

## Sur les superpositions des fonctions continues non décroissantes.

Par

V. Jarník et V. Knichal.

### § 1. Résultats.

Soit  $A$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f(x)$  qui sont définies et continues dans l'intervalle fermé<sup>1)</sup>  $I = (0, 1)$  et dont les valeurs appartiennent à  $I$ . Soit  $B$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f(x)$  de  $A$  non décroissantes (c. à d. telles que  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$  entraîne  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ); soit  $C$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f(x)$  de  $A$  croissantes (c. à d. telles que  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$  entraîne  $f(x_1) < f(x_2)$ ). On a  $C \subset B \subset A$ . Quant à l'ensemble  $A$ , on a les théorèmes suivants<sup>2)</sup>:

**Théorème 1.** *Il existe deux fonctions  $\varphi_1(x) \in A$ ,  $\varphi_2(x) \in A$  telles qu'à chaque fonction  $f(x) \in A$  et à chaque nombre  $\delta > 0$  correspond une fonction  $p(x)$  jouissant des propriétés suivantes:*

1.  $p(x)$  est une superposition finie des fonctions  $\varphi_1(x)$  et  $\varphi_2(x)$ .
2. Pour  $0 \leq x \leq 1$ , on a  $|f(x) - p(x)| < \delta$ .

**Théorème 2.**  *$f_1(x), f_2(x), \dots$  étant une suite donnée de fonctions  $f_n(x) \in A$ , il existe deux fonctions  $\varphi_1(x) \in A$ ,  $\varphi_2(x) \in A$  telles que chaque fonction  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) est une superposition finie de ces deux fonctions  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ .*

<sup>1)</sup>  $(a, b)$  désignera toujours un intervalle fermé.

<sup>2)</sup> V. Jarník et V. Knichal, *Fund. Math.*, t. 24, p. 206—208; c'est à MM. Schreier et Ulam (*Fund. Math.*, t. 23, p. 102—118) et à M. Sierpiński (*Fund. Math.*, t. 23, p. 119—120) que l'on doit les premiers résultats de ce genre.

Nous disons que la fonction  $f(x)$  est une superposition finie des fonctions  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$  ( $k \geq 1$ ), si l'on a  $f(x) = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n(x)$ , où  $n \geq 1$  et où chaque fonction  $\varphi_i(x)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) est identique à une fonction  $f_r(x)$  ( $1 \leq r \leq k$ ).

**Théorème 3.** *On ne peut remplacer, ni dans le théorème 1 ni dans le théorème 2, les mots „deux fonctions  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ “ par les mots „une fonction  $\varphi_1(x)$ “.*

Nous allons résoudre ici le problème analogue, correspondant à l'ensemble  $B$ , à savoir, nous allons démontrer les théorèmes suivants:

**Théorème 4.** *Il existe trois fonctions  $\varphi_1(x) \in B$ ,  $\varphi_2(x) \in B$ ,  $\varphi_3(x) \in B$  telles qu'à chaque fonction  $f(x) \in B$  et à chaque nombre  $\delta > 0$  correspond une fonction  $p(x)$  jouissant des propriétés suivantes:*

1.  $p(x)$  est une superposition finie de ces trois fonctions  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ .
2. Pour  $0 \leq x \leq 1$ , on a  $|f(x) - p(x)| < \delta$ .

**Théorème 5.**  *$f_1(x), f_2(x), \dots$  étant une suite donnée de fonctions  $f_n(x) \in B$ , il existe trois fonctions  $\varphi_1(x) \in B$ ,  $\varphi_2(x) \in B$ ,  $\varphi_3(x) \in B$  telles que chaque fonction  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) est une superposition finie de ces trois fonctions  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ .*

**Théorème 6.** *On ne peut remplacer, ni dans le théorème 4 ni dans le théorème 5, les mots „trois fonctions  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ “ par les mots „deux fonctions  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ “.*

