D'après la propriété de l'ensemble N, chacun des ensembles $N(a_k)-N$ $(k=1, 2, 3,\ldots)$ est de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Donc (le nombre cardinal $2^{\aleph_0}$ n'étant pas, d'après le théorème de J. König, une somme d'une infinité dénombrable de nombres cardinaux $< 2^{\aleph_0}$), l'ensemble

$$R = S - N = \sum_{k=1}^{\infty} [N(a_k) - N] \tag{1}$$

est aussi de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Or, on a d'après (1):

$$N \supset S - R. \tag{2}$$

Supposons que l'ensemble S contienne un sous-ensemble parfait P. Comme on sait, en supprimant dans un ensemble parfait moins que $2^{\aleph_0}$ points, on obtient un ensemble contenant des sous-ensembles parfaits. L'ensemble $S-R$ contiendrait donc un sous-ensemble parfait, contrairement à (2) et à la propriété de l'ensemble N. L'ensemble S ne contient donc aucun sous-ensemble parfait et par suite est de mesure intérieure nulle.

De même, on démontre que l'ensemble

$$CN(a_1) + CN(a_2) + CN(a_3) + \ldots$$

est de mesure intérieure nulle.

L'ensemble N satisfait donc aux conditions de M. Szpilrajn.

Transformations continues en circonférence et la topologie du plan.

Par

Samuel Eilenberg (Warszawa).

Ce mémoire [1]) a pour but de développer une méthode permettant de traiter sans notions d'homologie toutes les propriétés topologiques qui s'expriment par le premier nombre de Betti. Les théorèmes sur l'unicohérence et sur les coupures du plan, que l'on démontrait jusqu'à présent par des procédés très divers, seront démontrés ici par une méthode unique. Dans beaucoup de cas on obtient ces théorèmes dans une forme plus générale (v. surtout parties I et II); le plus souvent c'est l'hypothèse de compacité qui se trouve superflue.

Table des matières.

---

[1]) Les deux premières parties de ce mémoire constituent ma Thèse présentée en septembre 1935 à l'Université de Varsovie pour obtenir le grade de Docteur en Mathématiques.

Les résultats principaux de ce mémoire ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématiques, Section de Varsovie, à la séance du 22. 3. 1935.

Quelques théorèmes des parties I et II se trouvent dans ma note [2].

Pour les chiffres entre crochets voir la table des ouvrages cités, p. 111.

III. Coupures de S_2, théorèmes quantitatifs.

I. LEMMES GÉNÉRAUX. UNICOHÉRENCE.

§ 1. Termes et notations.

Tous les espaces et les ensembles à considérer seront supposés métriques ou situés dans des espaces métriques.

$|x-y|$ désignera la distance, entre les points x et y,

$$\delta(X)=\sup_{x,y\in Y}|x-y|, \qquad \varrho(x,Y)=\inf_{y\in Y}|x-y|.$$

$U(x,r)$ désignera l'ensemble des points $y\in X$ tels que $|x-y|<r$.

R_n, K_n et S_n désigneront respectivement: l'espace euclidien à n dimensions, la sphère n-dimensionnelle (fermée) et la surface de la sphère $(n+1)$-dimensionnelle. En particulier, nous entenderons respectivement par R_1, K_1 et S_1 l'ensemble de tous les nombres réels, l'intervalle clos $\langle 1, 0\rangle$ et l'ensemble de tous les nombres complexes satisfaisant à la condition $|z|=1$.

$X\times Y$ désignera le produit *cartésien* des espaces X et Y, c. à d. l'ensemble de tous les couples (x,y) où $x\in X$ et $y\in Y$, métrisé par la formule

$$|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|=\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2}.$$

Y^X désignera la classe de toutes les transformations continues de X en sous-ensembles de Y. Dans le cas où l'espace Y est borné ou bien l'espace X compact, on considère Y^X comme un espace métrique, en posant pour $f_1, f_2\in Y^X$

$$|f_1-f_2|=\sup_{x\in X}|f_1(x)-f_2(x)|.$$

Une transformation $f\in S_1^X$ sera dite *inessentielle*, lorsqu'elle appartient à la même composante de l'espace S_1^X que la fonction $f_0(x)=1$. Dans le cas contraire on dit que la transformation f est *essentielle*.

