denumerable" [1]). Die beiden ersten Argumente genügten namentlich, um den Nachweis transzendenter Zahlen vom intuitionistischen Standpunkt aus wertlos zu machen, der nur Konstruktionen und keine reinen Existenzbeweise anerkennt.

Demgegenüber ist hervorzuheben: *der Nachweis transzendenter Zahlen durch das Diagonalverfahren erfolgt auf streng konstruktivem Weg, und er ist sinnvoll und beweiskräftig für jeden (auch intuitionistischen) Standpunkt, der überhaupt einer der üblichen Zuordnungsregeln zwischen den algebraischen und den natürlichen Zahlen einen Sinn zuerkennt.*

In der Tat: Bleiben wir bei der oben auseinandergesetzten Auffassung, wonach eine reelle Zahl gegeben — und zwar offenbar konstruktiv gegeben — ist, sobald eine Regel vorliegt, die ihre Dezimalbruchentwicklung so weit als gewünscht zu bilden gestattet! (Der geläufigeren Vorstellung und Ausdrucksweise wegen ist hier $n=10$ genommen. Ebenso beschränken wir uns der Bequemlichkeit halber auf *reelle* algebraische und transzendente Zahlen.) Es liege nun eine — z. B. die Cantorsche — Zuordnungsregel zwischen den algebraischen und den natürlichen Zahlen vor; für jede algebraische Zahl, die durch die zugehörige irreduzible algebraische Gleichung und z. B. eine zusätzliche Größenkennzeichnung (unter den endlich vielen Wurzeln der Gleichung) gegeben sei, kann ihre Platznummer vermöge der Zuordnungsregel in endlich vielen Schritten ermittelt, andererseits ihre Dezimalbruchentwicklung bis zu jeder gewünschter Stelle berechnet werden. So ist die r^{te} Dezimalstelle der r^{ten} algebraischen Zahl unserer Abzählung eine wohlbestimmte, berechenbare Ziffer c_r zwischen 0 und 9, die Grenzen eingeschlossen. Wenn wir also, wie in Nr. 1, einen eindeutig bestimmten, Stelle für Stelle berechenbaren Dezimalbruch durch eine Regel angeben, die die r^{te} Ziffer d_r als von c_r verschieden festsetzt, so erhalten wir eine reelle Zahl, die konstruktiv festgelegt und von *jeder* algebraischen Zahl verschieden ist. Wir haben damit eine ganz bestimmte transzendente Zahl konstruiert, wenn auch freilich die Ziffernfolge ihrer Dezimalbruchentwicklung nicht anschaulich übersehbar ist. Die in (D) (Beginn von Nr. 1) besprochene abzählbare Menge ist hier die Menge der algebraischen Zahlen.

[1]) Bridgman, loc. cit. p. 233. Gemeint ist offenbar, daß die Menge der algebraischen *und* der transzendenten Zahlen abzählbar sei, oder jedenfalls Anderes nicht nachgewiesen werden könne.

Jerusalem, Hebrew University, Einstein Institute of Mathematics.

Contribution à la topologie des polytopes.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

La formule bien connue due aux MM. S. Lefschetz et H. Hopf, concernant le nombre des points invariants des transformations continues [1]) implique que chaque polytope P dont les nombres de Betti [2]) remplissent l'égalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(P) = 1 \tag{1}$$

contient un point invariant par rapport à toute transformation continue en son sous-ensemble.

Les théorèmes sur la décomposition des polytopes que je vais démontrer dans cette Note nous permettrons de prouver que dans le cas des polytopes situés dans l'espace euclidien troisdimensionnel R_3 l'égalité (1) est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour l'existence d'un point invariant par rapport à toute transformation continue en sous-ensemble.

Théorème 1. *Chaque polytope* [3]) *connexe P de dimension $\leqslant n$ se laisse décomposer en deux polytopes P_1 et P_2 dont le premier*

[1]) Voir S. Lefschetz, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), p. 1—49 et H. Hopf, Math. Zeitschr. 29 (1929), p. 493—524. Comp. aussi S. Lefschetz, Topology, New York 1930, p. 359.