Quant à l'ensemble  $C$ , il nous semble qu'il existe une différence essentielle entre les problèmes en question pour les fonctions non décroissantes et les problèmes analogues pour les fonctions croissantes. Nous ne pouvons pas montrer cette différence dans le cas de l'ensemble  $C$ , qui semble être assez difficile, mais nous pouvons résoudre les problèmes en question pour les ensembles  $B_1$  et  $C_1$  définis de la manière suivante:  $B_1$  est l'ensemble de toutes les fonctions  $f(x) \in B$  qui possèdent une dérivée finie du côté droit  $f^+(x)$  pour  $0 \leq x < 1$  et une dérivée finie du côté gauche  $f^-(x)$  pour  $0 < x \leq 1$ . On obtient la définition de  $C_1$ , en remplaçant  $B$  par  $C$  et  $B_1$  par  $C_1$  dans la définition de  $B_1$ <sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> Pour justifier cette définition un peu artificielle, remarquons que les relations  $f(x) \in B_1$ ,  $g(x) \in B_1$ ,  $h(x) = fg(x)$  entraînent  $h(x) \in B_1$ ; et de même pour  $C_1$ . En effet, soit  $0 \leq x_0 < 1$ ; si  $g(x_0) = x_0 < 1$ , on a  $h^+(x_0) = f^+(x_0)g^+(x_0)$ , comme on le voit en appliquant la démonstration habituelle de la formule analogue pour la dérivée bilatérale; si  $g(x_0) = 1$ , on a  $h(x) = f(1)$  pour  $x_0 \leq x \leq 1$ , d'où  $h^+(x_0) = 0$ ; on a des résultats analogues pour  $h^-(x)$ . La continuité et la monotonie de  $h(x)$  sont évidentes.

Quant à l'ensemble  $B_1$ , on peut démontrer trois théorèmes complètement analogues aux théorèmes 4, 5, 6; nous allons les appeler respectivement „théorèmes 7, 8, 9“; on les obtient des théorèmes 4, 5, 6, en y remplaçant  $B$  par  $B_1$ . Au contraire, pour  $C_1$ , on a le théorème suivant:

**Théorème 10.** *Il existe une suite  $f_1(x), f_2(x), \dots$  de fonctions  $f_n(x) \in C_1$  ( $f_n(0) = 0, f_n(1) = 1$ ) telle qu'il n'existe aucun système fini  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$  jouissant des propriétés suivantes:*

1.  $\varphi_i(x) \in C_1$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ .
2. Chaque fonction  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) est une superposition finie des fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ .

On voit la différence essentielle entre le théorème 8 (concernant l'ensemble  $B_1$ ) et le théorème 10 (concernant l'ensemble  $C_1$ ). Mais, peut-être, il n'est pas inutile de rapprocher encore le théorème 10 à un théorème de MM. Schreier et Ulam (l. c. <sup>2</sup>) que voici: soit  $D$  (resp.  $D_1$ ) l'ensemble de toutes les fonctions  $f(x) \in C$  (resp.  $f(x) \in C_1$ ) pour lesquelles on a  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . Alors il existe cinq fonctions  $\varphi_i(x) \in D$  (resp.  $\varphi_i(x) \in D_1$ ) ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) telles qu'à chaque fonction  $f(x) \in D$  et à chaque  $\delta > 0$  correspond une fonction  $p(x)$  jouissant des propriétés suivantes:

1.  $p(x)$  est une superposition finie des fonctions  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ).
2. Pour  $0 \leq x \leq 1$  on a  $|f(x) - p(x)| < \delta$  <sup>4</sup>

Donc: pour l'ensemble  $D_1$  (et de même pour l'ensemble  $D$ ) on a un théorème „approximatif“ complètement analogue aux théorèmes 1, 4, 7; au contraire, si l'on considère les théorèmes „précis“ 2, 5, 8, on voit — d'après le théorème 10 — que l'on ne peut avoir aucun théorème analogue pour l'ensemble  $D_1$ .