Deux transformations $f_1, f_2\in S_1^X$ seront dites *homotopes*, lorsqu'il existe une transformation $g\in S_1^{X\times K_1}$ telle que $g(x,0)=f_1(x)$ et $g(x,1)=f_2(x)$ pour tout $x\in X$. Une transformation homotope à la transformation $f_0(x)=1$ est dite *homotope à l'unité*.

Etant donnée une transformation $f\in S_1^X$, nous écrirons

$$f\sim 1 \ \textit{sur l'ensemble}\ Y \qquad (Y\subset X),$$

lorsqu'il existe une fonction $\varphi\in R_1^Y$ telle que $f(x)=e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x\in Y$. Nous dirons qu'un espace X jouit de la *propriété* (b), lorsque

(b) $\qquad f\sim 1$ *sur* X *pour toute fonction* $f\in S_1^X$.

Les tranformations $f\in S_1^X$ telles que $f\sim 1$ sur X coïncident, comme il sera démontré plus loin, avec les transformations homotopes à l'unité. Dans le cas de X compact elles coïncident donc, comme on le voit facilement, avec les transformations inessentielles.

Un ensemble Y est dit *rétracte* d'un espace X, lorsque $Y\subset X$ et qu'il existe une fonction $g\in Y^X$ telle que $g(y)=y$ pour tout $y\in Y$.

§ 2. Propriétés générales des transformations continues en S_1.

Pour chaque couple $z_1, z_2\in S_1$ tel que $|z_1-z_2|<2$, nous désignerons par $[z_1,z_2]$ l'angle aigu (muni de son signe) que doit effectuer le vecteur $\overrightarrow{0z_1}$ jusqu'à sa coïncidence avec le vecteur $\overrightarrow{0z_2}$. On a évidemment

$$e^{i[z_1,z_2]}=\frac{z_2}{z_1}, \tag{1}$$

$$\textit{si}\quad \delta(z_1,z_2,\ldots,z_n)<1, \quad \textit{alors}\quad \sum_{i=1}^{n-1}[z_i,z_{i+1}]=[z_1,z_n]. \tag{2}$$

Pour démontrer (2), il suffit de remarquer qu'il existe une demi-circonférence contenant l'ensemble $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$.

Nous nous appuyerons dans la suite sur les propositions suivantes:

(3) *Prémisses:* 1^0 *l'espace* X *est connexe,*
2^0 $\varphi_1, \varphi_2 \in R_1^X$,
3^0 $e^{i\varphi_1(x)} = e^{i\varphi_2(x)}$ *pour tout* $x \in X$.
Thèse: il existe un entier k *tel que* $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 2k\pi$ *pour tout* $x \in X$.

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que la fonction $\frac{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}{2\pi}$ est continue et ne prend que des valeurs entières.

(4) *Prémisses:* 1^0 *l'espace* X *est connexe,*
2^0 $\varphi \in R_1^X$,
3^0 $\delta[f(X)] < 1$, *où* $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ *pour* $x \in X$.
Thèse: $\delta[\varphi(X)] \leqslant \pi \cdot \delta[f(X)]$.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$. Posons

$$\psi(x) = \varphi(x_0) + [(f(x_0), f(x)] \quad \text{pour} \quad x \in X.$$

On a $\psi \in R_1^X$ et d'après (1): $e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi(x_0)} e^{i[f(x_0), f(x)]} = f(x_0) \cdot \frac{f(x)}{f(x_0)} = f(x) = e^{i\varphi(x)}$. Comme $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$, on conclut de 1^0 et de (3) que $\varphi(x) = \psi(x)$ pour tout $x \in X$, d'où

$$\delta[\varphi(X)] \leqslant 2 \sup_{x \in X} |[f(x_0), f(x)]| \leqslant 2 \sup_{x \in X} \frac{\pi}{2} |f(x_0) - f(x)| \leqslant \pi \cdot \delta[f(X)],$$

(5) *Prémisses:* 1^0 *les ensembles* X_1 *et* X_2 *sont fermés (ou ouverts) dans l'espace* $X_1 + X_2$,
2^0 *l'ensemble* $X_1 \cdot X_2$ *est connexe,*
3^0 $f \in S_1^{X_1+X_2}$
4^0 $f \sim 1$ *sur* X_1 *et sur* X_2.
Thèse: $f \sim 1$ *sur* $X_1 + X_2$.

