or, dans le cas où $X-Y$ est un polytope (infini) de dimension 0, il est un ensemble isolé composé d'une suite (finie ou infinie) de points $p_1, p_2, \ldots$ En désignant par $f_0(p_i)$ un point de l'ensemble Y (qui par hypothèse n'est pas vide) tel que

$$|f_0(p_i) - p_i| < 2\varrho(p_i, Y),$$

on définit évidemment une rétraction de X en Y.

Passons, à présent, au deuxième cas. Décomposons le polytope infini $X-Y$ (à $k+1$ dimensions) simplicialement en simplexes [1]) et désignons par R la somme de tous les simplexes de dimension $\leqslant k$ et par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ les simplexes (ouverts) à $k+1$ dimensions. Les simplexes Δ_i sont donc disjoints et le bord $\bar{\Delta}_i - \Delta_i$ est contenu dans R. On peut postuler en outre que $\lim_{i=\infty} \delta(\Delta_i) = 0$.

Par hypothèse, il existe un entourage G de Y (dans X) et une fonction $f \in Y^{RG+Y}$ qui est une identité sur Y. Pour $\bar{\Delta}_i \subset G$, désignons par f_i la fonction partielle $f/\bar{\Delta}_i - \Delta_i$ [2]). Soit E l'ensemble-somme de $Y+RG$ et de tous les Δ_i (contenus dans G) tels que la fonction f_i admet une extension $f_i^* \in Y^{\bar{\Delta}_i}$. Choisissons la fonction f_i^* de façon que $\delta[f_i^*(\bar{\Delta}_i)] < 2\chi(f_i)$. Les simplexes Δ_i étant mutuellement disjoints et disjoints de Y, les fonctions $f, f_1^*, f_2^*, \ldots$ définissent une seule transformation f^* de E en sous-ensemble de Y (elle coïncide avec f sur $Y+RG$ et avec f_i^* sur $\bar{\Delta}_i$). Il s'agit de démontrer que E est un entourage de Y et que la fonction f^* est continue.

Soient $p \in Y$ et $p = \lim_{j=\infty} p_j$, où $p_j \in X-(Y+R)$. Comme $\bar{\Delta}_i \cdot Y = 0$, on peut admettre, en posant $p_j \in \Delta_{i_j}$, que tous les indices i_j sont différents. Par conséquent, $\lim_{j=\infty} \delta(\Delta_{i_j}) = 0$ et $\lim_{j=\infty} \delta[p+\Delta_{i_j}] = 0$. Comme $p \in G$, il en résulte que, pour j suffisamment grand, on a $\bar{\Delta}_{i_j} \subset G$, d'où $\bar{\Delta}_{i_j} - \Delta_{i_j} \subset RG$, de sorte que la fonction f est définie sur la „sphère à k dimensions" $\bar{\Delta}_{i_j} - \Delta_{i_j}$. La fonction f étant continue au point p, l'égalité $\lim_{j=\infty} \delta[p+\Delta_{i_j}] = 0$ entraîne $\lim_{j=\infty} \delta[f(p)+f(\bar{\Delta}_{i_j} - \Delta_{i_j})] = 0$ et l'espace Y étant au point p localement connexe en dimension k, cette

[1]) Voir ibid., p. 268, remarque finale.

[2]) f/D désigne la fonction qui s'obtient de f en restreignant à D l'ensemble des arguments.

dernière formule, qui équivaut évidemment à $\lim_{j=\infty} \delta[p+f_{i_j}(\bar{\Delta}_{i_j} - \Delta_{i_j})] = 0$, implique que $\lim_{j=\infty} \chi(f_{i_j}) = 0$ (v. N° 1, p. 272).

Par conséquent, à partir d'un j suffisamment grand, chaque fonction f_{i_j} admet une extension sur $\bar{\Delta}_{i_j}$, ce qui prouve que $\Delta_{i_j} \subset E$, donc que $p_{i_j} \in E$. Le point p est donc un point intérieur de E.

En outre, comme $\delta[f_{i_j}^*(\bar{\Delta}_{i_j})] < 2\chi(f_{i_j})$, il vient $\lim_{j=\infty} \delta[f_{i_j}^*(\bar{\Delta}_{i_j})] = 0$. En tenant compte de la formule $0 \neq f_{i_j}(\bar{\Delta}_{i_j} - \Delta_{i_j}) \subset f_{i_j}^*(\bar{\Delta}_{i_j})$ et de l'égalité $\lim_{j=\infty} \delta[p + f_{i_j}(\bar{\Delta}_{i_j} - \Delta_{i_j})] = 0$, établie auparavant, on en conclut que $\lim_{j=\infty} \delta[p + f_{i_j}^*(\bar{\Delta}_{i_j})] = 0$, donc que $\lim_{j=\infty} f^*(p_j) = p$.

La fonction f^* est donc continue.

2) II implique (0).