Au lieu de démontrer les théorèmes 6, 9, nous allons démontrer le théorème suivant qui les contient évidemment:

**Théorème 11.** *Posons  $f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, f_3(x) = x$ , pour  $0 \leq x \leq 1$ . Alors les fonctions  $f_i(x)$  jouissent de la propriété suivante:  $g(x), h(x)$  étant deux fonctions quelconques de l'ensemble  $B$ , il existe*

<sup>4</sup>) MM. Schreier et Ulam ont démontré ce théorème pour l'ensemble  $D$ ; pour le cas de l'ensemble  $D_1$ , il faut modifier légèrement la démonstration.

un nombre  $\delta = \delta(g, h) > 0$  et un indice  $i = i(g, h)$  (égal à 1, 2 ou 3) tels que l'on ait

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |p(x) - f_i(x)| \leq \delta$$

pour chaque fonction  $p(x)$  qui est une superposition finie de ces deux fonctions  $g(x), h(x)$ .

Remarquons enfin que les théorèmes 4, 7 sont des conséquences immédiates du théorème 8. Soit, en effet,  $E$  l'ensemble de toutes les fonctions  $f(x)$  jouissant des propriétés suivantes: il existe un nombre entier  $n > 0$  tel que 1.)  $f(k 2^{-n})$  soit un nombre rationnel pour  $k = 0, 1, \dots, 2^n$ ; 2.)  $0 \leq f(k 2^{-n}) \leq f((k+1) 2^{-n}) \leq 1$  pour  $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ ; 3.)  $f(x)$  soit linéaire dans chaque intervalle  $(k 2^{-n}, (k+1) 2^{-n})$  ( $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ ). On a 1.)  $E \subset B_1 \subset B$ ; 2.) si  $f(x) \in B, \delta > 0$ , il existe évidemment une fonction  $\varphi(x) \in E$  telle que  $|f(x) - \varphi(x)| < \delta$  pour  $0 \leq x \leq 1$ . En réarrangeant les fonctions de l'ensemble  $E$  en une suite  $f_1(x), f_2(x), \dots$  et en appliquant à cette suite le théorème 8, on obtient aussitôt les théorèmes 4, 7. Il suffit donc de démontrer les théorèmes 5, 8, 11, 10.

### § 2. Démonstration des théorèmes 5, 8.

**Lemme 1.** *Soit donnée une suite  $f_1(x), f_2(x), \dots$  où  $f_n(x) \in B$  (resp.  $f_n(x) \in B_1$ ) pour  $n = 1, 2, \dots$ . Alors il existe cinq fonctions  $\varphi_i(x) \in B$  (resp.  $\varphi_i(x) \in B_1$ ) ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) telles que <sup>5</sup>*

$$f_n(x) = \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5^{2^n - 2} \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) \text{ pour } n = 1, 2, \dots, 0 \leq x \leq 1.$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{x+1}{2} \text{ pour } 0 \leq x \leq 1; & \varphi_2(x) &= \frac{1}{4}x \text{ pour } 0 \leq x \leq 1; \\ \varphi_3(x) &= 2x \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, & \varphi_3(x) &= 1 \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \\ \varphi_4(x) &= 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, & \varphi_4(x) &= x - \frac{1}{2} \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \\ \varphi_5(x) &= 2^{-(3n-1)}(f_n(2^{2n-1}x-1)+1) \text{ pour } 2^{-(2n-1)} \leq x \leq 2^{-(2n-2)}, n=1,2,\dots; \\ \varphi_5(0) &= 0, \varphi_5(x) \text{ est une fonction linéaire dans chaque intervalle } \\ & (2^{-2n}, 2^{-(2n-1)}) (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

<sup>5</sup>)  $\varphi^n(x)$  est la  $n$ -ième itérée de  $\varphi(x)$ ;  $\varphi^0(x) = x$ .

