Posons

$$M_{\alpha-1}=F_{\alpha-1}-F_\alpha$$

et remarquons que l'ensemble $M_{\alpha-1}$ n'est pas vide. On peut présenter l'ensemble $M_{\alpha-1}$ sous la forme

$$M_{\alpha-1}=\sum_{k=1}^{\infty} M_{\alpha-1}^{(k)},$$

où $M_{\alpha-1}^{(k)}$ sont des ensembles fermés.

Définissons sur chaque ensemble $M_{\alpha-1}^{(k)}$ une fonction semicontinue supérieurement $\varphi_{\alpha-1}^{(k)}(x)$, en posant

$$\varphi_{\alpha-1}^{(k)}(x)=\operatorname{Max}(f,x,M_{\alpha-1}^{(k)}).$$

On a évidemment

$$|\varphi_{\alpha-1}^{(k)}(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{sur} \quad M_{\alpha-1}^{(k)}.$$

Dans le cas où α est un nombre de 2$^{\text{de}}$ espèce, posons

$$F_\alpha=\prod_{\beta<\alpha}F_\beta.$$

D'après le théorème bien connu de M. Baire sur les suites bien ordonnées et non croissantes d'ensembles fermés, il existe un nombre transfini $\mu<\Omega$ tel que F_μ est un ensemble vide. Donc, on peut décomposer P par le procédé indiqué en un ensemble dénombrable d'ensembles fermés $\{M_\alpha^{(k)}\}$ sur chacun desquels est définie une fonction semicontinue supérieurement $\varphi_\alpha^{(k)}(x)$ et

$$|\varphi_\alpha^{(k)}(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x\in M_\alpha^{(k)},$$

c. q. f. d.

Leningrad, Avril 1935.

Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie.

Von

K. Borsuk und S. Eilenberg (Warszawa).

Ist M ein metrischer Raum, so bezeichnet S_1^M die (abelsche) Gruppe, die als Elemente stetige Abbildungen von M in die, in der komplexen z-Ebene liegende Kreislinie $S_1=\underset{z}{\mathrm{E}}[|z|=1]$ hat, wobei die Zusammensetzung von Elementen die gewöhnliche Multiplikation ist. Zwei Abbildungen $f_1, f_2\in S_1^M$ werden dabei *äquivalent* in einer gewissen Teilmenge N von M genannt (Bezeichnung: $f_1\sim f_2$ in N), wenn es eine stetige reelle Funktion φ gibt, für welche $f_1(x):f_2(x)=e^{i\varphi(x)}$ für jedes $x\in N$ gilt. Die mit 1 (d. h. mit der Funktion $f(x)\equiv 1$, welche das neutrale Element von S_1^M ist) im ganzen Raum M äquivalenten Funktionen [1]) bilden eine Untergruppe $P(M)$ von S_1^M. Die Faktorgruppe von S_1^M nach $P(M)$ wird mit $\mathfrak{B}_1(M)$ bezeichnet.

Es ist bekannt [2]), dass das Verschwinden der ersten Bettischen Zahl eines Kompaktums M eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden der Gruppe $\mathfrak{B}_1(M)$ bildet. Für nicht kompakte Räume verhält sich die Sache anders. Wir werden nämlich in vorliegender Arbeit zeigen, dass schon im dreidimensionalen euklidischen Raum R_3 offene Mengen G existieren, für welche die eindimensionale Bettische Zahl positiv ist, obwohl die Gruppe $\mathfrak{B}_1(G)$

[1]) Es ist leicht zu beweisen, dass für Kompakta die mit 1 äquivalenten Abbildungen mit den sog. *unwesentlichen* Abbildungen gleichbedeutend sind. S. hierzu S. Eilenberg, Fund. Math. 24 (1935), S. 162; auch Fund. Math. 26 (1936), S. 68.

[2]) Siehe hierzu K. Borsuk, Fund. Math. 20 (1933), S. 224—231. Genauere Ergebnisse, u. a. die vollständige Bestimmung der ersten Bettischen Zahl von M durch die Gruppe $\mathfrak{B}_1(M)$, befinden sich in der Arbeit von N. Bruschlinsky, Math. Ann. 109 (1934), S. 525—537.

verschwindet. Diese Eigenschaft weisen z. B. die Komplementärmengen der sog. Solenoiden von L. Vietoris und D. van Dantzig [3]) auf. Diese etwas unerwartete Tatsache wird uns aber nicht hindern, zwei Sätze zu beweisen, durch welche, im Falle einer kompakten bzw. offenen Teilmenge M von R_n [4]), gewisse Dualitätsbeziehungen zwischen der Gruppe $\mathfrak{B}_1(M)$ und den Homologieeigenschaften von $R_n - M$ bestimmt werden.

Eine andere Dualitätsbeziehung wird im Falle, wo M ein lokal zusammenhängendes Kompaktum ist, bewiesen. Im Falle $n = 3$ erlaubt sie insbesondere die Gleichheit der Range der Gruppen $\mathfrak{B}_1(M)$ und $\mathfrak{B}_1(R_3 - M)$ festzustellen und somit eine Dualitätseigenschaft ohne Benutzung der Homologiebegriffe auszusprechen.

1. Es sei M irgendeine Teilmenge eines euklidischen oder Hilbertschen Raumes. Wir werden sagen, dass ein *Zyklus* [5]) γ *in* M *liegt*, wenn seine geometrische Realisation [5a]) eine Teilmenge von M bildet. Wir werden ferner sagen, dass $\Gamma = \{\gamma_k\}$ ein *konvergenter Zyklus von* M ist, falls Γ ein konvergenter Zyklus eines Teilkompaktums K des Raumes M ist [6]).

---

[3]) Diese merkwürdigen Kontinua wurden von L. Vietoris entdeckt (Math. Ann. 97 (1927), S. 459) und von D. van Dantzig (Fund. Math. 15 (1930)) ausführlich untersucht.

[4]) R_n bedeuten den durch Hinzufügung des unendlich fernen Punktes ergänzten n-dimensionalen euklidischen Raum.

[5]) Unter Zyklen werden hier immer *ganzzahlige* algebraische Zyklen gemeint.

[5a]) d. h. die Vereinigungsmenge aller geometrischen Simplexe, welche den mit nicht verschwindenden Koeffizienten in γ auftretenden Simplexen entsprechen.

[6]) Eine Folge $\{\gamma_k^{(n)}\}$ von n-dimensionalen (ganzzahligen) Zyklen wird ein *n-dimensionaler konvergenter Zyklus von K* genannt, wenn: 1⁰ alle Eckpunkte von $\gamma_k^{(n)}$ zu K gehören; 2⁰ der maximale Durchmesser von Simplexen von $\gamma_k^{(n)}$ mit $\frac{1}{k}$ gegen 0 konvergiert; 3⁰ eine Folge $\{c_k\}$ von ganzzahligen Komplexen existiert, deren Eckpunkte zu K gehören und deren maximaler Durchmesser von Simplexen mit $\frac{1}{k}$ gegen 0 konvergiert, wobei der Rand $\dot{c}_k$ von c_k gleich $a_k \cdot (\gamma_k^{(n)} - \gamma_{k+1}^{(n)})$ mit einem ganzzahligen $a_k \neq 0$ ist. Es ist zu bemerken, dass der hier gebrauchte Begriff des konvergenten Zyklus unterscheidet sich sowohl vom Begriff des konvergenten Zyklus modulo 0 im Sinne von P. Alexandroff (Math. Ann. 106 (1932), S. 180), als auch von dem Vietorisschen Begriff der (ganzzahligen) Fundamentalfolge (Math. Ann. 97 (1927), S. 454—472).