En effet, si $A = \bar{A} \subset X$, $\dim(X-A) \leqslant n+1$ et $f \in Y^A$, il existe [1]) un sur-espace Z de Y tel que $\dim(Z-Y) \leqslant n+1$ et que Y est fermé dans Z et une extension $f_0 \in Z^X$ de f. En admettant la condition II, il existe un entourage V de Y (dans Z) et une rétraction g de V en Y. La fonction superposée $f^* = gf_0$ est la fonction demandée: elle est une extension de f et est définie sur l'ensemble $E = f_0^{-1}(V)$, qui est un entourage de A (dans X).

3) (0) implique III.

Soient, en effet, X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite d'espaces métriques séparables, A_i une suite de sous-ensembles fermés de X_i tels que $\dim(X_i - A_i) \leqslant n+1$ et $f_i \in Y^{A_i}$. Admettons que $\lim_{i=\infty} \delta[p+f_i(A_i)] = 0$. Il s'agit de démontrer que la condition (0) implique, pour i suffisamment grand, l'existence d'une fonction $f_i^* \in Y^{X_i}$ qui soit une extension de f_i et qui satisfasse à l'égalité $\lim_{i=\infty} \delta[p+f_i^*(X_i)] = 0$.

Or, imaginons que X soit un espace composé des espaces X_i et d'un seul point q situé en dehors de $X_1 + X_2 + \ldots$ Imaginons, en outre, que les ensembles X_i soient disjoints (considérés comme sous-ensembles de X) et que $\lim_{i=\infty} \delta[q + X_i] = 0$.

Posons $A = A_1 + A_2 + \ldots + q$. Les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ déterminent alors une seule fonction $f \in Y^A$ qui coïncide avec f_i sur A_i et qui fait correspondre p à q. Comme $X - A = \sum_{i=1}^{\infty}(X_i - A_i)$, il vient $\dim(X-A) \leqslant n+1$ [2]). Il existe donc selon (0) un entourage E

[1]) D'après le théorème cité p. 273, renvoi 3.

[2]) D'après le théorème d'addition de la théorie de la dimension.

de A (dans X) et une extension f^* de f appartenant à Y^E. La formule $\lim_{i=\infty}\delta[q+X_i]=0$ entraîne $X_i\subset E$ pour i suffisamment grand (puisque q est un point intérieur de E). La fonction partielle $f_i^*=f^*/X_i$ se trouve donc définie sur l'espace X_i tout entier et il vient $\lim_{i=\infty}\delta[p+f_i^*(X_i)]=0$.

4) III implique I.

Ceci est évident, puisque la condition I est un cas particulier de III: cas où $X=Q_{n+1}$ et $A=S_n$.

Théorème 1'. *Y étant un espace métrique séparable (non vide), chacune des conditions suivantes équivaut à l'inégalité*

$$c(Y)\geqslant n:$$

I'. Y est localement connexe en chaque dimension $k\leqslant n$ et, en outre, toute fonction $f\in Y^{S_k}$ admet une extension $f^*\in Y^{Q_{k+1}}$.

II'. Y est un rétracte de chaque sur-espace Z tel que $\dim(Z-Y)\leqslant n+1$ et dans lequel Y est fermé.

La démonstration s'obtient de celle du théorème précédent en remplaçant les entourages par les espaces: E et G par X dans 1) et V par Z dans 2).

Remarques. 1. *L'inégalité $c(Y)\geqslant-1$ est valable toujours (pour $Y\neq0$).* Autrement dit, Y étant un sous-ensemble fermé non-vide d'un espace métrique séparable X tel que $\dim(X-Y)=0$, Y en est un rétracte [1]).

2. L'inégalité $c_l(Y)\geqslant0$, comme équivalente à la connexité locale en dimension 0, signifie la connexité locale par arcs (v. p. 270). D'une façon analogue, l'inégalité $c(Y)\geqslant0$ équivaut à la connexité par arcs locale et intégrale.

En particulier, *si Y est compact, l'inégalité $c(Y)\geqslant0$ signifie qu'il est péanien.* S'il est complet, il est quasi-péanien.

3. On déduit de la partie 2) de la démonstration du théorème 1 que l'égalité $c_l(Y)=\aleph_0$ équivaut à la condition II où l'on ne fait aucune hypothèse sur la dimension de la différence $Z-Y$. D'une façon analogue, l'égalité $c(Y)=\aleph_0$ signifie que Y est un rétracte de *chaque* sur-espace dans lequel Y est fermé. Par conséquent les espaces Y tels que $c(Y)=\aleph_0$ (resp. $c_l(Y)=\aleph_0$) sont des *rétractes absolus* (resp. des rétractes absolus de *voisinage*).

[1]) Pour le cas particulier où $\dim X=0$ on obtient un théorème de M. Sierpiński, Fund. Math. 11 (1928), p. 118.

En particulier, pour tous les polytopes le coefficient c_l est $\aleph_0$, pour tous les simplexes le coefficient c est $\aleph_0$.

4. Dans la condition p. 272 qui définit l'inégalité $c_l(Y)\geqslant n$ (resp. $c(Y)\geqslant n$), pour n fini, la variabilité de X et de A peut être restreinte aux espaces *compacts*, ou même aux espaces compacts qui s'obtiennent d'un polytope (fini ou infini) en ajoutant un seul point.