[2]) Quant à la définition des nombres de Betti voir p. ex. le livre cité de M. Lefschetz, p. 34—35 (pour les polytopes) et p. 324—334 (pour les espaces compacts arbitraires). Le nombre de Betti de dimension k d'un espace compact E sera désigné ici par $p_k(E)$.

[3]) La thèse du théorème 1 serait en défaut pour les espaces un peu plus généraux que les polytopes, p. ex. pour les continus localement contractiles. Il existe,

remplit les conditions: $p_n(P_1)=0$; $p_i(P_1)=p_i(P)$ *pour* $i\neq n$ *et le deuxième est contractile dans soi* [4]).

Démonstration. Admettons que le polytope P est donné sous la forme d'un complexe géométrique K, c. à d. décomposé en simplexes, et désignons par m le nombre de simplexes n-dimensionnels de K. Si dans K il n'existe, sauf le cycle zéro, aucun cycle à n dimensions aux coefficients rationnels (ce qui a lieu toujours dans le cas $m=0$), la thèse de notre théorème est remplie déjà par les polytopes $P_1=P$ et P_2 ne contenant qu'un seul point étant sommet de P. Nous procédons maintenant par induction en admettant que $m=m_0+1$ et qu'il existe dans le cas $m\leqslant m_0$ les polytopes P_1 et P_2 remplissant, outre la thèse de notre théorème, la condition que P_1 contienne tous les simplexes de dimension $<n$ de K. Nous pouvons admettre en outre qu'il existe dans K un cycle n-dimensionnel $C^{(n)}$ aux coefficients rationnels et un simplexe géométrique n-dimensionnel $\varDelta$ de K qui figure (après lui avoir donné une orientation) dans $C^{(n)}$ avec un coefficient différent de 0.

Désignons par P' le polytope qu'on obtient de P en enlevant l'intérieur du simplexe $\varDelta$. Le polytope P' ainsi défini est donné sous la forme d'un sous-complexe K' de K contenant m_0 simplexes de dimension n et tous les simplexes de dimension $<n$ de K.

Nous allons maintenant démontrer que P' remplit en outre la condition $p_i(P')=p_i(P)$ pour $i\neq n$. Tous les cycles dans K à $i<n$ dimensions étant des cycles dans $K'\subset K$, il suffit à ce but de prouver que pour chaque complexe (algébrique, aux coefficients rationnels) Q de K il existe dans K' un complexe (algébrique) Q' dont la frontière $\dot{Q}'$ est égale à la frontière $\dot{Q}$ de Q. En tenant compte du fait que la frontière du simplexe $\varDelta$ (dont on a donné une orientation) se laisse exprimer à l'aide de la relation $\dot{C}^{(n)}=0$ comme

notamment, même dans R_3, des continus localement contractiles ayant le premier nombre de Betti égal à 0 et le deuxième égal à 1, qui ne se laissent pas décomposer en un nombre fini (ou même dénombrable) de ses vrais sous-ensembles fermés ayant pour le premier nombre de Betti 0. On obtient un tel exemple par une légère modification de l'exemple qui se trouve dans la note de M. S. Mazurkiewicz et de moi, C. R. 199 (1934), p. 110—112.

[4]) L'espace E est dit contractile dans soi, lorsqu'il existe une fonction $\varphi(x,t)$ définie pour $x\in E$ et $0\leqslant t\leqslant 1$, continue pour les deux variables x et t à la fois et remplissant les conditions: $\varphi(x,0)=x$; $\varphi(x,t)\in E$ et $\varphi(x,1)=\text{const.}$ quels que soient $x\in E$ et $0\leqslant t\leqslant 1$.

la frontière d'un complexe (algébrique) R situé dans K', on obtient le complexe demandé Q' en remplaçant dans Q le simplexe $\varDelta$ (orienté) par le complexe R.