Die n-dimensionalen konvergenten Zyklen von M bilden eine Gruppe $Z^n(M)$. Zwei konvergente Zyklen $\Gamma_1 = \{{}_1\gamma_k^{(n)}\}$ und $\Gamma_2 = \{{}_2\gamma_k^{(n)}\}$ von $Z^n(M)$ heissen *divisionshomolog in M* (Bezeichnung: $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ in M), wenn die durch $\gamma_{2k-1}^{(n)} = {}_1\gamma_k^{(n)}$ und $\gamma_{2k}^{(n)} = {}_2\gamma_k^{(n)}$ gegebene Folge $\{\gamma_k^{(n)}\}$ ein Element von $Z^n(M)$ ist. Die mit der Null der Gruppe $Z^n(M)$ (d. h. mit der Folge $\{\gamma_k^{(n)}\}$, deren sämtliche Elemente verschwinden) in M divisionshomologen n-dimensionalen konvergenten Zyklen bilden eine Untergruppe $H^n(M)$ von $Z^n(M)$. Die Faktorgruppe von $Z^n(M)$ nach $H^n(M)$ wird mit $B^n(M)$ bezeichnet. Falls der Rang von $B^n(M)$ endlich ist, bezeichnen wir ihn mit $p_n(M)$; ist er unendlich, so setzen wir $p_n(M) = \infty$.

Ist M ein Polyeder oder eine offene Teilmenge eines euklidischen Raumes, so erhält man bekanntlich eine (bis auf Isomorphie) äquivalente Definition der Gruppe $B^n(M)$, wenn man die konvergenten Zyklen von M durch die in M liegenden (gewöhnlichen) Zyklen ersetzt.

Wir setzen nun voraus, dass gewisse Orientierung der Kreislinie S_1 gegeben ist und betrachten irgendeine Funktion $f \in S_1^M$. Jeder in M liegende Zyklus $\gamma^{(1)}$ [7]) (bzw. konvergenter Zyklus $\Gamma^{(1)}$) wird dann mittels f mit einem gewissen Grade $g(f;\gamma^{(1)})$ (bzw. $g(f;\Gamma^{(1)})$) in S_1 abgebildet. Es ist dabei klar, dass durch g (bei einem konstanten $f \in S_1^M$) eine homomorphe Abbildung der Gruppe der eindimensionalen in M liegenden Zyklen (bzw. konvergenten Zyklen) in die additive Gruppe der ganzen Zahlen (d. h. ein sog. *Charakter*) bestimmt ist. Man hat dabei die folgenden Tatsachen:

1⁰ Sind f_1 und f_2 zwei Elemente von S_1^M, so gilt: $g(f_1 \cdot f_2;\gamma^{(1)}) = g(f_1;\gamma^{(1)}) + g(f_2;\gamma^{(1)})$ (bzw. $g(f_1 \cdot f_2;\Gamma^{(1)}) = g(f_1;\Gamma^{(1)}) + g(f_2;\Gamma^{(1)})$),

2⁰ Aus $f \sim 1$ in M folgt $g(f;\gamma^{(1)}) = 0$ (bzw. $g(f;\Gamma^{(1)}) = 0$).

Aus 1⁰ und 2⁰ ergibt sich:

3⁰ Ist $f_1 \sim f_2$ in M, so gilt: $g(f_1;\gamma^{(1)}) = g(f_2;\gamma^{(1)})$ (bzw. $g(f_1;\Gamma^{(1)}) = g(f_2;\Gamma^{(1)})$).

Im Falle eines lokal zusammenhängenden und vollständigen Raumes M, ist eine Funktion $f \in S_1^M$ in M mit 1 äquivalent, wenn sie in jeder in M liegenden einfachen Kurve Ω mit 1 äquivalent st [8]). Es ergibt sich daraus insbesondere, dass im Falle, wo M ein Polyeder oder eine offene Teilmenge eines euklidischen Raumes ist, das Verschwinden des Grades $g(f, \gamma^{(1)})$ einer Funktion $f \in S_1^M$ auf jedem in M liegenden Zyklus $\gamma^{(1)}$ eine nicht nur notwendige, aber auch hinreichende Bedingung für die Relation $f \sim 1$ in M bildet. Ähnlicherweise ist im Falle eines beliebigen lokal zusammenhängenden

---

[7]) Der obere Index gibt immer die Dimensionszahl an.

[8]) S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), S. 84.

und vollständigen Raumes M das Verschwinden von $g(f;\Gamma^{(1)})$ für jeden konvergenten Zyklus $\Gamma^{(1)}$ von M für die Relation $f\sim 1$ in M notwendig und hinreichend.

Wir werden sagen, dass die Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_k \in S_1^M$ eine *Basis von* S_1^M bilden, falls es für jede Funktion $f\in S_1^M$ eine und nur eine mit ihr in M äquivalente Funktion von der Gestalt

$$[f_1(x)]^{\alpha_1}\cdot[f_2(x)]^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot[f_k(x)]^{\alpha_k},$$

mit ganzzahligen α_i, gibt. Es gilt nun [9]):

(1) *Sind $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ eindimensionale Zyklen, welche eine Basis für ein Polyeder P bilden* [10]), *so gibt es eine Basis $f_1, f_2, \dots, f_k$ von S_1^P von der Art, dass $g(f_i, \gamma_j)=\delta_{i,j}$* [11]) *für jedes $i, j=1, 2, \dots, k$ gilt.*

2. Es seien nun M_i $(i=1,2)$ zwei disjunkte Teilmengen von R_n und ${}_i\gamma^{(r_i)}$ (bzw. $\Gamma_i^{(r_i)}=\{{}_i\gamma_k^{(r_i)}\}$) zwei in diesen Mengen entsprechend liegende Zyklen (bzw. konvergente Zyklen) mit $r_1+r_2=n-1$. Die Verschlingungszahl von ${}_1\gamma^{(r_1)}$ mit ${}_2\gamma^{(r_2)}$ wird mit $v({}_1\gamma^{(r_1)};\,{}_2\gamma^{(r_2)})$ bezeichnet; ihr Wert bleibt bekanntlich unverändert, wenn man die Zyklen ${}_i\gamma^{(r_i)}$ durch die mit ihnen entsprechend in M_i divisionshomologen Zyklen ersetzt. Es folgt daraus, dass für hinreichend grosse Indizes k die Zahlen $v({}_1\gamma^{(r_1)};\,{}_2\gamma_k^{(r_2)})$, $v({}_1\gamma_k^{(r_1)};\,{}_2\gamma^{(r_2)})$ und $v({}_1\gamma_k^{(r_1)};\,{}_2\gamma_k^{(r_2)})$, eindeutig bestimmt und von k unabhängig sind. Somit existieren auch ihre Grenzen bei dem Grenzübergang $k\to\infty$; sie werden entsprechend mit $v({}_1\gamma^{(r_1)};\,\Gamma_2^{(r_2)})$, $v(\Gamma_1^{(r_1)};\,{}_2\gamma^{(r_2)})$ und $v(\Gamma_1^{(r_1)};\,\Gamma_2^{(r_2)})$ bezeichnet.