Remarquons que: 1.) si  $x$  croît de  $2^{-(2n-1)}$  à  $2^{-(2n-2)}$ , alors  $2^{2n-1}x - 1$  croît de 0 à 1; 2.)  $\varphi_5(2^{-2n}) \leq 2 \cdot 2^{-3n-2} < 2^{-3n+1} \leq \varphi_5(2^{-(2n-1)})$ ; 3.) pour  $2^{-2n} \leq x \leq 2^{-2(n-1)}$  on a  $0 < \varphi_5(x) \leq 2^{-3n+2}$ , donc  $\varphi_5^+(0) = 0$ . On a donc  $\varphi_i(x) \in B$  (resp.  $\varphi_i(x) \in B_1$ ) pour  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Soit  $n > 0$  un nombre entier,  $0 \leq x \leq 1$ ; alors on peut raisonner comme il suit:

$$\begin{aligned} \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) &= 2^{-(2n-1)}(x+1), & 2^{-(2n-1)} &\leq \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) \leq 2^{-(2n-2)}; \\ 0 &\leq \varphi_6 \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) = 2^{-(3n-1)}(f_n(2^{2n-1} \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) - 1) + 1) = \\ &= 2^{-(3n-1)}(f_n(x) + 1) \leq 2^{-(3n-2)}; \\ \varphi_3^{3n-2} \varphi_5 \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) &= 2^{3n-2} \varphi_5 \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + 1), \\ \frac{1}{2} &\leq \varphi_3^{3n-2} \varphi_5 \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) \leq 1; \\ \varphi_4 \varphi_3^{3n-2} \varphi_5 \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2} f_n(x); \\ \varphi_3 \varphi_4 \varphi_3^{3n-2} \varphi_5 \varphi_2^{n-1} \varphi_1(x) &= f_n(x). \end{aligned}$$

**Lemme 2.** Soient données cinq fonctions  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_5(x)$  où  $\varphi_n(x) \in B$  (resp.  $\varphi_n(x) \in B_1$ ) pour  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ . Alors il existe trois fonctions  $\psi_i(x) \in B$  (resp.  $\psi_i(x) \in B_1$ ) ( $i = 1, 2, 3$ ) telles que

$$\varphi_n(x) = \psi_2^5 \psi_3 \psi_1 \psi_2^{n-1} \psi_3 \psi_2^{6-n} \psi_1(x) \text{ pour } 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1, \dots, 5.$$

**Démonstration.** Soit

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 2^{-1}(x+1) \text{ pour } 0 \leq x \leq 1; \\ \psi_2(x) &= 4x \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \quad \psi_2(x) = 1 \text{ pour } \frac{1}{4} \leq x \leq 1; \\ \psi_3(x) &= 4(x - 3 \cdot 2^{-12}) \text{ pour } 3 \cdot 2^{-12} \leq x \leq 4 \cdot 2^{-12}, \\ \psi_n(x) &= 2^{-(2n-1)}(\varphi_n(2^{2n-1}x - 1) + 1) \text{ pour } 2^{-(2n-1)} \leq x \leq 2^{-(2n-2)}, \quad n = 1, \dots, 5 \\ \psi_n(0) &= 0, \psi_n(x) \text{ est une fonction linéaire dans l'intervalle } (0, 3 \cdot 2^{-12}) \\ &\text{et dans chaque intervalle } (2^{-2n}, 2^{-(2n-1)}) \quad (n = 1, \dots, 5). \end{aligned}$$

Remarquons que: 1.) si  $x$  croît de  $2^{-(2n-1)}$  à  $2^{-(2n-2)}$ , alors  $2^{2n-1}x - 1$  croît de 0 à 1. 2.)  $\psi_3(2^{-10}) = 2^{-10} < 2^{-9} \leq \psi_3(2^{-9})$ ; pour  $n = 1, 2, 3, 4$  on a  $\psi_3(2^{-2n}) \leq 2^{-2n} < 2^{-(2n-1)} \leq \psi_3(2^{-(2n-1)})$ . On a donc  $\psi_i(x) \in B$  (resp.  $\psi_i(x) \in B_1$ ) pour  $i = 1, 2, 3$ .

