metrischen Räume eingeordnet wurde, die Maximumsaufgabe für ein negativ definites und negativ quasireguläres Problem sich in eine Theorie der negativ fastmetrischen Räume einordnen läßt.

Zum Abschluß heben wir nochmals hervor: Wir brauchen über $F(x, y, x', y')$ hinsichtlich keiner der vier Variablen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zu machen und wir lassen in unseren Extrema-Aussagen für Bogen beliebige koextremale Vergleichsbogen zu, welche keinerlei Differenzierbarkeitseigenschaften haben müssen. Dazu kommt, daß unsere Theorie der fastmetrischen Räume Extrema Aufgaben für Bogenfunktionale zu lösen gestattet, welche bei der Behandlung klassischer Variationsprobleme hinsichtlich des Abstandes $F(p, \vartheta_{pq}) \cdot \overline{pq}$ gar nicht auftreten können. Denn für die klassischen Integrale besitzt diese Funktion der Punktepaare, wie wir sahen, stets eine lineare Symmetrie- und eine lineare Dreiecksfunktion, während die Theorie der fastmetrischen Räume über diesen Spezialfall weit hinausgeht

Insbesondere Konsequenzen dieses letzten Umstandes werden den Gegenstand einer folgenden Abhandlung bilden Im übrigen ist klar, daß eine Ausdehnung der Ergebnisse von Bogen auf *stetige Streckenbilder* (insbesondere eines großen Teiles der von mir in den Math. Annalen 103 entwickelten Theorie der Bogenlänge), ferner eine Ausdehnung auf *räumliche Variationsprobleme*, auf Probleme mit *freien Endpunkten* und mit gewissen *Nebenbedingungen*, sowie auf Integrale der Form $\int_{x_2}^{x_3} F(x, y, y')\, dx$ ziemlich mühelos möglich ist. Aber es ist auch klar, daß für die in den außerordentlich scharfsinnigen Untersuchungen von Tonelli, Hahn und anderen behandelten *semidefiniten* Probleme unsere metrische Methode von Nutzen sein kann, und es ist sogar die Hoffnung nicht unbegründet, daß sie für Variationsprobleme mit *Doppelintegralen* durch Entwicklung einer entsprechenden Theorie des Flächeninhaltes Fortschritte bringen wird.

Wien, im Juli 1935.

Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe.

Par

Pierre Novikoff (Moscou).

Les principaux théorèmes liés à la notion de séparabilité — introduite par M. Lusin dans la théorie des ensembles analytiques — sont les suivants [1]):

Premier principe: Deux ensembles analytiques sans points communs sont toujours séparables au moyen d'ensembles mesurables *B*.

Deuxième principe: Si l'on supprime de deux ensembles analytiques leur partie commune, les parties restantes sont toujours séparables au moyen de complémentaires analytiques.

Ces deux principes ont permis d'étudier un grand nombre de propriétés des ensembles analytiques et de leurs complémentaires; en particulier, ils ont permis de préciser la nature des fonctions implicites mesurables *B*.

C'est pourquoi M. Lusin a attiré l'attention aux problèmes de la séparabilité des ensembles projectifs [2]).

Le but de cette communication est de donner la solution des problèmes en question pour le cas des ensembles projectifs de seconde classe.

[1]) Cf. N. Lusin. *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 155—163, 208—222. Cf. l. c. 222—252 et mon Mémoire *Sur les fonctions implicites mes. B*, Fund. Math. t. 17.

[2]) N. Lusin l. c. p. 289.

Nous appellerons avec M. Lusin ensemble A_n (ou PCA_{n-1}) tout ensemble, situé dans l'espace à n dimensions qui est la projection d'un ensemble CA_{n-1}, situé dans l'espace à $n+1$ dimensions. De même nous appellerons ensemble CA_n le complémentaire d'un ensemble A_n et ensemble B_n tout ensemble qui est un A_n, de même que son complémentaire. Les ensembles mesurables B, ensembles analytiques et leurs complémentaires seront appelés respectivement ensembles B_1, A_1 et CA_1.