Wir werden sagen, dass eine Funktion $f\in S_1^{M_1}$ und ein in M_2 liegender Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ (bzw. konvergenter Zyklus $\Gamma^{(n-2)}$) *parallel* sind, wenn für jeden in M_1 liegenden konvergenten Zyklus $\Gamma^{(1)}$ die Bedingung $g(f;\Gamma^{(1)})=v(\gamma^{(n-2)};\Gamma^{(1)})$ (bzw. $g(f;\Gamma^{(1)})=v(\Gamma^{(n-2)};\Gamma^{(1)})$) erfüllt ist. Die mit 1 (in M_1) äquivalenten Funktionen sind dann offenbar zum Zyklus Null parallel. Sind ferner $\bar f$ eine mit f in M_1 äquivalente Funktion und $\bar\Gamma^{(n-2)}$ ein mit $\Gamma^{(n-2)}$ in M_2 divisionshomologer konvergenter Zyklus, so impliziert der Parallelismus von f und $\Gamma^{(n-2)}$ den Parallelismus von $\bar f$ und $\bar\Gamma^{(n-2)}$. Somit lässt sich der

[9]) N. Bruschlinsky, l. c. S. 528, b) und c).

[10]) d. h. jeder eindimensionale in P liegende Zyklus γ ist einer und nur einer linearen Kombination (mit ganzzahligen Koeffizienten) von $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ divisionshomolog.

[11]) $\delta_{i,j}$ bezeichnet, wie üblich, 0 falls $i\neq j$ und 1 falls $i=j$ ist.

Parallelismus nicht nur als eine Relation zwischen den Funktionen und Zyklen, sondern auch als eine Relation zwischen den Elementen der Gruppen $\mathfrak{B}_1(M_1)$ und $B^{(n-2)}(M_2)$ betrachten. Es ist dabei klar, dass im Falle, wo M_2 ein Polyeder oder eine offene Teilmenge von R_n ist, der Sinn des Parallelismus unverändert bleibt, wenn man in seiner Definition konvergente Zyklen $\Gamma^{(1)}$ durch gewöhnliche Zyklen $\gamma^{(1)}$ ersetzt.

3. ***Hilfssatz.*** *Ist P ein Teilpolyeder von R_n, so gilt:*

1⁰ Zu jedem in R_n-P liegenden Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ gibt es eine parallele Funktion $f\in S_1^P$,

2⁰ Zu jeder Funktion $f\in S_1^P$ gibt es einen parallelen in R_n-P liegenden Zyklus $\gamma^{(n-2)}$,

3⁰ Wenn $f\in S_1^P$ und der in R_n-P liegende Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ zueinander parallel sind, so ist die Beziehung $f\sim 1$ in P mit der Beziehung $\gamma^{(n-1)}\approx 0$ in R_n-P [12]) *gleichbedeutend.*

Beweis. Auf Grund des Alexanderschen Dualitätssatzes [13]) gibt es eine $(n-2)$-dimensionale Bettische Basis ${}_1\gamma_1^{(n-2)}, {}_1\gamma_2^{(n-2)}, \dots, {}_1\gamma_k^{(n-2)}$ von R_n-P und eine eindimensionale Bettische Basis ${}_2\gamma_1^{(1)}, {}_2\gamma_2^{(1)}, \dots, {}_2\gamma_k^{(1)}$ von P, für welche

$$v({}_1\gamma_i^{(n-2)};\,{}_2\gamma_j^{(1)})=\delta_{i,j} \qquad \text{für} \quad i, j=1, 2, \dots, k$$

gilt. Es gibt ferner, nach (1), eine Basis $f_1, f_2, \dots, f_n$ von S_1^P, für welche

$$g(f_i, {}_2\gamma_j^{(1)})=\delta_{i,j} \qquad \text{für} \quad i, j=1, 2, \dots, k$$

gilt. Nach der Basiseigenschaft gibt es für jeden in R_n-P liegenden Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ ein System von ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ derart, dass $\gamma^{(n-2)}\approx\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot{}_1\gamma_i^{(n-2)}$ gilt, und für jeden in P liegenden Zyklus $\bar\gamma^{(1)}$ ein System von ganzen Zahlen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ derart, dass $\bar\gamma^{(1)}\approx\sum_{i=1}^{k}\beta_i\cdot{}_2\gamma_i^{(1)}$ gilt. Ähnlicherweise ist jede Funktion $f\in S_1^P$ mit einer Funktion

[12]) $\gamma\approx 0$ in M bedeutet, dass γ divisionshomolog mit Null in M ist, d. h. dass es einen ganzzahligen Komplex c gibt, dessen geometrische Realisation in M liegt und der als Rand den Zyklus $\alpha\cdot\gamma$ hat (wo α eine ganze, von 0 verschiedene Zahl ist).

[13]) Siehe hierzu. L. Pontrjagin, Math. Ann. 105 (1931), S. 189.

von der Gestalt $\prod_{i=1}^{k}[f_i(x)]^{\alpha_i}$ in P äquivalent. Es bleibt nun die Beziehung

$$g(f;\bar\gamma^{(1)})=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot g(f_i;\bar\gamma^{(1)})=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot\sum_{j=1}^{k}\beta_j\cdot g(f_i;\,{}_2\gamma_j^{(1)})=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot\sum_{j=1}^{k}\beta_j\cdot v({}_1\gamma_i^{(n-2)};\,{}_2\gamma_j^{(1)})=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot v({}_1\gamma_i^{(n-2)};\,\bar\gamma^{(1)})=v(\gamma^{(n-2)};\,\bar\gamma^{(1)})$$

zu berücksichtigen, um zu ersehen, dass die Funktion f und der Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ parallel sind. Somit ist der Beweis von 1^0 und 2^0 beendet.

Wenn man nun die zu $\gamma^{(n-2)}$ parallele Funktion f mit 1 in P äquivalent ist, so gilt $v(\gamma^{(n-2)};\bar\gamma^{(1)})=g(f;\bar\gamma^{(1)})=0$, für jeden in P liegenden Zyklus $\gamma^{(1)}$, woraus sich $\gamma^{(n-2)}\approx 0$ in R_n-P ergibt[13]. Und umgekehrt, wenn $\gamma^{(n-2)}\approx 0$ in R_n-P gilt und $f\in S_1^P$ zu $\gamma^{(n-2)}$ parallel ist, so gilt $g(f,\bar\gamma^{(1)})=v(\gamma^{(n-2)},\bar\gamma^{(1)})=0$ für jeden in P liegenden Zyklus $\bar\gamma^{(1)}$, was die Beziehung $f\sim 1$ in P impliziert.

Hiermit ist der Beweis es Hilfssatzes beendet.

4. ***Satz 1.*** *Für jedes Teilkompaktum K von R_n wird durch Parallelismus ein Isomorphismus zwischen den Gruppen $\mathfrak{B}_1(R_n-K)$ und $B^{(n-2)}(K)$ erzeugt.*

B e w e i s. Um diesen Satz zu beweisen, genügt es Folgendes festzustellen:

1^0 Zu jedem konvergenten Zyklus $\Gamma^{(n-2)}=\{\gamma_k^{(n-2)}\}$ von K gibt es eine parallele Funktion $f\in S_1^{R_n-K}$.

2^0 Zu jeder Funktion $f\in S_1^{R_n-K}$ gibt es einen parallelen konvergenten Zyklus $\Gamma^{(n-2)}$ von K.

3^0 Damit die zu einem konvergenten Zyklus $\Gamma^{(n-2)}$ von K parallele Funktion $f\in S_1^{R_n-K}$ äquivalent in R_n-K mit 1 sei, ist es notwendig und hinreichend, dass $\Gamma^{(n-2)}\approx 0$ in K gelte.