L'égalité $p_i(P')=p_i(P)$ pour $i\neq n$ étant ainsi démontrée, il existe par hypothèse une décomposition de P' en deux polytopes P_1' et P_2', dont le premier remplit les conditions

(2) $$p_n(P_1')=0,\quad p_i(P_1')=p_i(P)\quad \text{pour}\quad i\neq n,$$

en contenant, en outre, tous les simplexes de dimension $<n$ du complexe K', donc aussi tous les simplexes de dimension $<n$ du complexe K, et le deuxième et contractile dans soi.

Envisageons maintenant un petit simplexe n-dimensionnel $\varDelta_0$ situé tout entier dans l'intérieur du simplexe $\varDelta$. Désignons par T le polytope qu'on obtient de $\varDelta$ en enlevant l'intérieur du simplexe $\varDelta_0$ et par L une ligne simple brisée contenue dans P dont les extrémités a et b appartiennent l'une à $\varDelta_0$ et l'autre à P_2' et dont tous les autres points sont placés en dehors de $P_2'+\varDelta_0$.

Posons:

(3) $$P_1=P_1'+T;\quad P_2=P_2'+L+\varDelta_0.$$

On peut, bien entendu, contracter $\varDelta_0$ dans soi vers le point a par une déformation qui laisse ce point immobile et ensuite contracter la ligne brisée L vers b, en laissant b immobile. Par cette opération P_2 sera déformé en P_2', c. à d. en un polytope contractile dans soi. Les formules (3) entraînent en outre que $P_1+P_2=P$ et que P_1 contient tous les simplexes de dimension $<n$ de K. Pour achever notre démonstration il suffit donc, d'après les formules (2), de prouver que les nombres de Betti du polytope P_1 sont égaux à ceux du polytope P_1'. A ce but, désignons par c le centre de gravité de $\varDelta_0$ et par x^*, pour tout $x\in T$, la projection de x du centre c sur la frontière $\dot{\varDelta}$ du simplexe $\varDelta$. Posons, pour $0\leqslant t\leqslant 1$:

$\varphi(x,t)=$ point du segment $\overline{xx^*}$ remplissant la condition

$$\varrho(x,\varphi(x,t))=t\cdot\varrho(x,x^*),$$

si $x\in T$ et

$$\varphi(x,t)=x$$

si $x\in P_1'$.

Il est évident que la fonction $\varphi(x, t)$ ainsi définie fait une déformation continue de l'ensemble P_1 dans soi, en le transformant pour $t=1$ en $P_1'+\dot{\Delta}=P_1'$ (puisque P_1' contient tous les simplexes $(n-1)$-dimensionnels de K) et en laissant tous les points de P_1' immobiles pour tout $0\leqslant t\leqslant 1$. Il en résulte [5]) que tous les nombres de Betti de P_1 sont égaux à ceux de P_1', c. q. f. d.

Remarque. Dans le cas où $n=2$ et $p_1(P)=0$, les nombres de Betti du polytope P_1 de la thèse du théorème 1 sont égaux à ceux du polytope P_2 contractile dans soi. On ne peut pas cependant affirmer qu'il existe dans ce cas une décomposition de P en deux polytopes contractiles dans soi, même si le polytope P est acyclique en dimension 1 (c. à d. que tous les cycles 1-dimensionnels situés dans P aux coefficients quelconques sont les frontières des complexes algébriques situés dans P). Ainsi p. ex. le polytope P qu'on obtient de l'espace bien connu de Poincaré [6]) Π, en enlevant tous les points intérieurs des simplexes 3-dimensionnels d'une décomposition simpliciale de Π, est acyclique en dimension 1, mais son groupe fondamental contient plus d'un élément. Il n'existe donc [7]) aucune décomposition de P même en deux polytopes contractiles dans P.