M. Lusin a mis en évidence que par rapport à un grand nombre de propositions il y a une analogie profonde entre les ensembles A_n et les ensembles analytiques, les ensembles CA_n et les complémentaires analytiques, enfin entre les ensembles B_n et les ensembles mesurables B.

Nous allons montrer que les principes de séparabilité trouvés par M. Lusin pour les ensembles analytiques et leurs complémentaires cessent d'avoir lieu si l'on y remplace ces ensembles par leurs analogues de la seconde classe des ensembles projectifs.

Au contraire, on obtient des théorèmes vrais si l'on remplace dans les enoncés des principes de séparabilité les termes „ensembles analytiques", „complémentaires analytiques", et „ensembles mesurables B" respectivement par „ensembles CA_2", „ensembles A_2" et „ensembles B_2".

§ 1. Soient C un crible mesurable B situé dans l'espace à $m+1$ dimensions $0x_1x_2...x_my$, $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace $0x_1x_2...x_m$, criblé au moyen de C, $p^y_{x_1^0x_2^0...x_m^0}$ la parallèle à l'axe $0y$ menée par le point $M(x_1^0x_2^0...x_m^0)$ et $R^y_{x_1^0x_2^0...x_m^0}$ l'ensemble des points du crible C situé sur la droite $p^y_{x_1^0x_2^0...x_m^0}$.

Définition. Nous dirons que le crible C est un *crible régulier*, si l'ensemble $R^y_{x_1^0x_2^0...x_m^0}$ possède une partie dense en soi chaque fois que le point $M(x_1^0x_2^0...x_m^0)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ [1]).

Etant donnés deux rectangles, convenons de dire qu'ils sont *équivalents*, s'ils ont la même projection sur l'axe $0x$.

Lemme 1. *Tout ensemble analytique peut être obtenu au moyen d'un crible élémentaire* [2]) *régulier.*

[1]) Cf. ma note des C. R. d'Ac. des Sc. de l'URSS, t. IV, N. 1—2.
[2]) Cf. N. Lusin l. c. pp. 192—193. Ce lemme fut énoncé dans ma note citée.

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble élémentaire situé dans le domaine fondamental I_{xy} et tel que la projection sur l'axe $0Y$ de tous les rectangles de rang n qui le définissent forment une suite ascendante de segments, quel que soit l'entier positif n. Désignons par E la projection de $\mathcal{E}$ sur l'axe $0X$ et par C le crible dit élémentaire, formé par la réunion des faces supérieures de tous les rectangles, qui définissent $\mathcal{E}$. On sait que le crible C définit sur l'axe $0X$ précisément l'ensemble E et que ce dernier peut être un ensemble analytique arbitraire.

On peut supposer que les faces horizontales de tous les rectangles définissant $\mathcal{E}$ sont sans points communs deux à deux.

Pour obtenir le crible désiré, nous allons procéder de la manière suivante: Soit $\pi_n^{(1)}$ un des rectangles de rang 1 et $\pi_m^{(2)}$ un des rectangles de rang 2, contenu dans $\pi_n^{(1)}$. Nous plaçons dans $\pi_n^{(1)}$ une suite ascendante de rectangles, équivalents à $\pi_m^{(2)}$, et s'approchant indéfiniment de la face supérieure de $\pi_n^{(1)}$, nous choisissons ces rectangles de manière qu'ils n'empiètent pas sur les autres rectangles contenus dans $\pi_n^{(1)}$. Puis nous transportons tous les rectangles contenus dans $\pi_m^{(2)}$ dans chacun des nouveaux rectangles en transformant un côté vertical de $\pi_m^{(2)}$ en un côté vertical de chacun de ces derniers par une transformation linéaire conservant la direction positive.