Ad 1^0. Es gibt in R_n eine wesentlich wachsende[14]) Polyederfolge $\{P_k\}$, für die

$$\sum_{k=1}^{\infty}P_k=R_k-K \tag{2}$$

gilt, wobei $\gamma_k^{(n-2)}$ in R_n-P_k liegt und dort mit $\gamma_{k+1}^{(n-2)}$ divisions-

[14]) Darunter verstehen wir, dass P_k im Innern von P_{k+1}, enthalten ist.

homolog ist. Auf Grund des soeben bewiesenen Hilfssatzes lässt sich ferner eine Funktionenfolge $\{f_k\}$ konstruieren und zwar derart, dass $f_k\in S_1^{P_k}$ und f_k zu dem Zyklus $\gamma_k^{(n-2)}$ parallel ist. Wir werden nun eine Funktion $f\in S_1^{R_n-K}$ konstruieren, für welche

$$f\sim f_k \quad\text{in}\quad P_k \tag{3}$$

für jedes $k=1,2,\ldots$ gilt. Um sie zu erhalten, setzen wir zunächst $f(x)=f_1(x)$ für jedes $x\in P_1$; dann werden wir, unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ schon auf P_{k_0} als eine die Bedingung (3) für $k=1,2,\ldots,k_0$ erfüllende Funktion definiert ist, f zu einer die Bedingung (3) auch für $k=k_0+1$ erfüllenden Abbildung von P_{k_0+1} erweitern.

Zu diesem Zweck beachten wir den auf dem Polyeder P_{k_0} definierten Quotienten $f'(x)=f(x):f_{k_0+1}(x)$. Die Funktion f' ist dann ~ 1 in P_{k_0}, d. h. es gibt eine stetige reelle Funktion $\varphi(x)$ derart, dass $f'(x)=e^{i\varphi(x)}$ für jedes $x\in P_{k_0}$ gilt. Da sich φ — wie jede stetige reelle Funktion — auf P_{k_0+1} in stetiger Weise erweitern lässt, gibt es auch eine Erweiterung $f''\in S_1^{P_{k_0+1}}$ von f'. Es genügt nun $f(x)=f''(x)\cdot f_{k_0+1}(x)$ für jedes $x\in P_{k_0+1}$ zu setzen, um die gewünschte Erweiterung auf P_{k_0+1} zu erhalten. Da schliesslich — nach (2) — jeder Punkt von R_n-K im Innern fast aller Polyeder P_k liegt, so muss die unendliche Fortsetzung dieses Erweiterungsprozesses zu einer stetigen Abbildung der ganzen Menge R_n-K führen, wobei die Bedingung (3) für jedes k erfüllt wird.

Um nun den Beweis von 1^0 zu beenden, brauchen wir nur zu zeigen, dass die soeben definierte Funktion $f\in S_1^{R_n-K}$ parallel zu $\Gamma^{(n-2)}$ ist. Zu diesem Zweck betrachten wir, für einen beliebig gegebenen in R_n-K liegenden Zyklus $\gamma^{(1)}$, einen so grossen Index k_0, dass $\gamma^{(1)}$ in P_{k_0} liegt. Auf Grund von (3) ist dann

$$g(f;\gamma^{(1)})=g(f_k;\gamma^{(1)})=v(\gamma_k^{(n-2)};\gamma^{(1)})$$

für jedes $k\geqslant k_0$, womit die Gleichheit $g(f;\gamma^{(1)})=v(\Gamma^{(n-2)};\gamma^{(1)})$, d. h. der Parallelismus von f und $\Gamma^{(n-2)}$, bewiesen ist.

Ad 2^0. Es sei nun $f\in S_1^{R_n-K}$ und $\{P_k\}$ eine wesentlich wachsende und die Bedingung (2) erfüllende Polyederfolge in R_n. Auf Grund des Hilfssatzes gibt es in der Menge R_n-P_k (für jedes $k=1,2,\ldots$) einen Zyklus $\bar\gamma_k^{(n-2)}$, welcher zu der auf P_k als Teilfunktion von f definierten Funktion f_k parallel ist. Man kann dabei voraussetzen (wenn man eventuell zu einer hinreichend feinen Unterteilung von $\bar{\gamma}^{(n-2)}$ übergeht), dass der maximale Durchmesser der Simplexe von $\bar{\gamma}_k^{(n-2)}$ mit $\frac{1}{k}$ gegen 0 konvergiert. Wenn wir nun beachten, dass f nicht nur zu $\bar{\gamma}_k^{(n-2)}$, sondern auch zu $\bar{\gamma}_{k+1}^{(n-2)}$ parallel ist, so schliessen wir auf Grund des Hilfssatzes, dass

$$\gamma_k^{(n-2)} \approx \gamma_{k+1}^{(n-2)} \quad \text{in } R_n - P_k \tag{4}$$

gilt. Da ferner — nach (2) — der maximale Abstand der Eckpunkte des Zyklus $\bar{\gamma}_k^{(n-2)}$ von der Menge K mit $\frac{1}{k}$ gegen 0 konvergiert, so können wir durch sog. „unendlich kleine Verschiebung"[15]) die Folge $\{\bar{\gamma}_k^{(n-2)}\}$ in die Folge $\{\gamma_k^{(n-2)}\}$, deren alle Eckpunkte in K liegen, überführen. Wenn man nun die Beziehung (4) berücksichtigt, so schliesst man, dass $\Gamma^{(n-2)} = \{\gamma_k^{(n-2)}\}$ ein konvergenter Zyklus von K ist. Wir behaupten, dass $\Gamma^{(n-2)}$ zur Funktion f parallel ist. In der Tat, ist $\gamma^{(1)}$ irgendein in $R_n - K$ liegender Zyklus, so gibt es ein k_0 derart, dass

$$g(f; \gamma^{(1)}) = g(f_k; \gamma^{(1)}) = v(\bar{\gamma}_k^{(n-2)}; \gamma^{(1)}) = v(\gamma_k^{(n-2)}; \gamma^{(1)})$$

für jedes $k \geqslant k_0$ gilt, was die Gleichheit $g(f; \gamma^{(1)}) = v(\Gamma^{(n-2)}; \gamma^{(1)})$ zur Folge hat. Hiermit ist der Beweis von 2⁰ beendet.

Ad 3⁰. Es sei $\Gamma^{(n-2)} = \{\gamma_k^{(n-2)}\}$ ein zu einer gewissen Funktion $f \in S_1^{R_n - K}$ paralleler konvergenter Zyklus von K und $\gamma^{(1)}$ irgendein in $R_n - K$ liegender Zyklus. Wir betrachten eine wesentlich wachsende Folge $\{P_k\}$ von Polyedern in R_n, für welche die Bedingung (2) erfüllt ist und $\gamma_k^{(n-2)}$ in $R_n - P_k$ liegt. Es gilt dann für jeden in P_k liegenden Zyklus $\gamma^{(1)}$:

$$g(f; \gamma^{(1)}) = v(\Gamma^{(n-1)}; \gamma^{(1)}) = v(\gamma_k^{(n-2)}; \gamma^{(1)}). \tag{5}$$

Ist nun $f \sim 1$ in $R_n - K$, so verschwindet $g(f; \gamma^{(1)})$ und somit auch $v(\gamma^{(1)}; \gamma_k^{(n-2)})$ für jeden in P_k liegenden Zyklus $\gamma^{(1)}$, woraus sich $\gamma_k^{(n-2)} \approx 0$ in $R_n - P_k$ ergibt[13]). Daraus und aus (2) folgt, dass $\Gamma^{(n-2)}$ divisionshomolog mit Null in K ist.