Démonstration. D'après 4^0, il existe deux fonctions $\varphi_1 \in R_1^{X_1}$ et $\varphi_1 \in R_1^{X_2}$ telles que $f(x) = e^{i\varphi_1(x)}$ pour $x \in X_1$ et que $f(x) = e^{i\varphi_2(x)}$ pour $x \in X_2$. En vertu de 2^0 et de (3), il existe donc un entier k tel que $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 2k\pi$ pour tout $x \in X_1 \cdot X_2$. En posant

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_1$$
$$\varphi(x) = \varphi_2(x) + 2k\pi \quad \text{pour} \quad x \in X_2,$$

on a $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X_1 + X_2$ et $\varphi \in R_1^{X_1+X_2}$ selon 1^0. Par conséquent $f \sim 1$ sur $X_1 + X_2$, c. q. f. d.

(6) *Prémisses:* 1^0 $f \in S_1^X$,
2^0 $f \sim 1$ *sur un ensemble* $Y \subset X$.
Thèse: il existe un ensemble ouvert $U \supset Y$ *tel que* $f \sim 1$ *sur* U.

Démonstration. D'après 2^0, il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $f(y) = e^{i\varphi(y)}$ pour $y \in Y$. Faisons correspondre à tout $y \in Y$ un $\varepsilon_y > 0$ tel que

(i) $$\delta\{f[U(y, \varepsilon_y)]\} < 1,$$

(ii) $$\delta\{\varphi[Y \cdot U(y, 2\varepsilon_y)]\} < \pi.$$

Posons

$$\psi(x) = \varphi(y) + [f(y), f(x)] \quad \text{pour} \quad x \in U(y, \varepsilon_y).$$

On a d'après (1)

(iii) $$e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi(y)} \cdot e^{i[f(y), f(x)]} = f(y) \cdot \frac{f(x)}{f(y)} = f(x).$$

La démonstration sera finie, lorsqu'il sera prouvé que la relation

(iv) $$x \in U(y_1, \varepsilon_{y_1}) \cdot U(y_2, \varepsilon_{y_2})$$

entraîne la relation

(v) $$\varphi(y_1) + [f(y_1), f(x)] = \varphi(y_2) + [f(y_2), f(x)].$$

Or, on a d'après (i)

$$|[f(y_1), f(x)]| < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad |[f(y_2), f(x)]| < \frac{\pi}{2}$$

et selon (iv)

$$\text{soit} \quad y_1 \in U(y_2, 2\varepsilon_{y_2}), \quad \text{soit} \quad y_2 \in U(y_1, 2\varepsilon_{y_1}),$$

donc selon (ii)

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \pi.$$

Finalement, on obtient

$$|\varphi(y_1) + [f(y_1), f(x)] - \varphi(y_2) - [f(y_2), f(x)]| < 2\pi$$

ce qui entraîne (v) en vertu de (iii).

(7) *Prémisses:* 1^0 *l'espace X est séparable,*
2^0 *pour toute composante Y de X et tout ensemble ouvert $U\supset Y$, il existe un ensemble U' ouvert, fermé et tel que $Y\subset U'\subset U$,*
3^0 $f\in S_1^X$,
4^0 $f\sim 1$ *sur toute composante Y de X.*

Thèse: $f\sim 1$ *sur* X.

Démonstration. En vertu de 4^0, (6) et 2^0, on peut faire correspondre à toute composante Y de X un ensemble $U(Y)\supset Y$ ouvert, fermé et tel que $f\sim 1$ sur $U(Y)$. D'après 1^0, on peut appliquer le th. de Lindelöf[2]) et obtenir une suite $\{Y_n\}$ telle que $X=\sum_{n=1}^{\infty}U(Y_n)$. En posant $V_n=U(Y_n)-\sum_{i=1}^{n-1}U(Y_i)$, on obtient $X=\sum_{n=1}^{\infty}V_n$. Or, les ensembles V_n sont ouverts, fermés, disjoints deux à deux et on a $f\sim 1$ sur chacun d'eux. Il en résulte que $f\sim 1$ sur X.