Cette construction étant effectuée pour les rectangles de rang 1, nous procédons avec chacun des rectangles de rang 2 ainsi obtenus de même qu'avec chacun des rectangles $\pi_n^{(1)}$. En général, les nouveaux rectangles $\pi_n^{(k-1)}$ de rang $k-1$ étant construits, nous opérons de même avec chaque rectangle $\pi_j^{(k)}$ de rang k contenu dans $\pi_n^{(k-1)}$. Nous allons montrer que la réunion des faces supérieures de tous les rectangles ainsi obtenus, les rectangles définissant $\mathcal{E}$ y compris, forme un crible C^* régulier qui définit l'ensemble E.

Il est évident que E est contenu dans l'ensemble criblé au moyen de C^*. Pour démontrer que E contient l'ensemble criblé au moyen de C^*, nous remarquons que C^* est un crible élémentaire. Soit $\mathcal{E}^*$ l'ensemble élémentaire correspondant. Soit encore π_n un des rectangles définissant $\mathcal{E}$, qui ne contient aucun point de cet ensemble ayant l'abscisse x_0. Il est évident que tous les rectangles définissant $\mathcal{E}^*$, multipliés par π_n, auront la même propriété. Donc il ne peut exister de points de l'ensemble $\mathcal{E}^*$ que sur des parallèles à l'axe $0Y$ qui possèdent des points de $\mathcal{E}$. Donc E est précisément l'ensemble criblé au moyen de C^*. Pour voir que C^* est un crible régulier, il suffit de démontrer que sur toute parallèle à l'axe $0Y$ possédant des points de $\mathcal{E}$, le crible C^* n'est pas clairsemé. En effet, soit η l'ensemble des points de C^*, situé sur la droite $x = x_0$, produit par tous les rectangles contenant le point $M(x_0 y_0)$ de $\mathcal{E}$. Il est évident que l'ensemble η n'a pas de points isolés, car le point de cet ensemble situé sur la face de π_m est limite des points situés sur les faces des rectangles de rang supérieur à celui de π_m.

Il s'en suit que η est dense en soi. Donc C^* est régulier. Il est évident que tous les raisonnements subsistent dans le cas d'un crible à m dimensions, quel que soit l'entier positif m.

§ 2. Nous allons introduire maintenant la notion d'indice minimal. Soit C un crible mesurable B, situé dans le domaine fondamental à trois dimensions $0XYZ$, qui définit un ensemble analytique E situé dans le plan $0XY$.

Désignons par C_{x_0} la partie du crible C située dans le plan $x = x_0$. Soit E_{x_0} l'ensemble criblé au moyen de C_{x_0} et $\mathcal{E}_{x_0}$ le complémentaire de E_{x_0} par rapport à la parallèle à l'axe $0y$ menée par le point $M(x_0, 0, 0)$. Désignons par $\mathcal{E}_{x_0\alpha}$ les constituantes de $\mathcal{E}_{x_0}$, définies au moyen du crible C_{x_0}.

Il y a deux cas à distinguer suivant que $\mathcal{E}_{x_0}$ est vide ou non. Dans le premier cas, le point x_0 appartient au complémentaire de la projection du complémentaire analytique CE sur l'axe $0x$. Dans le deuxième cas, soit β le plus petit nombre fini ou transfini tel que la constituante $\mathcal{E}_{x_0\beta}$ est non vide. Dans ce cas le point x_0 appartient à la projection du complémentaire analytique CE sur l'axe $0x$.

Définition. Dans le premier cas *l'indice minimal du crible C au point x_0* est égal à Ω. Dans le deuxième cas cet indice est égal à β.

L'indice minimal du crible C au point x sera désigné par μ_x^C.