---

[15]) Darunter versteht man eine Verrückung der Eckpunkte eines jeden $\bar{\gamma}_k^{(n-2)}$, höchstens um ein gewisses ε_k mit $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$. Siehe P. Alexandroff, Math. Ann. 106 (1932), S. 180.

Ist andererseits $\Gamma^{(n-2)} \approx 0$ in K und bezeichnet $\gamma^{(1)}$ irgendeinen in $R_n - K$ liegenden Zyklus, so ist $v(\Gamma^{(n-2)}; \gamma^{(1)}) = 0$ und somit auch $g(f; \gamma^{(1)}) = 0$, was die Äquivalenz von f mit 1 in $R_n - K$ zur Folge hat.

Hiermit ist der Beweis des Satzes 1 beendet.

5. Die soeben bewiesenen Behauptungen 1⁰, 2⁰ und 3⁰ erlauben uns folgende Aufgabe zu lösen:

Gegeben seien in R_3 zwei disjunkte einfach geschlossene Kurven Ω_1 und Ω_2. Unter welchen Bedingungen ist Ω_1 ein Retrakt[16]) *von $R_3 - \Omega_2$?*

Wir behaupten, dass eine hierfür notwendige und hinreichende Bedingung durch die Gleichung $\bar{v}(\Omega_1; \Omega_2) = 1$ gegeben ist, wobei $\bar{v}(\Omega_1; \Omega_2)$ die *absolute Verschlingungszahl*[17]) der Kurven Ω_1 und Ω_2 bezeichnet.

Um dies zu beweisen, betrachten wir in jeder Kurve Ω_i einen konvergenten Basiszyklus $\Gamma_i^{(1)} = \{_i\gamma_k^{(1)}\}$. Es ist dann

$$\bar{v}(\Omega_1, \Omega_2) = |v(\Gamma_1^{(1)}; \Gamma_2^{(1)})|.$$

Gibt es nun eine Funktion $r(x)$, welche $R_3 - \Omega_2$ auf Ω_1 retrahiert, und bezeichnet $h(x)$ irgendeine homöomorphe Abbildung von Ω_1 auf S_1, so gehört die Funktion $f(x) = hr(x)$ zur Gruppe $S_1^{R_3 - \Omega_2}$, wobei sie den konvergenten Zyklus $\Gamma_1^{(1)}$ mit dem Grad ± 1 abbildet. Auf Grund von 4,2⁰ gibt es nun einen zu f parallelen konvergenten Zyklus $\Gamma^{(1)}$ von Ω_2. Dann gilt:

$$v(\Gamma^{(1)}; \Gamma_1^{(1)}) = g(f; \Gamma_1^{(1)}) = \pm 1. \tag{6}$$

---

[16]) Eine Teilmenge A irgendeines Raumes M heisst ein *Retrakt von M*, wenn es eine Funktion $r(x)$ gibt, welche M auf A stetig so abbildet, dass die Bedingung $r(x) = x$ für jedes $x \in A$ erfüllt wird. Wenn es ferner eine stetige Funktion $\psi(x, t)$ gibt von der Art, dass $\psi(x, 0) = x$, $\psi(x, t) \in M$ und $\psi(x, 1) = r(x)$ für jedes $x \in M$ und $0 \leqslant t \leqslant 1$ gilt, so wird A ein *Deformationsretrakt von M* genannt.

[17]) Unter der *absoluten Verschlingungszahl* der Kurven Ω_1 und Ω_2 verstehen wir die kleinste unter den Zahlen $|v(\Gamma_1^{(1)}; \Gamma_2^{(1)})|$, wo $\Gamma_i^{(1)}$ alle in Ω_i nicht mit Null homologen konvergenten Zyklen von Ω_i durchläuft. Es ist leicht zu ersehen, dass $\bar{v}(\Omega_1; \Omega_2)$ dem absoluten Wert der Verschlingung von sog. konvergenten Basiszyklen von Ω_1 und Ω_2 gleich ist. Es ist klar, dass bei homöomorphen Abbildungen von Ω_i in S_1 jeder Basiszyklus mit dem Grad ± 1 abgebildet wird.

Da aber $\Gamma^{(1)}$ einem ganzen Vielfachen von $\Gamma_2^{(1)}$ homolog in Ω_2 ist, so ist auch $v(\Gamma^{(1)};\Gamma_1^{(1)})$ einem Vielfachen von $v(\Gamma_2^{(1)};\Gamma_1^{(1)})$ gleich. Daraus und aus (6) folgt aber $v(\Gamma_1^{(1)};\Gamma_2^{(1)})=\pm 1$, womit die Notwendigkeit unserer Bedingung bewiesen ist.

Wenn wir nun $v(\Omega_1;\Omega_2)=1$ voraussetzen, so ist $v(\Gamma_1^{(1)};\Gamma_2^{(1)})=\pm 1$. Nach **4**, 1^0 gibt es dann eine zu $\Gamma_2^{(1)}$ parallele Funktion f. Es gilt dann

$$g(f;\Gamma_1^{(1)})=v(\Gamma_2^{(1)};\Gamma_1^{(1)})=\pm 1,$$

und somit bildet f den konvergenten Basiszyklus $\Gamma_1^{(1)}$ von Ω_1 mit dem Grad ± 1 ab, d. h. mit demselben Grad, wie eine gewisse, homöomorphe Abbildung $h(x)$ von Ω_1 auf S_1. Daraus folgt, dass die Abbildung $h:f$ von der Gestalt $e^{i\varphi(x)}$ ist. Es sei nun φ' irgendeine stetige reelle Erweiterung von φ auf $R_3-\Omega_2$. Die Funktion $r(x)=$ $=h^{-1}[f(x)\cdot e^{i\varphi'(x)}]$ retrahiert dann die Menge $R_3-\Omega_2$ auf Ω_1, womit unser Beweis beendet ist.

Aus dem Bewiesenen ergibt sich insbesondere, dass die Verknotungseigenschaften der Kurven Ω_1 und Ω_2 keinen Einfluss auf die betrachtete Retraktseigenschaft haben. Nach einer brieflichen Bemerkung von Herrn H. Hopf, verhält sich die Sache anders, wenn es sich nicht um Retrakte, sondern um Deformationsretrakte handelt. Die Frage nach notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen dafür, dass Ω_1 ein Deformationsretrakt von $R_3-\Omega_2$ sei, bleibt offen.

6. Aus dem Satz 1 ergibt sich folgendes

Korollar 1. *Es gibt in R_3 Kontinua C, für welche die Gruppe $\mathfrak{B}_1(R_3-C)$, im Gegensatz zu der Gruppe $\mathfrak{B}_1(C)$, verschwindet.*

Diese Eigenschaft weisen z. B. die sog. Solenoiden [3]) von L. Vietoris und D. van Dantzig auf. Es ist nämlich bekannt, dass die erste Bettische Zahl (bei rationalen Koeffizienten) einer Solenoide C positiv, dagegen jeder eindimensionale konvergente Zyklus von C homolog Null in C ist [18]). Einerseits ergibt sich daraus die Existenz [19]) der sog. wesentlichen, d. h. mit 1 nicht äquivalenten, Abbildungen von C auf S_1 und somit das Nichtverschwinden von $\mathfrak{B}_1(C)$, anderseits aber — auf Grund des Satzes 1 — das Verschwinden der Gruppe $\mathfrak{B}_1(R_3-C)$.