Car en modifiant ainsi la condition (0) et en posant dans la partie 3) de la démonstration $X=Q_{n+1}$ et $A_i=S_n$, on en conclut que (0) implique I. La démonstration des implications I→II et II→(0) ne demande aucune modification

II. Opérations.

4. ***Addition. Théorème 2.*** *A et B étant deux ensembles fermés dans leur somme, les inégalités*

(1) $$c_l(A)\geqslant n,\quad c_l(B)\geqslant n,\quad c_l(AB)\geqslant n-1$$

impliquent que $c_l(A+B)\geqslant n$.

Les inégalités

(2) $$c(A)\geqslant n,\quad c(B)\geqslant n,\quad c(AB)\geqslant n-1$$

entraînent $c(A+B)\geqslant n$ [1]).

Démonstration. Soit X un espace métrique séparable tel que

(3) $$A+B\subset X,\quad \dim[X-(A+B)]\leqslant n+1$$

et que $A+B$ est fermé dans X. Il s'agit de démontrer que — les inégalités (1) supposées remplies — l'ensemble $A+B$ est un rétracte d'un de ses entourages dans X (cf. cond. II du th. 1).

D'après un théorème général de la théorie de la dimension [2]), les conditions (3) entraînent l'existence de deux ensembles fermés P et Q tels que

(4) $$X=P+Q,\quad P(A+B)=A,\quad Q(A+B)=B,$$

(5) $$\dim[PQ-AB]\leqslant n.$$

[1]) Le théorème ainsi que la démonstration, sont valables aussi pour $n=\aleph_0$. Cf. K. Borsuk, Fund. Math. 19 (1932), p. 226 et N. Aronszajn et K. Borsuk, ibid. t. 18, p. 194.

[2]) Voir W. Hurewicz, ce vol. p. 146, renvoi 11.

On conclut de (5), en vertu de l'inégalité $c_l(AB) \geqslant n-1$, que AB est un rétracte d'un de ses entourages fermés E dans PQ: soit $f \in (AB)^E$ et

(6) $$f(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in AB.$$

Rien n'empêche d'étendre la définition de la fonction f sur l'ensemble $E + A + B$ en admettant qu'elle est une identité sur $A+B$; car selon (4):

(7) $$PQ(A+B) = AB, \quad \text{d'où} \quad E(A+B) = AB\ ^{1}).$$

Soit f_0 la fonction f ainsi prolongée:

(8) $$f_0 \in (A+B)^{E+A+B}, \quad f_0(x) = x \quad \text{pour} \quad x \in (A+B).$$

Or, $P-(A+E) \subset P-A = P-(A+B)$, selon (4). Donc $\dim[P-(A+E)] \leqslant n+1$ selon (3). L'inégalité $c_l(A) \geqslant n$ implique, par conséquent, que la fonction partielle $f_0/(A+E)$ admet une extension $f_1 \in A^{P_1}$ où P_1 est un entourage de $A+E$ dans P.

D'une façon analogue, il existe une extension $f_2 \in B^{Q_1}$ de la fonction $f_0/(B+E)$, où Q_1 est un entourage de $B+E$ dans Q.

Les formules évidentes: $f_1/E = f_0/E = f_2/E$ et $(P_1 - Q_1 + E)\cdot(Q_1 - P_1 + E) = E$ prouvent que les fonctions f_1 et f_2 définissent sur l'ensemble $V = P_1 - Q_1 + Q_1 - P_1 + E$ une seule fonction f^* qui coïncide avec ces fonctions respectivement sur $P_1 - Q_1 + E$ et sur $Q_1 - P_1 + E$[2]. Selon (8), on a, pour $x \in (A+B)$, $f^*(x) = f(x) = x$, ce qui prouve que f^* est une rétraction de V en $A+B$.

L'ensemble V est un entourage de $A+B$ dans X. En effet, P_1 et Q_1 étant par hypothèse des entourages de A et de B respectivement (dans P et Q), on a

(9) $$\overline{P-P_1}\cdot A = 0 = \overline{Q-Q_1}\cdot B.$$

On en conclut que $P_1 + Q_1$ est un entourage de $A+B$ dans X, car $\overline{X-(P_1+Q_1)}\cdot A \subset \overline{P-P_1}\cdot A + \overline{Q-Q_1}\cdot A \subset \overline{Q-Q_1}\cdot AQ \subset$ $\subset \overline{Q-Q_1}\cdot B = 0$, en vertu des formules (4) et (9).

[1]) D'une façon générale, M et N étant deux ensembles fermés dans $M+N$ et f et g deux fonctions appartenant à Y^M et à Y^N respectivement et telles que $f/MN = g/MN$, il existe une fonction $h \in Y^{M+N}$ telle que $h/M = f$ et $h/N = g$. Dans le cas considéré on a $Y = A+B$, $M = E$, $N = A+B$ et $g(x) = x$.