Remarque. La prémisse 2^0 de (7) est vérifiée pour tout espace X qui est soit compact, soit localement connexe, soit de dimension 0, soit contenu dans R_1.

(8) et (8′) *Prémisses:* 1^0 *l'espace Y est connexe et localement connexe,*
$1'^0$ *Y est un continu,*
2^0 $f\in S_1^{X\times Y}$,
3^0 *pour tout $x\in X$, on a $f\sim 1$ sur $(x)\times Y$,*
4^0 *il existe un $y_0\in Y$ tel que $f\sim 1$ sur $X\times(y_0)$.*

Thèse: $f\sim 1$ *sur* $X\times Y$.

Démonstration. D'après 4^0, il existe une fonction $\varphi_0\in R_1^X$ telle que $f(x,y_0)=e^{i\varphi_0(x)}$ pour $x\in X$. D'après 3^0, il existe pour tout $x\in X$ une fonction $\psi_x\in R_1^Y$ telle que $f(x,y)=e^{i\psi_x(y)}$ pour tout $(x,y)\in X\times Y$. Comme $e^{i\varphi_0(x)}=e^{i\psi_x(y_0)}$, on peut donc supposer que $\varphi_0(x)=\psi_x(y_0)$ pour tout $x\in X$ (en remplaçant, s'il y a lieu, $\psi_x(y)$ par $\psi_x(y)-\psi_x(y_0)+\varphi_0(x)$). Posons $\varphi(x,y)=\psi_x(y)$ pour $(x,y)\in X\times Y$. On a évidemment

(vi) $$f(x,y)=e^{i\varphi(x,y)} \quad \text{pour} \quad (x,y)\in X\times Y,$$

(vii) $$\varphi(x,y_0)=\varphi_0(x) \quad \text{pour} \quad x\in X.$$

[2]) C. Kuratowski [1], p. 102.

La démonstration sera achevée, lorsqu'il sera prouvé que la fonction $\varphi(x,y)$ est continue sur $X\times Y$, ce qui se réduit au cas où X se compose d'une suite infinie $\{x_n\}$ convergeant vers un point x_0. Dans ce dernier cas, il suffit de démontrer la continuité de φ seulement dans les points de $(x_0)\times Y$.

Ad (8). Considérons une suite arbitraire $\{y'_n\}$ de points de Y convergeant vers un point $y'_0\in Y$. La suite $\{(x_n,y'_n)\}$ converge alors vers (x_0,y'_0), et on a en vertu de (vi) une des deux relation suivantes:

(viii) $$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n,y'_n)=\varphi(x_0,y'_0)$$

(ix) $|\varphi(x_{n_i},y'_{n_i})-\varphi(x_0,y'_0)|>\pi$ *pour une suite croissante d'indices* $\{n_i\}$.

La fonction f étant continue, il existe un entourage $U\subset Y$ de y'_0, tel que $\delta[f(x_0,U)]<\frac{1}{2}$ et que $\delta[f(x_n,U)]<\frac{1}{2}$ pour tout $n>n_0$ où n_0 est suffisamment grand. L'espace Y étant localement connexe, on peut supposer que l'ensemble ouvert U est connexe. Comme la fonction $\varphi(x,y)$ est par définition continue pour x fixe, on a en vertu de (4)

$$\delta[\varphi(x_0,U)]<\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \delta[\varphi(x_n,U)]<\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad n>n_0.$$

Considérons maintenant une suite arbitraire $\{y''_n\}$ de Y, convergeant vers un point y''_0 de U. On a $|\varphi(x_0,y'_0)-\varphi(x_0,y''_0)|<\frac{\pi}{2}$ et $|\varphi(x_n,y'_n)-\varphi(x_n,y''_n)|<\frac{\pi}{2}$ à partir d'un n suffisamment grand. Il en résulte que si c'est (viii) qui se présente, la fonction φ est continue en tout point de $(x_0)\times U$, tandis que si c'est (ix) qui a lieu, la fonction φ n'est continue dans aucun point de $(x_0)\times U$. En vertu de la connexité de Y il suffit donc d'indiquer une suite $\{y'_n\}$ satisfaisant à (viii), pour en déduire la continuité de φ en tout point de $(x_0)\times Y$. Or, on obtient une telle suite, en posant p. ex. $y'_n=y_0$, puisque $\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n,y_0)=\varphi(x_0,y_0)$ en vertu de (vii).