[18]) Siehe hierzu L. Vietoris, Math. Ann. 97 (1927), S. 465.

[19]) K. Borsuk, Fund. Math. 20 (1933), S. 224—231.

Es sei nun L ein einfacher Bogen, der bis an seine Eckpunkte in R_3-C liegt und zwei verschiedenen Komponenten des unzerlegbaren Kontinuums C gehörende Punkte [20]) verbindet. Die Menge $C'=C+L$ ist dann — wie man leicht verifizieren kann — eine Kurve [21]), die die im Korollar 1 formulierten Eigenschaften aufweist. Das Verschwinden der Gruppe $\mathfrak{B}_1(R_3-C')$ bedeutet aber, dass die Menge R_3-C' unikohärent [22]) ist. Dagegen zeigt die Zerlegung von C' in C und L, dass C' nicht unikohärent ist. Wir haben somit folgendes

Korollar 2. *Es gibt in R_3 Kurven, die selbst nicht unikohärent, deren Komplementärgebiete aber unikohärent sind.*

Es gilt dagegen folgendes

Korollar 3. *Die Unikohärenz des Aussenraumes ist eine innere Eigenschaft eines Teilkompaktums des R_n.*

7. Es sei K ein Teilkompaktum von R_n. Wir werden sagen, dass eine Funktion $f\in S_1^K$ und ein in R_n-K liegender Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ *stark parallel* sind, wenn es in R_n ein Polyeder $P\supset K$ gibt von der Art, dass f einer zu $\gamma^{(n-2)}$ parallelen Erweiterung auf P fähig ist. Sind nun f_1 und f_2 zwei Funktionen von S_1^K und $\gamma_1^{(n-2)}$, $\gamma_2^{(n-2)}$ zwei zu ihnen entsprechend stark parallele in R_n-K liegende Zyklen, so ist offenbar auch die Funktion $f_1\cdot f_2$ zu dem Zyklus $\gamma_1^{(n-2)}+\gamma_2^{(n-2)}$ stark parallel. Ist ferner f irgendeine in K mit 1 äquivalente Funktion, d. h. gibt es eine stetige reelle Funktion φ, für die $f(x)=e^{i\varphi(x)}$ gilt, so ist f zu jedem in R_n-K mit Null divisionshomologen Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ stark parallel. Um nämlich eine gewünschte Erweiterung von f zu bekommen, genügt es φ auf R_n stetig zu erweitern [23]) und

[20]) d. h. zwei Punkte von C, die nicht zu demselben echten Teilkontinuum von C gehören.

[21]) Unter einer Kurve verstehen wir ein eindimensionales Kontinuum.

[22]) Ein zusammenhängender Raum M heisst *unikohärent*, wenn der Durchschnitt je zweier zusammenhängender in M abgeschlossener Mengen, deren Vereinigungsmenge M ist, zusammenhängend ist. Für beliebige (nicht nur zusammenhängende) Räume werden wir unter „Unikohärenz" die Unikohärenz aller Komponenten verstehen. Falls dabei M lokal zusammenhängend ist, so ist die Unikohärenz von M mit dem Verschwinden der Gruppe $\mathfrak{B}_1(M)$ gleichbedeutend. Siehe dazu S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936). S. 70. Vgl. auch K. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), S. 190.

[23]) Nach einem bekannten Satz ist dies immer möglich. Siehe hierzu z. B. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin u. Leipzig 1927, S. 248.

die dadurch erhaltene Funktion $e^{i\varphi(x)}$ auf irgendeiner, hinreichend kleinen Polyederumgebung von K zu betrachten. Es folgt daraus, dass sich der starke Parallelismus als eine Relation zwischen den Elementen der Gruppen $\mathfrak{B}_1(K)$ und $B^{(n-2)}(R_n - K)$ ansehen lässt.

Wir beweisen nun folgenden

Satz 2. *Für jedes Teilkompaktum K von R_n wird durch starken Parallelismus ein Isomorphismus zwischen den Gruppen $\mathfrak{B}_1(K)$ und $B^{(n-2)}(R_n - K)$ erzeugt.*

Beweis. Es genügt offenbar drei folgende Tatsachen festzustellen:

1⁰ Zu jedem in $R_n - K$ liegenden Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ gibt es eine stark parallele Funktion $f \epsilon S_1^K$.

2⁰ Zu jeder Funktion $f \epsilon S_1^K$ gibt es in $R_n - K$ einen stark parallelen Zyklus $\gamma^{(n-2)}$.

3⁰ Damit die zu einem in $R_n - K$ liegenden Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ stark parallele Funktion $f \epsilon S_1^K$ äquivalent in K mit 1 sei, ist notwendig und hinreichend, dass $\gamma^{(n-2)}$ in $R_n - K$ divisionshomolog mit Null sei.

Ad 1⁰. Ist $\gamma^{(n-2)}$ irgendein in $R_n - K$ liegender Zyklus, so gibt es eine Polyederumgebung P von K derart, dass $\gamma^{(n-2)}$ in $R_n - P$ liegt. Auf Grund von **3** (Hilfssatz), gibt es eine Funktion $f \epsilon S_1^P$, die zu $\gamma^{(n-2)}$ parallel ist. Die nur in der Menge K betrachtete Teilfunktion von f ist dann zu $\gamma^{(n-2)}$ stark parallel.

Ad 2⁰. Eine beliebig gegebene Funktion $f \epsilon S_1^K$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung f' einer hinreichend kleinen Polyederumgebung $P \subset R_n$ von K in S_1 erweitern[24]). Auf Grund des in **3** bewiesenen Hilfssatzes, gibt es dann einen in $R_n - P \subset R_n - K$ liegenden Zyklus $\gamma^{(n-2)}$, der zu f' parallel und somit zu f stark parallel ist.

Ad 3⁰. Die Funktion $f \epsilon S_1^K$ und der in $R_n - K$ liegende Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ seien zueinander stark parallel. Es gibt dann eine zu $\gamma^{(n-2)}$ parallele Erweiterung f' von f auf ein Polyeder $P \supset K$. Ist nun einerseits $\gamma^{(n-2)} \approx 0$ in $R_n - K$, so gibt es ein Teilpolyeder P', für welches $K \subset P' \subset P$ und $\gamma^{(n-2)} \approx 0$ in $R_n - P'$ gilt. Nach Hilfssatz **3** ist dann $f' \sim 1$ in P' und auch $f \sim 1$ in K.

[24]) K. Borsuk, Fund. Math. 19 (1932), S. 224.

Ist andererseits $f \sim 1$ in K, so gibt es[25]) ein Polyeder P'', für welches $K \subset P'' \subset P$ und $f' \sim 1$ in P'' gilt. Auf Grund des Hilfssatzes **3** ist dann $\gamma^{(n-2)}$ in $R_n - P''$ und erst recht in $R_n - K$ divisionshomolog Null.

8. Der Begriff des Parallelismus (bzw. des starken Parallelismus), wie auch die Beweise der Sätze 1 und 2, lassen sich auch auf den Boden der allgemeinen Theorie der orthogonalen Gruppen und der Homomorphismenfolgen[26]) übertragen.