[2]) On pose, en effet, dans le renvoi précédent: $Y = A+B$, $M = P_1 - Q_1 + E$ et $N = Q_1 - P_1 + E$.

D'autre part, E étant un entourage de AB dans PQ, on a

$$\overline{PQ-E}\cdot AB = 0.$$

On en conclut que $V = P_1 - Q_1 + Q_1 - P_1 + E$ est un entourage de $A+B$ dans $P_1 + Q_1$, donc dans X (puisque $P_1 + Q_1$ est un entourage de $A+B$ dans X). En effet, $(P_1+Q_1) - V = P_1Q_1 - E$, d'où $\overline{(P_1+Q_1)-V}\cdot A = \overline{P_1Q_1 - E}\cdot A \subset \overline{PQ-E}\cdot AQ \subset \overline{PQ-E}\cdot AB = 0$.

L'inégalité $c_l(A+B) \geqslant n$ se trouve ainsi établie. Pour déduire l'inégalité $c(A+B) \geqslant n$ des formules (2)[1]), on substitue dans le raisonnement précédent PQ à E, P à P_1 et Q à Q_1; la fonction f^* est alors une rétraction de X en $A+B$.

Le théor. 2 permet souvent de calculer les coefficients c et c_l. En particulier, il en résulte facilement que $c(S_n) \geqslant n-1$.

En effet, pour $n=0$, ceci est évident: un ensemble composé de deux points est péanien en dimension -1.

Supposons que $c(S_{n-1}) \geqslant n-2$ et décomposons la sphère S_n en deux hémisphères S_n^+ et S_n^- ayant „l'équateur" S_{n-1} en commun. Une hemi-sphère étant équivalente topologiquement à un simplexe, il vient $c(S_n^+) = \aleph_0 = c(S_n^-)$, d'où $c(S_n) \geqslant n-1$ en vertu du théorème 2.

D'une façon plus générale, *S étant un polytope sphéroïdal*[2]) *à n dimensions, on a $c(S) \geqslant n-1$*.

Soit, en effet, A un simplexe fermé à n dimensions contenu dans S et p un point intérieur de A. Posons $B = \overline{S-A}$. Par définition de polytope sphéroïdal, il existe un rétracte absolu R tel que $B \subset R \subset S-p$. L'ensemble B est un rétracte absolu, comme rétracte de R (il s'obtient de R par une projection centrale effectuée du point p); donc $c(B) = \aleph_0$. Comme nous venons de voir, $c(AB) \geqslant n-2$ et $c(A) = \aleph_0$. Par conséquent $c(S) = c(A+B) \geqslant n-1$.

Théorème 3. *A et B étant deux ensembles fermés dans leur somme, les inégalités*

(10) $c_l(A+B) \geqslant n$ *et* (11) $c_l(AB) \geqslant n$

impliquent que $c_l(A) \geqslant n$ et $c_l(B) \geqslant n$.

Les inégalités

(12) $c(A+B) \geqslant n$ *et* (13) $c(AB) \geqslant n$

impliquent que $c(A) \geqslant n$ et $c(B) \geqslant n$[3]).

[1]) Cf. le théorème II de la note précitée de M. Hurewicz, p. 146.

[2]) Dans le sens de M. Borsuk, Wiad. Mat. 38 (1934), p. 4.

[3]) Voir renvoi 1 p. 277. Pour $n=0$ ce théorème a été démontré par Mme S. Nikodym, Fund. Math. 12 (1928), p. 240. Pour $n=\aleph_0$ par MM. Aronszajn et Borsuk; voir Fund. Math. t. 18, p. 194 et t. 19, p. 226.

Démonstration. Soit X un espace métrique séparable, U un sous-ensemble fermé de X tel que $\dim(X-U)\leqslant n+1$ et $f\in A^U$. Il s'agit de montrer que les inégalités (10) et (11) entraînent l'existence d'un entourage V de U et d'une extension $f^*\in A^V$ de la fonction f.

D'après (10) il existe un entourage fermé E de U (dans X) et une extension $f_0\in(A+B)^E$ de la fonction f.

Posons $E_1=f_0^{-1}(A)$, $E_2=f_0^{-1}(B)$. Il vient

$$E=E_1+E_2,\quad U\subset E_1,\quad f_0(E_1E_2)\subset AB.$$

La dernière inclusion implique en vertu de (11) l'existence d'une extension $f_1\in(AB)^Q$ de la fonction partielle f_0/E_1E_2, Q étant un entourage fermé de E_1E_2 dans E_2.

En tenant compte de l'identité $E_1Q=E_1QE_2=E_1E_2$, les fonctions (f_0/E_1) et f_1 définissent une seule fonction f^* qui appartient à A^{E_1+Q} et qui est une extension de f [1]).

De plus, l'ensemble $V=E_1+Q$ est un entourage de U dans X. Il suffit de démontrer qu'il est un entourage de U dans E, car E en est un entourage dans X.