Ad (8′). Conformément à 3^0, on a $f\sim 1$ sur toute composante de $X\times Y$. Or, l'espace $X\times Y$ étant compact, il résulte de (7) (remarque) que $f\sim 1$ sur $X\times Y$. Soit $\psi\in R_1^{X\times Y}$ une fonction telle que

(x) $$f(x,y)=e^{i\psi(x,y)} \quad \text{pour} \quad (x,y)\in X\times Y.$$

La démonstration sera achevée, lorsqu'on aura établi la continuité de la fonction $\varphi(x,y)-\psi(x,y)$, ce qui équivaut en vertu de (vii) à la continuité de la fonction $\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)-[\psi(x,y)-\psi(x,y_0)]$.

Il suffit donc d'établir l'existence d'une suite d'entiers $\{k_n\}$ telle que $\varphi(x_n, y) - \psi(x_n, y) = 2k_n\pi$, pour tout $y \in Y$ et tout $n = 1, 2, \ldots$ Or, leur existence résulte de (vi), (x), et de (3).

(9) *Pour qu'une transformation $f \in S_1^X$ soit inessentielle, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que l'ensemble $\varphi(X)$ soit borné et que l'on ait $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Pour prouver que la condition est suffisante, on n'a qu'à poser $f_t(x) = e^{it\varphi(x)}$, pour obtenir un continu situé dans S_1^X et qui joint les fonctions f et $f_0(x) \equiv 1$.

La condition est nécessaire. Remarquons d'abord que la condition est satisfaite en particulier pour la fonction $f_0(x) \equiv 1$; il suffit notamment de poser $\varphi_0(x) \equiv 0$. Soient maintenant $f_1, f_2 \in S_1^X$ deux fonctions telles que $|f_1 - f_2| < 2$. Supposons qu'il existe une fonction *bornée* $\varphi_1 \in R_1^X$ telle que $f_1(x) = e^{i\varphi_1(x)}$ pour $x \in X$. En posant $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) + [f_1(x), f_2(x)]$, on obtient une fonction continue et bornée qui remplit en vertu de (1) l'égalité

$$e^{i\varphi_2(x)} = e^{i\varphi_1(x)} \cdot e^{i[f_1(x), f_2(x)]} = f_1(x) \cdot \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = f_2(x).$$

Nous avons ainsi prouvé que les fonctions $f \in S_1^X$ qui remplissent la condition considérée forment dans S_1^X un ensemble ouvert, fermé et contenant la transformation inessentielle f_0. Or, l'ensemble des transformations inessentielles étant par définition connexe, elles remplissent toutes cette condition.

Théorème 1. *Etant donnée une transformation $f \in S_1^X$, pour que l'on ait $f \sim 1$ sur X, il faut et il suffit qu'elle soit homotope à l'unité.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, supposons que $\varphi \in R_1^X$ est une transformation telle que l'on ait $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X$. En posant

$$g(x, t) = e^{it\varphi(x)} \quad \text{pour} \quad (x, t) \in X \times K_1,$$

on vérifie que f est homotope à l'unité.

La condition est suffisante. Soit $g \in S_1^{X \times K_1}$ une fonction telle que $g(x, 0) = f(x)$ et $g(x, 1) = 1$ pour $x \in X$. On a $g \sim 1$ sur $X \times (1)$. Chaque transformation continue de K_1 étant évidemment inessentielle, on a en vertu de (9): $g \sim 1$ sur $(x) \times K_1$ pour tout $x \in X$. Il en résulte selon (8) que $g \sim 1$ sur $X \times K_1$ et par conséquent que $f \sim 1$ sur X.

(10) *Prémisses: 1° Les ensembles X_1 et X_2 sont fermés,*
2° $f \in S_1^{X_1}$,
3° $f \sim 1$ sur $X_1 \cdot X_2$.

Thèse: la fonction f admet une extension f' sur $X_1 + X_2$, telle que $f' \sim 1$ sur X_2.