Théorème 2. *La thèse du théorème 1 reste valable pour tous les polytopes connexes situés dans un espace euclidien à $(n+1)$-dimensions R_{n+1}.*

Démonstration [8]). Admettons que le polytope P est donné sous la forme d'un complexe géométrique K à m simplexes de dimension $n+1$. La thèse du théorème 2 étant vraie (d'après le théorème 1) dans le cas $m=0$, nous pouvons procéder par induction en admettant que $m=m_0+1$ et que pour $m\leqslant m_0$ il existe la décomposition en question. Il résulte de nos hypothèses l'existence d'un simplexe $(n+1)$-dimensionnel $\Delta^{(n+1)}$ ayant une face n-dimensionnelle $\Delta^{(n)}$ contenue dans la frontière de P (frontière relative à R_{n+1}). On constate sans peine que pour un point $a\in R_{n+1}-P$ situé suffisamment près du centre de gravité du simplexe $\Delta^{(n)}$, chaque demi-droite $\overrightarrow{ax}$, où $x\in\Delta^{(n+1)}$, coupe $\Delta^{(n+1)}$ le long d'un segment $L(x)$ (qui peut se réduire à un seul point) dont une extrémité est située sur $\Delta^{(n)}$ et l'autre, que nous désignons par x^*, sur les autres faces n-dimensionnelles de $\Delta^{(n+1)}$ et que $L(x)$ coïncide avec la partie commune du segment $\overline{ax}^*$ et du polytope P. Pour deux points x_1 et x_2 de $\Delta^{(n+1)}$ les segments $L(x_1)$ et $L(x_2)$ sont, bien entendu, identiques ou disjoints. Posons, pour tout $0\leqslant t\leqslant 1$:

$\psi(x, t)=$ point du segment $L(x)$ remplissant l'égalité

$$\varrho(x, \psi(x, t))=t\cdot\varrho(x, x^*),$$

si $x\in\Delta^{(n+1)}$ et

$$\psi(x, t)=x,$$

si $x\in P-\Delta^{(n+1)}$.

La fonction ψ ainsi définie constitue, comme on vérifie facilement, une déformation continue du polytope P dans soi, en le rétractant [9]) pour $t=1$ en polytope P', qu'on obtient de P en enlevant les points intérieurs des simplexes $\Delta^{(n+1)}$ et $\Delta^{(n)}$. Il en résulte [5]) que les nombres de Betti de P' sont égaux à ceux de P. Par conséquent, le polytope P' satisfait aux prémisses de notre théorème en admettant par sa définition, une décomposition simpliciale renfermant m_0 simplexes de dimension $n+1$. En vertu de notre hypothèse, il existe une décomposition de P' en deux polytopes P_1' et P_2' dont le premier remplit les conditions (2) et le deuxième est contractile dans soi.

Désignons maintenant par P_i (où $i=1, 2$) la somme du polytope P_i' et de tous les segments $L(x)$ tels que $x^*\in P_i'$. L'ensemble $P_i'\cdot\Delta^{(n+1)}$ étant — comme partie commune de deux polytopes — un polytope, la somme des segments en question, et parsuite l'ensemble P_i tout entier, sont aussi des polytopes. En outre, il est évident que la fonction $\psi(x, t)$ (n'envisagée que pour $x\in P_i$ et $0\leqslant t\leqslant 1$) constitue une déformation continue du polytope P_i dans soi et que $\psi(x, 1)$ est une fonction rétractante [9]) P_i en P_i'. Par conséquent [5]) les nombres de Betti de P_1 sont égaux à ceux de P_1' d'où, selon (2):

$$p_n(P_1)=0, \quad p_i(P_1)=p_i(P) \quad \text{pour} \quad i\neq n.$$

[5]) Fund. Math. 21 (1933), p. 91—92.

[6]) On comprend par un espace de Poincaré une variété à trois dimensions, dont toutes les propriétés de l'homologie coïncident avec celles d'une surface sphérique euclidienne à trois dimensions, mais dont le groupe fondamental contient plus d'un élément.

[7]) Cf. C. R. 198 (1934), p. 1732, th. V.

[8]) La même démonstration reste valable dans le cas plus général, où, au lieu de supposer que $P\subset R_{n+1}$, on suppose seulement que le polytope P est un vrai sous-ensemble d'une pseudovariété quelconque à $n+1$ dimensions.