Or, $\overline{E-(E_1+Q)}\cdot U=\overline{E_2-(E_1+Q)}\cdot U\subset\overline{E_2-Q}\cdot UE_1E_2\subset$ $\subset\overline{E_2-Q}\cdot E_1E_2=0$, puisque Q est un entourage de E_1E_2 dans E_2.

L'inégalité $c_l(A)\geqslant n$ se trouve ainsi établie.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, on pose $E=X$ et $Q=E_2$. Il vient $V=E_1+E_2=X$.

Corollaire. *A étant un sous-ensemble fermé de Y tel que $c(Y)\geqslant n\geqslant 0$ et $c(A)\geqslant n$, et C étant une composante* [2]) *de l'ensemble $Y-A$, on a $c(Y-C)\geqslant n$ et $c(C+A)\geqslant n$* [3]).

Car Y étant localement connexe et $Y-A$ ouvert, C est ouvert [4]). Le théorème 3 est donc applicable, en tenant compte des égalités:

$$(Y-C)+(C+A)=Y\quad\text{et}\quad(Y-C)\cdot(C+A)=A.$$

5. ***Produit (cartésien).*** Rappelons que, par définition, le produit cartésien $Y_1\times Y_2\times\dots$ des espaces $Y_1, Y_2,\dots$ (en nombre fini

[1]) Voir p. 278, renvoi 1.

[2]) c. à d. ensemble connexe saturé contenu dans $Y-A$.

[3]) cf. le théor. X de la note de M. Knaster et moi *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921).

[4]) D'après un théorème de H. Hahn, Fund. Math. 2, p. 191.

ou infini) est l'ensemble des suites $\eta=[\eta^1,\eta^2,\dots]$ telles que $\eta^i\in Y_i$, quel que soit i. Si les espaces $Y_1, Y_2,\dots$ sont métriques séparables, leur produit cartésien peut être aussi considéré comme métrique séparable [1]).

On montre que $\eta(x)$ étant une fonction qui fait correspondre à chaque $x\in X$ un élément du produit $Y_1\times Y_2\times\dots$, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\eta(x)$ soit continue est que chacune des fonctions $\eta^i(x)$ soit continue. Autrement dit, la formule $\eta\in(Y_1\times Y_2\times\dots)^X$ équivaut à la condition: quel que soit i, $\eta^i\in Y_i^X$.

Il en résulte que, pour que la fonction $g\in(Y_1\times Y_2\times\dots)^X$ soit une extension de la fonction $f\in(Y_1\times Y_2\times\dots)^A$, où $A\subset X$, il faut et il suffit que g^i soit une extension de f^i quel que soit i.

Théorème 4. $c(Y_1\times Y_2\times\dots)=\min c(Y_i)$,

$c_l(Y_1\times Y_2)=\min[c_l(Y_1), c_l(Y_2)]$.

Démonstration. 1. Posons $\min c(Y_i)=n$ (fini ou $\aleph_0$ [2])). Soient A un sous-ensemble fermé de l'espace X tel que $\dim(X-A)\leqslant$ $\leqslant n+1$ et $f\in(Y_1\times Y_2\times\dots)^A$. Il vient $f^i\in Y_i^A$. Comme $c(Y_i)\geqslant n$, il existe une extension $g^i\in Y_i^X$ de f^i. Considérons la fonction $g=[g^1,g^2,\dots]$. Elle est une extension de f et appartient à $(Y_1\times Y_2\times\dots)^X$. Par conséquent,

$$c(Y_1\times Y_2\times\dots)\geqslant n.$$

2. Considérons, d'autre part, l'espace Y_i tel que $c(Y_i)=n$. Pour abréger les notations, admettons que $c(Y_1)=n$. Soient A un sous-ensemble fermé de l'espace X tel que $\dim(X-A)\leqslant c(Y_1\times Y_2\times\dots)+1$ et $h\in Y_1^A$.

Soit p_i un point fixe de Y_i et désignons par h_i la fonction (constante) transformant A en p_i: $h_i(x)=p_i$. Considérons la fonction $\varphi=[h,h_2,h_3,\dots]$. Elle appartient à $(Y_1\times Y_2\times\dots)^A$ et admet, par hypothèse faite sur $\dim(X-A)$, une extension $\psi\in(Y_1\times Y_2\times\dots)^X$. La fonction ψ^1 appartient donc à Y_1^A, et est une extension de la fonction h. Par conséquent

$$c(Y_1)\geqslant c(Y_1\times Y_2\times\dots),$$

d'où la première formule à établir.

[1]) Cf. *Topologie I*, p. 145.

[2]) Pour $n=\aleph_0$, cf. Aronszajn et Borsuk, l. cit. p. 197.

On établit la deuxième d'une façon tout-à-fait analogue. En conservant (dans la partie 1) le même sens des symboles A, X et f, on désigne par g^i une extension de f^i sur un entourage E_i de A ($i=1,2$). En posant $E=E_1\cdot E_2$, les fonctions partielles $h_1=g^1/E$ et $h_2=g^2/E$ définissent la fonction $h=(h_1,h_2)$ qui appartient à $(Y_1\times Y_2)^E$ et qui est une extension de f. En outre E est évidemment un entourage de A.