Soit maintenant  $n$  un nombre entier,  $1 \leq n \leq 5$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Alors on peut raisonner comme il suit:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\leq 4^{-5}, \quad 6 - n \leq 5, \\ \text{donc } \psi_2^{6-n} \psi_1(x) &= 2^{12-2n-11}(x+1) = 2^{-(2n-1)}(x+1), \\ 2^{-(2n-1)} &\leq \psi_2^{6-n} \psi_1(x) \leq 2^{-(2n-2)}; \\ \psi_3 \psi_2^{6-n} \psi_1(x) &= 2^{-(2n-1)}(\varphi_n(2^{2n-1} \psi_2^{6-n} \psi_1(x) - 1) + 1) = \\ &= 2^{-(2n-1)}(\varphi_n(x) + 1) \leq 2^{-(2n-2)}; \\ \psi_3^{n-1} \psi_3 \psi_2^{6-n} \psi_1(x) &= 2^{-1}(\varphi_n(x) + 1); \\ \psi_1 \psi_3^{n-1} \psi_3 \psi_2^{6-n} \psi_1(x) &= 2^{-12}(\varphi_n(x) + 3), \\ 3 \cdot 2^{-12} &\leq \psi_1 \psi_3^{n-1} \psi_3 \psi_2^{6-n} \psi_1(x) \leq 4 \cdot 2^{-12}; \\ \psi_3 \psi_1 \psi_3^{n-1} \psi_3 \psi_2^{6-n} \psi_1(x) &= 4(\psi_1 \psi_3^{n-1} \psi_3 \psi_2^{6-n} \psi_1(x) - 3 \cdot 2^{-12}) = \\ &= 2^{-10} \varphi_n(x) \leq 4^{-5}, \quad \psi_2^5 \psi_3 \psi_1 \psi_2^{n-1} \psi_3 \psi_2^{6-n} \psi_1(x) = \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Les lemmes 1, 2 sont donc démontrés; les théorèmes 5, 8 en sont des conséquences immédiates.

§ 3. Démonstration du théorème 11.

Soit  $f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, f_3(x) = x$  pour  $0 \leq x \leq 1$ . Supposons qu'il existe deux fonctions  $g(x) \in B, h(x) \in B$  telles qu'à chaque nombre  $\delta > 0$  et à chaque indice  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) correspond une fonction  $p(x)$  qui est une superposition finie des fonctions  $g(x), h(x)$  et telle que

$$(1) \quad |p(x) - f_i(x)| < \delta \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1;$$

il faut en déduire une contradiction.

Désignons par  $S$  l'ensemble de toutes les fonctions que l'on peut former par les superpositions finies à partir de  $g(x), h(x)$ . Soit  $0 < m < 1$ ; si l'on avait  $g(m) \geq m, h(m) \geq m$ , on aurait aussi  $p(m) \geq m$  pour chaque  $p(x) \in S$ <sup>e)</sup>, ce qui est en contradiction avec (1) pour  $x = m, i = 1, \delta = m$ ; si l'on avait  $g(m) \leq m, h(m) \leq m$ , on aurait aussi  $p(m) \leq m$  pour chaque  $p(x) \in S$ , ce qui est en contradiction avec (2) pour  $x = m, i = 2, \delta = 1 - m$ .

Donc: pour chaque  $x$  ( $0 < x < 1$ ) on a ou bien  $g(x) > x > h(x)$ , ou bien  $g(x) < x < h(x)$ . En choisissant la notation d'une manière convenable, on aura  $g\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2} > h\left(\frac{1}{2}\right)$ , donc (en conséquence de la continuité)

<sup>e)</sup> De  $\varphi(x) \in B, \psi(x) \in B, \varphi(m) \geq m, \psi(m) \geq m$  on déduit, en effet, que  $\varphi \psi(m) \geq \varphi(m) \geq m$ .

$$(2) \quad g(x) > x > h(x) \quad \text{pour } 0 < x < 1,$$

d'où

$$(3) \quad g(1) = 1, \quad h(0) = 0.$$

Si l'on avait  $g(0) = 0$ , on aurait (voir (3)) aussi  $p(0) = 0$  pour chaque  $p(x) \in S$ , ce qui est en contradiction avec (1) pour  $x = 0$ ,  $i = 2$ ,  $\delta = 1$ ; donc  $g(0) = \lambda > 0$ . Soit  $0 < \eta < \lambda$ ; il existe une fonction  $p(x) \in S$  telle que

$$(4) \quad |p(x) - f_s(x)| < \eta \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 1,$$