Es seien zunächst X' und X'' zwei Gruppen, die beide zu einer gewissen Gruppe Y orthogonal[27]) sind. In diesem Fall werden wir zwei Elemente $x' \epsilon X'$ und $x'' \epsilon X''$ *parallel* nennen, wenn $x' \cdot y = x'' \cdot y$[28]) für jedes $y \epsilon Y$ gilt. Durch diesen Parallelismus wird ein Isomorphismus zwischen den Gruppen X' und X'' bestimmt.

Es seien ferner zwei inverse Homomorphismenfolgen

$$X_1' \leftarrow X_2' \leftarrow \ldots \leftarrow X_k' \leftarrow \ldots \tag{7}$$

$$X_1'' \leftarrow X_2'' \leftarrow \ldots \leftarrow X_k'' \leftarrow \ldots \tag{8}$$

gegeben, die beide zu einer gewissen direkten Homomorphismenfolge

$$Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \ldots \rightarrow Y_k \rightarrow \ldots \tag{9}$$

orthogonal sind[29]). Wir werden zwei Elemente

$$x' = (x_1' \leftarrow x_2' \leftarrow \ldots \leftarrow x_k' \leftarrow \ldots) \quad \text{und} \quad x'' = (x_1'' \leftarrow x_2'' \leftarrow \ldots \leftarrow x_k'' \leftarrow \ldots)$$

von entsprechenden Limesgruppen[30]) X' und X''[31]) *parallel* nennen,

[25]) S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), S. 65.

[26]) Siehe hierzu L. Pontrjagin, Math. Ann. 105 (1931), S. 194—197 und H. Freudenthal, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), S. 414—418.

[27]) Im Sinne von L. Pontrjagin, l. c. S. 176.

[28]) Der Inhalt unseres Hilfssatzes aus **3** entspricht dem Fall, wo $X' = B^{(n-2)}(R_n - P)$, $X'' = \mathfrak{B}_1(P)$ und $Y = B^{(1)}(P)$ ist, wobei das Produkt $x' \cdot y$ (bzw. $x'' \cdot y$) die Verschlingung (bzw. den Grad) bezeichnet.

[29]) Im Sinne von L. Pontrjagin, l. c. S. 197.

[30]) Im Sinne von H. Freudenthal, l. c. S. 414.

[31]) Hierunter fällt unser Satz 1, wenn man $X_k' = B^{(n-2)}(R_n - P_k)$; $X_k'' = \mathfrak{B}_1(P_k)$, $Y_k = B^{(1)}(P_k)$ und $X' = B^{(n-2)}(K)$, $X'' = \mathfrak{B}_1(R_n - K)$ setzt. Da P_k eine Teilmenge von P_{k+1} ist, so werden dabei offenbar (bei identischer Zuordnung von Zyklen) die Relationen (7) und (8) erfüllt. Auch die Beziehung (9) wird erfüllt, wenn wir der Homomorphismus von $\mathfrak{B}_1(P_{k+1})$ in $\mathfrak{B}_1(P_k)$ durch Zuordnung jeder Funktion $f \epsilon S_1^{P_{k+1}}$ ihrer in P_k definierten Teilfunktion bestimmen.

wenn für alle hinreichend grosse k die Glieder x'_k und x''_k parallel sind. Durch den so definierten Parallelismus wird ein Isomorphismus zwischen den Limesgruppen X' und X'' bestimmt.

Sind schliesslich

$$X'_1 \to X'_2 \to \ldots \to X'_k \to \ldots \tag{10}$$

$$X''_1 \to X''_2 \to \ldots \to X'_k \to \ldots \tag{11}$$

zwei direkte Homomorphismenfolgen, die zu einer gewissen inversen Homomorphismenfolge

$$Y_1 \leftarrow Y_2 \leftarrow \ldots \leftarrow Y_k \leftarrow \ldots \tag{12}$$

orthogonal sind, so werden wir zwei Elemente

$$x' = (x'_l \to x'_{l+1} \to \ldots \to x'_{l+k} \to \ldots) \quad \text{und} \quad x'' = (x''_l \to x''_{l+1} \to \ldots \to x''_{l+k} \to \ldots)$$

von entsprechenden Limesgruppen [32] X' und X'' [33] *stark parallel* nennen, wenn für alle hinreichend grossen k die Glieder x'_k und x''_k parallel sind. Durch den so definierten starken Parallelismus wird ein Isomorphismus zwischen den Limesgruppen X' und X'' bestimmt[34].

9. Für lokal zusammenhängende Kompakta $K \subset R_n$ sind die Begriffe des Parallelismus und des starken Parallelismus gleichbedeutend. Ist nämlich $f \in S_1^K$ zu einem in $R_n - K$ liegenden Zyklus $\gamma^{(n-2)}$ parallel und bezeichnet f eine, nach dem Satz 2 existierende, zu $\gamma^{(n-2)}$ stark parallele Funktion von S_1^K, so ist der Grad $g(f; \Gamma^{(1)})$ von f auf irgendeinem konvergenten Zyklus $\Gamma^{(1)}$ von K dem Grade

---

[32]) Siehe hierzu L. Pontrjagin, l. c. S. 194.

[33]) Um unseren Satz 2 auf diesen allgemeinen Boden zu übertragen, braucht man nur $X'_k = B^{(n-2)}(P_k)$, $X''_k = \mathfrak{B}_1(R_n - P_k)$, $Y_k = B^{(1)}(R_n - P_k)$, $X' = B^{(n-2)}(R_n - K)$ und $X'' = \mathfrak{B}_1(K)$ zu setzen, wobei man den Homomorphismus von X'_k in X''_k u. s. w. ähnlicherweise wie in der Fussnote [31]) bestimmt.

[34]) Somit sind wir imstande, die Beweise der Sätze 1 und 2 dieser allgemeinen Theorie unterzuordnen. Um es ausführlich durchzuführen, braucht man nur noch festzustellen, dass die in den Fussnoten [31]) und [33]) angenommene Interpretation der Limesgruppen als Gruppen $B^{(n-2)}$ bzw. $\mathfrak{B}_1$ mit den Definitionen von Limesgruppen übereinstimmt. Was die Gruppe $B^{(n-2)}$ anbetrifft, so lässt sich dies ohne Mühe festzustellen. Der entsprechende Beweis für $\mathfrak{B}_1$ ist indessen in den Betrachtungen von **4** (Ad 1°, für die Gruppe $\mathfrak{B}_1(R_n - K)$) und von **7** (Ad 2° und 3°, für die Gruppe $\mathfrak{B}_1(K)$) enthalten.

$g(f'; \Gamma^{(1)})$ gleich. Da K lokal zusammenhängend vorausgesetzt war, so ergibt sich daraus [8]), dass $f \sim f'$ in K gilt und dass somit auch die Funktion f zu $\gamma^{(n-2)}$ stark parallel ist.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich folgender Satz von R. L. Wilder [35]):

Ist K ein lokal zusammenhängendes Kompaktum in R_n und $\gamma^{(n-2)}$ ein in $R_n - K$ liegender mit Null nicht divisionshomologer Zyklus, so gibt es in K eine einfach geschlossene Kurve Ω, für welche $\gamma^{(n-2)}$ in $R_n - \Omega$ nicht ≈ 0 ist.

Zum Beweis betrachten wir eine zu $\gamma^{(n-2)}$ parallele Funktion $f \in S_1^K$. Es ist dann f nicht ~ 1 in K, und somit gibt es eine einfache geschlossene Kurve $\Omega \subset K$, für welche f nicht ~ 1 in Ω ist. Die nur in Ω betrachtete Teilfunktion von f ist dann zu $\gamma^{(n-2)}$ parallel, woraus folgt, dass $\gamma^{(n-2)}$ nicht ≈ 0 in $R_n - \Omega$ ist.