Quant à la partie 2, on n'a qu'à remplacer dans la formule $\psi\,\epsilon\,(Y_1\times Y_2\times\ldots)^X$, le symbole X par E, où E désigne un entourage de A.

Remarque. On voit ainsi que

$$c_l(Y_1\times Y_2\times\ldots)\leqslant \min c_l(Y_i).$$

Cependant l'inégalité inverse n'a pas lieu: tous les Y_i étant identiques et composés de deux éléments, on a $c_l(Y_i)=\aleph_0$, tandis que $c_l(Y_1\times Y_2\times\ldots)=-1$, l'espace $Y_1\times Y_2\times\ldots$ étant topologiquement identique à l'ensemble non-dense de Cantor.

6. *Puissance (espace fonctionnel).* Nous établirons d'abord une relation entre les espaces $(Y^T)^X$ et $Y^{T\times X}$ qui interviendra dans les raisonnements qui suivent.

L'espace T sera supposé *compact.*

Soit f une fonction (continue ou non) qui fait correspondre à chaque $x\,\epsilon\,X$ un élément f_x de l'espace fonctionnel Y^T. A son tour, f_x fait correspondre à chaque $t\,\epsilon\,T$ un point $f_x(t)$ de Y.

Posons

$$g(t,x)=f_x(t). \tag{1}$$

On a alors l'équivalence

$$\{g\,\epsilon\,Y^{T\times X}\}\equiv\{f\,\epsilon\,(Y^T)^X\}\ ^{1})$$

c. à d. que pour que la fonction g soit continue, il faut et il suffit que la fonction f soit continue.

En effet, admettons d'abord que f soit continue. Soit $\lim x_n=x$ et $\lim t_n=t$. Par hypothèse $\lim f_{x_n}=f_x$, c. à d. que la suite des fonctions (de la variable t) $f_{x_1}(t)$, $f_{x_2}(t),\ldots$ converge uniformément vers la fonction $f_x(t)$. L'espace T étant compact, cela équivaut à l'égalité $\lim f_{x_n}(t_n)=f_x(t)$ [1]). Il vient $\lim g(t_n,x_n)=g(t,x)$, d'où la continuité de la fonction g.

Admettons, à présent, que, inversement, la fonction g est continue et posons $\lim x_n=x$. Il s'agit de démontrer que $\lim f_{x_n}=f_x$, c. à d. que la suite des fonctions $\{f_{x_n}(t)\}$ converge uniformément, donc que l'égalité $\lim t_n=t$ entraîne $\lim f_{x_n}(t_n)=f_x(t)$ ou encore: qu'elle entraîne $\lim g(t_n,x_n)=g(t,x)$. Mais ceci est une conséquence directe de la continuité de la fonction g.

Ceci établi, observons que, pour que la fonction f^* soit une extension de la fonction $f\,\epsilon\,(Y^T)^A$, il faut et il suffit que la fonction g^*, définie par la condition

$$g^*(t,x)=f_x^*(t), \tag{2}$$

soit une extension de la fonction g (qui appartient à $Y^{T\times A}$).

Théorème 5 [2]). $c_l(Y^T)\leqslant c_l(Y)\leqslant c_l(Y^T)+\dim T,$
$c(Y^T)\leqslant c(Y)\leqslant c(Y^T)+\dim T.$

Démonstration. Afin détablir l'inégalité $c_l(Y^T)\leqslant c_l(Y)$, considérons un espace métrique séparable X, un sous-ensemble fermé A de X, une fonction $\varphi\,\epsilon\,Y^A$ et admettons que

$$\dim(X-A)\leqslant c_l(Y^T)+1. \tag{3}$$

Il s'agit de définir une extension $\varphi^*\,\epsilon\,Y^E$ de la fonction φ, où E est un entourage convenablement choisi de A (dans X).

Soit f la fonction qui fait correspondre à chaque $x\,\epsilon\,A$ la fonction constante (considérée comme fonction de l'argument t) $\varphi(x)$; c. à d. que

$$f_x(t)=\varphi(x),\quad \text{quels que soient } t\,\epsilon\,T \text{ et } x\,\epsilon\,A.$$

Il vient $f\,\epsilon\,(Y^T)^A$, car la fonction g définie par la formule (1) est évidemment continue et appartient par conséquent à $Y^{T\times A}$. D'après (3) la fonction f admet donc une extension $f^*\,\epsilon\,(Y^T)^E$, où E est un entourage de A (dans X). Il en résulte que la fonction g^*, définie par la formule (2), est une extension de la fonction g et appartient à $Y^{T\times E}$. Donc, t_0 étant un point fixe arbitrairement

[1]) Plus encore: si X est compact, la correspondance considérée est une *homéomorphie* entre les espaces $(Y^T)^X$ et $Y^{T\times X}$.