d'où  $p(0) < \eta < \lambda$ ; on a ou bien  $p(x) = h(x)$  ou bien  $p(x) = hp_1(x)$  où  $p_1(x) \in S$ . Dans le premier cas, on a d'après (4)

$$h(1) = p(1) > 1 - \eta;$$

dans l'autre cas, on a

$$h(1) \geq h(p_1(1)) = p(1) > 1 - \eta.$$

Donc  $h(1) > 1 - \eta$  pour chaque  $\eta$  tel que  $0 < \eta < \lambda$ , d'où  $h(1) = 1$ . Mais on a aussi  $g(1) = 1$  (voir (3)), donc  $p(1) = 1$  pour chaque  $p(x) \in S$ , ce qui est en contradiction avec (1) pour  $x = 1$ ,  $i = 1$ ,  $\delta = 1$ . Notre supposition entraîne donc dans tous les cas possibles une contradiction, ce qu'il fallait démontrer.

#### § 4. Démonstration du théorème 10.

Il existe évidemment une suite de nombres réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  telle que la relation

$$\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i = 0 \quad (n > 0 \text{ entier, } k_i \text{ entier pour } i = 1, 2, \dots, n)$$

entraîne  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ . Il existe donc une suite  $f_1(x), f_2(x), \dots$  telle que  $f_n(x) \in C_1$ ,  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(1) = 1$ ,  $f_n^+(0) = e^{\alpha_n}$  pour  $n = 1, 2, \dots$ . Supposons qu'il existe un système fini

$$(5) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x),$$

où  $\varphi_i(x) \in C_1$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ , et tel que chaque fonction  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) soit une superposition finie des fonctions (5). On peut supposer que chaque fonction  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) rentre effectivement dans ces superpositions, c'est-à-dire qu'à chaque nombre entier  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) il correspond un nombre entier  $n \geq 1$  tel que

$$(6) \quad f_n(x) = \psi_1 \psi_2 \dots \psi_r(x) \quad (r \geq 1),$$

où les fonctions  $\psi_j(x)$  sont choisies parmi les fonctions (5) et où l'on a  $\psi_j(x) = \varphi_i(x)$  pour une certaine valeur de l'indice  $j$  (dans le cas contraire, il suffit de supprimer simplement les fonctions  $\varphi_i(x)$  „superflues“). Les fonctions  $\psi_j(x)$  étant croissantes, on voit de (6) que  $\psi_s(0) = 0$  pour  $s = 1, 2, \dots, r$ , d'où (voir la note \*)

$$(7) \quad e^{\alpha_n} = f_n^+(0) = \psi_1^+(0) \cdot \psi_2^+(0) \cdot \dots \cdot \psi_r^+(0),$$

d'où  $\psi_s^+(0) \neq 0$  (donc  $\psi_s^+(0) > 0$ ) pour  $s = 1, 2, \dots, r$ ; on a donc  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $\varphi_i^+(0) > 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ . Posons  $\beta_i = \log \varphi_i^+(0)$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ ; on a d'après (7)

$$\alpha_n = \log f_n^+(0) = \sum_{i=1}^r \log \psi_i^+(0).$$

On a donc pour  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(8) \quad \alpha_n = \sum_{i=1}^k k_{ni} \beta_i,$$

où les  $k_{ni}$  sont des nombres entiers, d'ailleurs non négatifs. Mais des  $k + 1$  premières relations (8) (pour  $n = 1, 2, \dots, k + 1$ ) on déduit, en éliminant les  $\beta_i$ , une relation de la forme

$$\sum_{n=1}^{k+1} l_n \alpha_n = 0,$$

où les nombres entiers  $l_n$  ne sont pas tous égaux à zéro; on obtient ainsi une contradiction et le théorème 10 est démontré.

**Remarques.** 1. On voit aussi que,  $m$  étant un nombre entier quelconque, plus grand que 1, les fonctions  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  ne peuvent pas être représentées par les superpositions finies de  $m - 1$  fonctions de l'ensemble  $C_1$ .

2. On voit aussi que ce n'est que l'existence de la dérivée du côté droit au point  $x = 0$  qui intervient dans la démonstration.