10. M sei irgendein metrischer Raum. Falls der Rang der Gruppe $\mathfrak{B}_1(M)$ endlich ist, werden wir ihn mit $b_1(M)$ bezeichnen; im Falle seiner Unendlichkeit werden wir $b_1(M) = \infty$ setzen. Wir beweisen nun folgenden

Satz 3. *Für lokal zusammenhängende Kompakta K sind die Zahlen $p_1(K)$* [6]) *und $b_1(K)$ einander gleich.*

Beweis der Ungleichung $p_1(K) \leqslant b_1(K)$. Wir können annehmen, dass K eine Teilmenge des Hilbertschen Grundquaders Q_ω ist. Für jeden Punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \in Q_\omega$ und jedes natürliche n setzen wir $r_n(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Die Menge $r_n(K)$ ist dann eine abgeschlossene Teilmenge des Polyeders $Q_n = r_\eta(Q_\omega)$. Man kann nun in Q_n ein Teilpolyeder P_n finden, das eine Umgebung (rel. zu Q_n) von $r_n(K)$ bildet und dessen sämtliche Punkte höchstens um $\frac{1}{n}$ von $r_n(K)$ entfernt sind. Die Mengen

$$U_n = \underset{x \in Q_\omega}{E} [r_n(x) \in P_n] \tag{13}$$

bilden dann eine auf K zusammenschrumpfende Folge von Umgebungen (rel. zu Q_ω) von K.

---

[35]) R. L. Wilder, Annals of Math. 34 (1933), S. 443.

Wir betrachten nun irgendein System $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \ldots, \Gamma_s^{(1)}$ mit $\Gamma_i^{(1)} = \{{}_i\gamma_k^{(1)}\}$ von s homolog unabhängigen konvergenten Zyklen von K. Es gibt dann ein so grosses n, dass für ein gewisses j_0

$$(14) \qquad {}_i\gamma_j \approx {}_i\gamma_{j+1} \quad \text{in} \quad U_n$$

für jedes $j \geqslant j_0$ und $i = 1, 2, \ldots, s$ gilt, wobei die Zyklen ${}_1\gamma_{j_0}^{(1)}, {}_2\gamma_{j_0}^{(1)}, \ldots, {}_s\gamma_{j_0}^{(1)}$ homolog unabhängig in der Menge K sind. Nach (13) gibt es dann im Polyeder P_n ein System von s Zyklen ${}_i\bar{\gamma}_{j_0}^{(1)}$ (man kann z. B. ${}_i\bar{\gamma}_{j_0}^{(1)}$ gleich dem Bilde von ${}_i\gamma_{j_0}^{(1)}$ bei der Projektion $r_n(x)$ von U_n auf P_n setzen). Die Zyklen ${}_i\bar{\gamma}_{j_0}^{(1)}$ sind dann homolog unabhängig in P_n und somit gibt es ein System $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_{s'}^{(1)}$ $(s' \geqslant s)$ von in P_n liegenden Zyklen, die eine Homologiebasis für P_n — und somit auch (nach (13)) für U_n — bilden und für die

$$(15) \qquad {}_i\bar{\gamma}_{j_0}^{(1)} = m_i \cdot \gamma_i^{(1)}$$

bei einem gewissen ganzen $m_i \neq 0$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, s$ gilt. Mit Rücksicht auf (1) gibt es ferner ein System $f_1, f_2, \ldots, f_s$ von stetigen Abbildungen des Polyeders P_n in S_1 derart, dass

$$(16) \qquad g(f_i; \gamma_j^{(1)}) = \delta_{i,j} \quad \text{für jedes} \quad i, j = 1, 2, \ldots, s$$

gilt. Wir können nun jede Funktion f_i auf die ganze Menge U_n erweitern, indem wir $f_i(x) = f_i[r_n(x)]$ für jedes $x \in U_n$ setzen. Um nun den Beweis der Ungleichung $b_1(K) \geqslant p_1(K)$ zu beenden, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass die so erweiterten Funktionen f_i auf der Menge K unabhängig sind, d. h. dass die Beziehung

$$f(x) = \prod_{i=1}^{s} [f_i(x)]^{\alpha_i} \sim 1 \quad \text{in} \quad K$$

die Gleichungen $\alpha_i = 0$, für jedes $i = 1, 2, \ldots, s$ zur Folge hat. Zu diesem Zweck beachten wir, dass aus (14), (15) und (16) die Gleichheit

$$g(f; {}_i\gamma_j^{(1)}) = g(f; {}_i\gamma_{j_0}^{(1)}) = g(f; {}_i\bar{\gamma}_{j_0}^{(1)}) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot g(f_i; {}_i\bar{\gamma}_{j_0}^{(1)}) = \alpha_i \cdot m_i$$

für jedes $j \geqslant j_0$ folgt, d. h. dass $g(f; \Gamma_i^{(1)}) = \alpha_i \cdot m_i$ für jedes $i = 1, 2, .., s$ gilt. Da ferner die Beziehung $f \sim 1$ in K die Gleichheit $g(f; \Gamma_i^{(1)}) = 0$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, s$ zur Folge hat, so schliessen wir, dass $\alpha_i \cdot m_i = 0$, d. h. $\alpha_i = 0$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, s$ gilt, womit die gewünschte Ungleichung bewiesen ist.

B e w e i s d e r U n g l e i c h u n g $b_1(K) \leqslant p_1(K)$. Wir können annehmen, dass es für K eine endliche eindimensionale Homologiebasis

$$\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \ldots, \Gamma_s^{(1)}$$

gibt. Es sei nun $f_1, f_2, \ldots, f_{s+1}$ irgendein System von Funktionen aus S_1^K. Die Matrix $\|g(f_i; \Gamma_j^{(1)})\|$ hat dann s Zeilen und $s+1$ Spalten, und somit gibt es ein nicht verschwindendes ganzzahliges System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s+1}$ derart, dass

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i \cdot g(f_i; \Gamma_j^{(1)}) = 0 \quad \text{für jedes} \quad j = 1, 2, \ldots, s$$

gilt. Wenn wir nun $f(x) = \prod_{i=1}^{s+1} [f_i(x)]^{\alpha_i}$ setzen, so gilt $g(f; \Gamma_j^{(1)}) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, s$; hieraus und aus der Basiseigenschaft des Systems $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \ldots, \Gamma_s^{(1)}$ folgt die Beziehung $g(f; \Gamma^{(1)}) = 0$ für jeden konvergenten Zyklus $\Gamma^{(1)}$ von K. Dies bedeutet aber, dass $f \sim 1$ in K gilt, womit auch die Ungleichung $b_1(K) \leqslant s = p_1(K)$ bewiesen ist.

11. Aus den Sätzen 2 und 3 ergibt sich folgendes

Korollar 1. *Für lokal zusammenhängende Kompakta K in R_3 gilt*

$$b_1(K) = p_1(K) = b_1(R_3 - K) = p_1(R_3 - K).$$

Wenn man ferner beachtet, dass für lokal zusammenhängende Räume M das Verschwinden von $b_1(M)$ mit der Unikohärenz [22]) äquivalent ist, so bekommt man folgendes

Korollar 2. *Für lokal zusammenhängende Kompakta K in R_3 ist die Unikohärenz von K mit der Unikohärenz von $R_3 - K$ gleichbedeutend.*