[1]) Nous nous appuyons ici sur le théorème facile à établir, d'après lequel: étant donnée une suite de fonctions continues $f_1(t)$, $f_2(t),\ldots$ définies sur un espace compact T, la convergence uniforme de cette suite vers la fonction $f(t)$ équivaut à l'hypothèse que la condition $\lim t_n=t$ entraîne $\lim f_n(t_n)=f(t)$, quels que soient les arguments t et t_n.

[2]) Dans un ordre d'idées analogue, M. Hurewicz étudie dans une Note qui vient de paraître dans Proceed. Akad. Amsterdam 38 (1935) l'espace Y^T pour Y localement contractile dans soi (cf. N° 8).

choisi dans T, la fonction φ^*, définie par l'égalité $\varphi^*(x)=g^*(x,t_0)$ pour $x\in E$, est une extension de la fonction φ et appartient à Y^E.

L'inégalité $c_l(Y^T)\leqslant c_l(Y)$ se trouve ainsi établie. En remplaçant dans le raisonnement précédent E par X, on démontre que $c(Y^T)\leqslant c(Y)$.

Passons à présent à l'inégalité

(4) $$c_l(Y)\leqslant c_l(Y^T)+\dim T.$$

Soient A un sous-ensemble fermé de X, $f\in(Y^T)^A$ et

(5) $$\dim T+\dim(X-A)\leqslant c_l(Y)+1.$$

L'inégalité (5) donne

$$\dim(T\times X-T\times A)\leqslant\dim T+\dim(X-A)\leqslant c_l(Y)+1.$$

Par conséquent, la fonction g de la formule (1) admet une extension $g_0\in Y^V$ où V est un entourage de l'ensemble $T\times A$ dans l'espace $T\times X$. L'espace T étant compact, on constate facilement qu'il existe un entourage E de A (dans X) tel que $T\times E\subset V$. Désignons par g^* la fonction partielle $g_0/(T\times E)$. La fonction f^*, définie par la formule (2), est donc une extension de f et appartient à $(Y^T)^E$.

L'inégalité (4) est ainsi démontrée.

L'inégalité $c(Y)\leqslant c(Y^T)+\dim T$ s'obtient, en remplaçant dans le raisonnement précédent V par $T\times X$ et E par X.

Remarques. 1) L'égalité $c(Y)=c(Y^T)+\dim T$ n'est pas, en général, vraie. Par exemple: $c(S_1)=0$, $c(S_1^{Q_1})=0$, $\dim Q_1=1$ (Q_1 est l'intervalle 01).

2) La démonstration du théorème reste valable lorsque les coefficients c et c_l sont $\aleph_0$; elle devient même plus simple, car on omet alors les conditions (3) et (5). On en conclut que, quel que soit l'espace compact T (de dimension finie ou infinie):

$$c_l(Y)=\aleph_0 \textit{ implique } c_l(Y^T)=\aleph_0 \text{ et } c(Y)=\aleph_0 \textit{ implique } c(Y^T)=\aleph_0.$$

En particulier, *si Y est un simplexe, Y^T est un rétracte absolu, si Y est un polytope, Y^T est un rétracte absolu de voisinage* (cf. N° 3, rem. 3).

3) Soit $c_l(Y)\geqslant\dim T$. Il vient $c_l(Y^T)\geqslant 0$; cela signifie que l'espace Y^T est localement connexe par arcs. Il est, en outre, intégralement connexe par arcs, si l'on suppose que $c(Y)\geqslant\dim T$.

Cette remarque conduit à la caractérisation suivante des coefficients c et c_l:

Corollaire. *Pour que $c_l(Y)\geqslant n$, il faut et il suffit que, quel que soit l'espace compact T de dimension $\leqslant n$. l'espace Y^T soit localement connexe par arcs.*

Si l'on ajoute à cette condition la connexité (intégrale) par arcs, on obtient une condition qui équivaut à l'inégalité $c(Y)\geqslant n$.

En outre, la variabilité de T peut être réduite aux $n+1$ sphères: $S_0,\dots,S_n$.

En vue de la dernière remarque, il suffit de démontrer que l'inégalité $c_l(Y^{S_k})\geqslant 0$ implique que l'espace Y est localement connexe en dimension k et que l'inégalité $c(Y^{S_k})\geqslant 0$ implique que chaque fonction $h\in Y^{S_k}$ est homotope dans Y à une constante.

Soit p un point de Y. Si $\max|h(t)-p|$ est suffisamment petit, il existe un arc L contenu dans Y^{S_k} unissant la fonction h à la constante p et tel que $\delta(L)<\varepsilon$. Il existe par conséquent une fonction f qui fait correspondre à chaque x de l'intervalle 01 une fonction f_x appartenant à Y^{S_k} de façon que $f_0=h$, $f_1=p$ et que $|f_x-f_1|<\varepsilon$, quels que soit x, donc que $|f_x(t)-p|<\varepsilon$, quels que soient x et t. La fonction g définie par la formule (1) satisfait donc aux conditions:

$$g(t,0)=h(t),\quad g(t,1)=p,\quad |g(t,x)-p|<\varepsilon.$$

Cela signifie que l'espace Y est localement connexe en dimension k au point p (cf. p. 269).