[9]) Un sous-ensemble A d'un espace E s'appelle rétracte de M, lorsqu'il existe une fonction f (fonction rétractante E en A) transformant E en A d'une manière continue et telle que $f(x)=x$ pour tout $x\in A$. Si pour tout espace $E\supset A$ l'ensemble A est un rétracte de E, alors A s'appelle rétracte absolu.

Le polytope P_2 étant — comme déformable dans soi en l'ensemble P_2' — contractile dans soi, on en déduit que la décomposition de P en P_1 et P_2 est de la forme demandée, c. q. f. d.

En tenant compte du théorème [10]), d'après lequel tout polytope P situé dans l'espace euclidien 3-dimensionnel R_3 et remplissant la condition $p_2(P)=p_1(P)=p_0(P)-1=0$ est contractile dans soi, on parvient du théorème 2 au

Corollaire. *Chaque polytope connexe situé dans R_3 et dont le premier nombre de Betti disparait se laisse décomposer en deux polytopes contractiles dans soi.*

Pour prouver le dernier théorème de cette note, nous démontrerons d'abord le simple lemme suivant

Lemme. *Toute fonction continue f transformant la partie commune de deux rétractes absolus [9]) A et B en son sous-ensemble se laisse prolonger sur l'ensemble $A+B$ tout entier de façon que la fonction prolongée f' est continue, ses valeurs appartiennent à $A+B$ et qu'elle n'admet aucun point invariant dans l'ensemble $(A+B)-A\cdot B$.*

Démonstration. Les ensembles A et B étant des rétractes absolus, il existe [11]) un prolongement continu f_1 de f sur l'ensemble A dont les valeurs appartiennent à B et un prolongement continu f_2 de f sur l'ensemble B dont les valeurs appartiennent à A. La fonction f' définie par les formules

$$f'(x)=f_1(x) \quad \text{pour tout} \quad x\in A,$$
$$f'(x)=f_2(x) \quad \text{pour tout} \quad x\in B$$

remplit, comme on vérifie aisément, la thèse de notre lemme.

Théorème 3. *Pour qu'un polytope P situé dans l'espace euclidien 3-dimensionnel se laisse transformer en son sous-ensemble d'une façon continue et sans points invariants, il faut et il suffit qu'il remplisse la condition $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(P)\geqslant 2$.*

Démonstration. La nécessité de la condition étant une conséquence immédiate de la formule générale de MM. Lefschetz

[10]) Monatsh. f. Math. u Phys. 41 (1934), p. 78.

[11]) Fund. Math. 17 (1931), p. 157.

et Hopf [12]), il ne reste qu'à démontrer sa suffisance. En tenant compte du fait évident que chaque ensemble non connexe se laisse transformer sans points invariants en son sous-ensemble par une fonction continue, et du théorème [13]) d'après lequel cela a lieu aussi pour tous les continus péaniens dont le premier nombre de Betti est positif, il reste seulement à prouver qu'il existe pour un polytope $P\subset R_3$ remplissant la condition

$$p_0(P)=p_1(P)+1=1\leqslant p_2(P)$$

une fonction continue transformant P en un sous-ensemble sans points invariants. D'après le corollaire du théorème 2 il existe une décomposition de la forme $P=P_1+P_2$, où P_1 et P_2 sont des polytopes contractiles dans soi. En tenant compte de la formule bien connue [14]), concernant la relation entre les propriétés de la homologie des polytopes P_1, P_2, P_1+P_2 et $P_1\cdot P_2$, on parvient à la relation $p_1(P_1\cdot P_2)=p_2(P)\geqslant 1$. Il en résulte [13]) l'existence d'une fonction continue f transformant $P_1\cdot P_2$ en sous-ensemble sans points invariants. Les polytopes P_1 et P_2 étant contractiles dans soi, donc des rétractes absolus [15]), on conclut d'après notre lemme que la fonction f se laisse prolonger sur l'ensemble $P=P_1+P_2$ de façon que le prolongement f' transforme l'ensemble P en sous-ensemble de P d'une manière continue et sans points invariants.