Nous dirons que deux cribles C_1 et C_2 sont sans indices communs, si $\mathcal{E}_\alpha^1$ et $\mathcal{E}_\alpha^2$ étant les constituantes extérieures définies par ces cribles, l'un de ces ensembles au moins ne contient aucun point, quel que soit le nombre α. Etant donnés deux cribles C_1 et C_2 situés dans le cube fondamental et définissant les ensembles analytiques E_1 et E_2, on peut les remplacer par deux cribles sans indices communs. A cet effet il suffit de transformer les cribles C_1 et C_2 au moyen d'une homographie en deux cribles situés dans le parallèlepipède ($0 < x < 1$; $0 < z < 1/2$; $0 < y < 1$), ajouter au premier le plan $z = 3/4$ et au second les plans $z = 1 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

Lemme II. *Etant donnés deux cribles réguliers à trois dimensions C_1 et C_2 sans indices communs, situés dans l'espace $0XYZ$, l'ensemble des points x où l'indice minimal du crible C_1 est supérieur à l'indice minimal du crible C_2 est un ensemble A_2 de M. Lusin.*

Démonstration. Soit $W_{C_1C_2}$ l'ensemble des points de l'axe $0x$ où l'indice $\mu_x^{C_1}$ est inférieur à l'indice $\mu_x^{C_2}$.

Considérons l'espace à 4 dimensions $0XYZT$.

Plaçons dans l'espace $0XZT$ un crible C_2^* géométriquement identique au crible C_2 (l'axe $0T$ jouant le rôle de l'axe $0Y$) [1]. Soit $\overline{C}_1$ l'ensemble des points situés sur toutes les droites parallèles à l'axe $0T$ et passant par les points appartenant à C_1.

De même, soit $\overline{C}^*$ l'ensemble des points situés sur toutes les droites parallèles à l'axe $0Y$ et passant par les points de C_2^*.

Nous allons considérer les ensembles $\overline{C}_1$ et $\overline{C}_2^*$ comme cribles à 4 dimensions, qui définissent deux ensembles analytiques dans l'espace $0XYT$. Désignons par $d^z_{x_0 y_0 t_0}$ la droite parallèle à l'axe $0Z$, passant par le point $N(x_0\, y_0\, t_0)$ de l'espace XYT, et par $d^z_{x_0 y_0}$ la droite parallèle à l'axe $0Z$ menée par le point $M(x_0\, y_0)$ du plan $0XY$. On voit que l'ensemble $d^z_{abt}\overline{C}_1$ est géométriquement identique à l'ensemble $d^z_{ab}C_1$, quel que soit t, et l'ensemble $d^z_{ayb}\overline{C}_2^*$ — à l'ensemble $d^z_{ab}C_2$, quel que soit y.

Soit U l'ensemble des points de l'espace $0XYT$ tels que l'indice du crible $\overline{C}_1$ est inférieur à l'indice du crible $\overline{C}_2^*$. L'ensemble U est un complémentaire analytique [2]).

Soit V le complémentaire de la projection du complémentaire de U sur le plan $0XY$. V est encore un complémentaire analytique.

Nous allons montrer que la projection V sur l'axe $0x$, qui est manifestement un ensemble A_2, coïncide avec l'ensemble $W_{C_1C_2}$ précédemment défini. On voit que V est formé des points du plan $0XY$ tels que les parallèles à l'axe $0T$ menées par ces points sont entièrement contenues dans U.

[1]) On effectue à ce but la transformation $x' = x$, $y' = t$, $z' = z$.

[2]) Cf. M. N. Lusin, l. c. pp. 213–215.

Donc la projection de V sur l'axe $0x$ est formée des points x_0 pour lesquels il existe un point $M(x_0\, y_0)$ tel que la parallèle à l'axe $0x$, menée par ce point est contenue dans U. Par suite l'indice minimal du crible C_1 en un tel point est inférieur à l'indice minimal du crible C_2 au même point. D'ailleurs ce dernier est égal au minimum de l'indice du crible $\overline{C}_2^*$ dans le plan parallèle au plan $0YT$ passant par le point x_0. On voit ainsi que la projection de V coïncide avec $W_{C_1C_2}$.