D'autre part, si $c(Y^{S_k})\geqslant 0$, l'existence de l'arc L ne demande aucune hypothèse sur la distance de la fonction h et de la constante p. Le raisonnement précédent montre que h est homotope à p.

7. *Homologies.* *Y étant un espace compact, l'inégalité $c(Y)\geqslant n$ implique que Y est acyclique en dimensions $\leqslant n$* [1]).

En effet, chaque espace compact Y est contenu dans un surespace compact X_k acyclique en dimension k et tel que $\dim(X_k-Y)\leqslant k+1$ [2]). Si l'on admet que $c(Y)\geqslant n\geqslant k$, Y est un rétracte de X_k. Comme rétracte d'un ensemble acyclique en dimension k,

[1]) c. à d. que chaque vrai cycle n-dimensionnel est homologue à 0 dans Y. En particulier, *tous les nombres de Betti de Y de dimensions $\leqslant n$ s'annulent.*

[2]) S. Eilenberg, ce vol. p. 70.

Y est lui-même acyclique en dimension k (d'après un théorème général sur la rétraction des ensembles [1]).

Remarques. 1. *La réciproque serait en défaut* (même pour les polytopes): la „sphère de Poincaré" [2]) est un polytope (à 3 dimensions) dont les nombres de Betti de dimension 0 et 1 s'annulent et qui cependant n'est pas péanien en dimension 1: son groupe fondamental ne s'annule pas.

La propriété d'être péanien en dimensions $k \leqslant n$ est donc plus restrictive que celle d'être acyclique en dimensions $k \leqslant n$.

2. En ce qui concerne *l'inégalité* $c_l(Y) \geqslant n$, M. Borsuk a démontré qu'elle implique que *tous les nombres de Betti de dimensions* $\leqslant n$ *sont finis* [3]).

8. *Contractilité.* En suivant une dénomination de M. Borsuk [4]), il est naturel de nommer un espace métrique séparable Y *contractile dans soi* en dimension n, lorsque chaque sous-ensemble fermé F de dimension n est homotope à un point dans Y. Autrement dit, lorsqu'il existe une fonction continue de deux variables $\varphi(x, t)$ où $x \in F$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, dont les valeurs appartiennent à Y et qui satisfait aux conditions

$$\varphi(x, 0) = x \quad \text{et} \quad \varphi(x, 1) = p, \quad \text{quel que soit } x.$$

L'espace Y est dit *localement* contractile dans soi au point p en dimension n, lorsqu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $\delta(p + F) < \eta$ entraîne l'existence d'une fonction φ satisfaisant aux conditions précédentes ainsi qu'à la suivante: $|\varphi(x, t) - p| < \varepsilon$, quels que soient x et t.

On voit aussitôt que l'homotopie des ensembles est un cas particulier de l'homotopie des fonctions: cas où la fonction considérée est une identité. En conséquence, *l'inégalité* $c_l(Y) \geqslant n$ *entraîne la contractilité locale de* Y *en dimensions* $k \leqslant n$ *et* $c(Y) \geqslant n$ *entraîne la contractilité en dimensions* $k \leqslant n$.

Pour s'en convaincre, on désigne par X le produit cartésien de F et de l'intervalle 01, par A les „bases" de X, c. à d. les ensembles $F \times$ point 0 et $F \times$ point 1, enfin par f la fonction

[1]) K. Borsuk, Fund. Math. 21 (1933), p. 95.

[2]) Rendic. di Palermo 18 (1904).

[3]) Voir *Un théorème sur les groupes de Betti des ensembles localement connexes en toutes les dimensions* $\leqslant n$, ce volume.

[4]) Fund. Math. 19 (1932), p. 235.

qui est une identité sur la base „inférieure" et est identiquement égale à p sur la base „supérieure". En étendant la fonction f sur l'ensemble X tout entier (cf. théor. 1, III), on parvient à la fonction φ demandée.

La réciproque n'est pas vraie: M. Borsuk a défini [1]), en effet, un ensemble contractile et localement contractile dans soi en dimensions 0, 1, 2 qui n'est pas cependant acyclique en dimension 2; à plus forte raison, il n'est pas péanien en dimension 2.

D'après un théorème de M. Borsuk [2]), tout espace compact de dimension finie contractile localement (en toute dimension) est un rétracte de voisinage absolu; si l'on suppose en outre la contractilité intégrale (c. à d. que l'espace tout entier est homotope à un point), l'espace devient un rétracte absolu. On en conclut en vertu du théorème précédent, que — dans le domaine des espaces compacts de dimension finie — *l'inégalité* $c_l(Y) \geqslant \dim Y$ *entraîne* $c_l(Y) = \aleph_0$ *et l'inégalité* $c(Y) \geqslant \dim Y$ *entraîne* $c(Y) = \aleph_0$.

[1]) Ce volume, p. 257, ensemble $\mathfrak{B}$ (2, 3).

[2]) Fund. Math. 19 (1932), p. 240.