La démonstration du théorème 3 est ainsi terminée.

Il est à remarquer que la thèse du théorème 3 serait en défaut pour des polytopes quelconques (non situés dans R_3). Ainsi par

[12]) Il est à remarquer que la simple conséquence de la formule de MM. Lefschetz et Hopf, la seule que nous utilisons dans cette Note, se laisse obtenir d'une façon élémentaire indépendamment de la formule générale. Dans le cas notamment où P est un polytope situé dans R_3, la condition $p_2(P)=p_1(P)=p_0(P)-1=0$ entraîne que P est un rétracte absolu (voir Monatsh. f. Math. u. Phys. 41 (1934), p. 78) et parsuite (voir Fund. Math. 17 (1931), p. 163) qu'il existe un point invariant par rapport à toute transformation continue de P en son sous-ensemble.

[13]) Fund. Math. 20 (1933), p. 231.

[14]) Voir W. Mayer, Monatsh. f. Math. u. Phys. 36 (1929), p. 40, formule (96). Dans le cas particulier où les polytopes P_1 et P_2 sont tels que tous les cycles de dimension $\geqslant 1$ situés dans P_i (où $i=1,2$) sont homologues à zéro dans P_i, la formule mentionnée prend la forme bien simple: $p_{k+1}(P_1+P_2)=p_k(P_1\cdot P_2)$, pour $k=1,2,\ldots$

[15]) Fund. Math. 19 (1932), p. 229.

exemple[16]) le plan projectif complexe K_2 (étant une variété à 4 dimensions) remplit la condition $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(K_2) = 3$, bien qu'il ne se laisse pas transformer en son sous-ensemble d'une manière continue et sans points invariants[17]).

La question suivante reste ouverte:

La thèse du théorème 3 reste-t-elle vraie pour tous les continus localement contractiles[18]) *situés dans* R_3?

[16]) C'est M. H. Hopf qui m'a indiqué cet exemple.

[17]) Voir H. Hopf, Journ. f. d. r. u. a. Math. 163 (1930), p. 85.

[18]) La question analogue dans le domaine des continus péaniens arbitraires situés dans R_3 est résolue dans le sens négatif, car il existe dans R_3 un continu péanien dont les nombres de Betti sont égaux à ceux du simplexe et qui se laisse transformer topologiquement en lui-même sans points invariants. Voir Fund. Math. 24 (1934), p. 52. La question de l'existence dans R_3 d'un continu péanien C qui contienne un point invariant par rapport à toute transformation continue en son sous-ensemble et remplisse la condition $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(C) \geq 2$ reste cependant ouverte.

Wiązowszczyzna, Noël 1934.

Sur la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann.

Par

D. Menchoff (Moscou).

§ 1. Soit $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ une fonction continue d'une variable complexe $z = x + iy$ définie dans un domaine ouvert D, où x, y, $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont réels. Supposons qu'en chaque point z, intérieur au domaine D, les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent et vérifient les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dans ces conditions la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine D[1]).

Nous pouvons énoncer ce théorème d'une autre manière. Soit d une droite infinie située dans le plan du domaine D et passant par un point z. Désignons par $\lim_{h\to 0}(d)\, A(z, h)$ la limite de la quantité $A(z, h)$, lorsque h tend vers zéro de telle façon que le point $z + h$ reste toujours sur la droite d. Nous pouvons énoncer le théorème précédent de la manière suivante.

Supposons qu'en chaque point z, intérieur au domaine D, les limites

$$\lim_{h\to 0}(d) \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

[1]) Montel, *Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, pp. 1820—1822 (1913).

Looman, *Über eine Erweiterung des Cauchy-Goursatschen Integralsatzes*, Nieuw. Arch. Wiskde, pp. 97—108, (1923).

Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monografje Matematyczne II, pp. 242—246, Warszawa, (1933).