Théorème I. *Deux ensembles du type CA_2 sans point commun sont toujours séparables au moyen de deux ensembles du type B_2.*

Démonstration: Soient E_1 et E_2 deux ensembles CA_2 sans point commun situés dans le domaine fondamental. Considérons les complémentaires analytiques plans R_1 et R_2 dont les projections sur l'axe $0x$ sont respectivement CE_1 et CE_2. Les ensembles CR_1 et CR_2 sont criblés au moyen des cribles réguliers mesurables B à trois dimensions C_1 et C_2. Nous pouvons supposer que les cribles C_1 et C_2 sont sans indices communs. Soit $W_{C_1C_2}$ l'ensemble des points du domaine fondamental tels que l'indice minimal du crible C_1 est supérieur à l'indice minimal du crible C_2; soit, d'une façon analogue, $W_{C_2C_1}$ l'ensemble des points du domaine fondamental où l'indice minimal de C_2 est supérieur à l'indice minimal de C_1.

Les ensembles $W_{C_1C_2}$ et $W_{C_2C_1}$ sont des ensembles A_2 d'après le lemme précédent. Il est évident que ces ensembles sont sans points communs. En outre $W_{C_2C_1}$ est le complémentaire de $W_{C_1C_2}$, car il ne peut exister aucun point x où les indices minimaux des cribles C_1 et C_2 sont égaux, les cribles C_1 et C_2 étant sans indice commun. On voit immédiatement que E_1 est contenu dans $W_{C_1C_2}$, car les points de E_1 sont ceux où l'indice minimal de C_1 est Ω. De même E_2 est contenu dans $W_{C_2C_1}$.

Il en résulte que les ensembles $W_{C_1C_2}$ et $W_{C_2C_1}$ sont des ensembles B_2 et ils effectuent la séparation des ensembles E_1 et E_2.

Théorème II. *Si l'on supprime de deux ensembles CA_2 leur partie commune, les parties restantes sont toujours séparables au moyen d'ensembles A_2.*

Démonstration: La construction des ensembles séparateurs $W_{C_1C_2}$ et $W_{C_2C_1}$ est la même que dans le théorème précédent. D'après le lemme fondamental, ce sont des ensembles A_2.

Théorème III. *Si l'on supprime de deux ensembles A_2 leur partie commune, les parties restantes sont toujours séparables au moyen d'ensembles A_2.*

La démonstration est la même que celle du théorème II.

Théorème IV. *Il existe deux ensembles A_2 sans points communs qui ne sont pas séparables au moyen d'ensembles B_2.*

Démonstration: Il est bien connu qu'il n'existe pas d'ensemble B_2 plan universel pour tous les ensembles B_2 linéaires [1]). Considérons un couple d'ensembles CA_2 doublement universel; supprimons-en leur partie commune et appliquons aux parties restantes le théorème II. Soit H_1 et H_2 les ensembles séparateurs de ces parties restantes. H_1 et H_2 sont des ensembles A_2. Il est évident que ces ensembles ne peuvent être séparables B_2, car les ensembles séparateurs seraient des ensembles B_2 plans universels pour tous les ensembles B_2 linéaires.

Théorème V. *Si E_1 et E_2 sont deux ensembles sans point commun et dont chacun est la différence de deux ensembles A_2 et si E_1 et E_2 sont séparables au moyen d'ensembles A_2, alors E_1 et E_2 sont des ensembles qu'on obtient en supprimant des deux ensembles A_2 leur partie commune.*

Pour démontrer ce théorème, il n'y a qu'à répéter le raisonnement au moyen duquel M. Lusin a demontré l'inversion du deuxième principe [2]).

Théorème VI. *A chaque système $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ d'ensembles CA_2 tel que $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \dots = 0$, correspond un système $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ d'ensembles B_2 tel que l'ensemble H_n renferme E_n et que $H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_n \cdot \dots = 0$.*

Démonstration: Nous pouvons supposer que les cribles $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ mesurables B définissant les complémentaires analytiques, dont les projections sont les complémentaires des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, sont sans indices communs deux à deux. A cet effet, il suffit de placer au-dessus du crible C_n une suite ascendante du type ω^n de rectangles dont chacun a pour projection sur le plan $0XY$

[1]) Cf. la Note de M. Sierpiński dans le livre cité de M. Lusin.

[2]) Cf. N. Lusin, l. c. pp. 217—219.

le carré fondamental. Pour simplifier le langage, nous conservons pour ces nouveaux cribles leurs anciennes notations. Soit V_{C_n} l'ensemble des points où l'indice du crible C_n est inférieur à tous les indices des cribles C_m, $m \neq n$. D'après le lemme fondamental, tous les ensembles V_{C_n} sont des ensembles A_2. Il est évident que ces ensembles sont sans point commun deux à deux et que leur somme est le domaine fondamental tout entier. Donc tous ces ensembles sont des ensembles B_2. On aperçoit immédiatement que l'ensemble CV_{C_n} renferme E_n, quel que soit n, et que $\prod_{n=1}^{\infty} CN_{C_n} = 0$, c. q. f. d.

Théorème VII. *Si l'on supprime d'une infinité d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ du type CA_2 leur partie commune, les parties restantes sont toujours multiplement séparables au moyen d'ensembles A_2.*

Démonstration: Nous allons conserver les notations du théorème précédent, ainsi que l'hypothèse, que les cribles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ sont sans indices communs deux à deux. Soit U_{C_n} l'ensemble des points où l'indice du crible C_n est supérieur (égalité étant exclue) à l'indice de l'un au moins des cribles C_m $(m \neq n)$. D'après le lemme fondamental, U_{C_n} est un ensemble A_2. Evidemment

$$E_n - \prod_{n=1}^{\infty} E_n \subset U_{C_n} \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} U_{C_n} = 0.$$

Homotopie, Homologie und lokaler Zusammenhang.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

Dem Andenken meines Lehrers Hans Hahn in dankbarer Verehrung gewidmet.

In der topologischen Forschung der letzten Zeit spielt eine ausserordentlich wichtige Rolle der Begriff des höherstufigen lokalen Zusammenhanges — eine Verallgemeinerung der klassischen Begriffsbildung von Hahn und Mazurkiewicz.

Man kann den höherstufigen lokalen Zusammenhang auf zweierlei Weise einführen, je nachdem man vom mengentheoretischen Begriff der *Homotopie* oder vom kombinatorischen Begriff der *Homologie* ausgeht.

Auf den ersten Standpunkt stellt sich Lefschetz [1]) und definiert einen Raum R als *lokal zusammenhängend bis zur n-ten Ordnung* $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, wenn es zu jedem Punkt p von R und zu jeder Umgebung U von p eine Umgebung V von p gibt, so dass jedes in V liegende stetige Bild der m-Sphäre $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sich in U in einen Punkt zusammenziehen lässt.

Dem zweiten Standpunkt entspricht die Definition von Alexandroff [2]) und Čech [2a]), die aus der Lefschetz'schen entsteht, wenn man Sphärenbilder durch Zykeln und Homotopien durch Homologien ersetzt [2b]).

[1]) *Topology* (1920), p. 91, Vgl. auch Ann. of Math. 35, p. 119 und C. Kuratowski, Fund. Math. 24, p. 269.

[2]) Ann. of Math. 36, p. 1 [vgl. auch Ann. of Math. 30 (1928), p. 81, Fussnote [63])].

[2a]) Vgl. Comp. Math. 2, p. 1—25.

[2b]) Wie ich erfahre, waren beide Begriffe des lokalen Zusammenhanges Alexander bekannt.