Démonstration. Soit $\varphi \in R_1^{X_1 \cdot X_2}$ une fonction telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X_1 \cdot X_2$. Il existe [3]) une fonction $\varphi' \in R_1^{X_2}$ telle que $\varphi'(x) = \varphi(x)$ pour $x \in X_1 \cdot X_2$. Il suffit de poser

$$f'(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_1$$
$$f'(x) = e^{i\varphi'(x)} \quad \text{pour} \quad x \in X_2$$

§ 3. Espaces unicohérents.

Un espace connexe X est dit *unicohérent*, lorsque pour toute décomposition de X en deux ensembles X_1 et X_2 fermés et connexes, l'ensemble $X_1 \cdot X_2$ est connexe.

Théorème 2. *Tout espace connexe X, jouissant de la propriété* (b) *est unicohérent.*

Démonstration. Supposons que X ne soit pas unicohérent. Il existe alors deux ensembles connexes et fermés X_1 et X_2 et deux ensembles fermés P_1 et P_2 tels que $X = X_1 + X_2$, $X_1 \cdot X_2 = P_1 + P_2$, $P_1 \neq 0 \neq P_2$ et $P_1 \cdot P_2 = 0$. Posons

$$\psi(x) = \pi \frac{\varrho(x, P_1)}{\varrho(x, P_1) + \varrho(x, P_2)} \quad \text{pour} \quad x \in X$$
$$f(x) = e^{i\psi(x)} \quad \text{pour} \quad x \in X_1$$
$$f(x) = e^{-i\psi(x)} \quad \text{pour} \quad x \in X_2.$$

On a $\psi(x) = 0$ pour $x \in P_1$ et $\psi(x) = \pi$ pour $x \in P_2$, de sorte que la fonction f est univoque et $f \in S_1^X$.

L'espace X jouissant de la propriété (b), il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X$. On a donc $e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X_1$, $e^{-i\psi(x)} = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X_2$ et il existe d'après (3) deux entiers k_1 et k_2 tels que $\varphi(x) = \psi(x) + 2k_1\pi$ pour $x \in X_1$ et que $\varphi(x) = -\psi(x) + 2k_2\pi$ pour $x \in X_2$. Soient $x_1 \in P_1$ et $x_2 \in P_2$. On a $\psi(x_1) = 0$ et $\psi(x_2) = \pi$. En substituant x_1 et x_2 à x, on obtient d'une part $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ et d'autre part $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$.

[3]) C. Kuratowski [1], p. 211.

Théorème 3. *Pour qu'un espace X, connexe et localement connexe soit unicohérent, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété* (b)[4].

Démonstration. En vertu du th. précédent, il suffit de montrer que, pour X localement connexe et unicohérent, on a $f\sim 1$ sur X, quelle que soit la fonction $f\in S_1^X$.

Considérons une suite finie d'arcs ouverts $L_1, L_2, \dots, L_n$ tels que

$$\text{(i)}\qquad S_1 = L_1+L_2+\dots+L_n,\quad \delta(L_i)<\tfrac{1}{2},\quad L_iL_{i+1}\neq 0,\quad \overline{L}_i\cdot\overline{L}_{i+k}=0 \text{ pour } |k|>1,$$

les indices étant à traiter mod n.

Soit $\boldsymbol{K}$ la classe des composantes des ensembles $f^{-1}(L_i)$. Chaque composante d'un ensemble ouvert situé dans un espace localement connexe étant ouverte, la classe $\boldsymbol{K}$ se compose d'ensembles ouverts et connexes. En remarquant que X est connexe, il existe pour tout couple $x', x''\in X$ une chaîne entre eux, c. à d. une suite $A_1, A_2, \dots, A_p$ d'éléments de la classe $\boldsymbol{K}$ telle que $x'\in A_1$, $x''\in A_p$ et que $A_i\cdot A_{i+1}\neq 0$ pour $0<i<p$.

Faisons correspondre à tout $A_i\in\boldsymbol{K}$ un point $x_i\in A_i$ et considérons le nombre

$$\text{(ii)}\qquad I(x',x'') = [f(x'),f(x_1)] + \sum_{i=1}^{p-1}[f(x_i),f(x_{i+1})] + [f(x_p),f(x'')]$$

où $A_1, A_2, \dots, A_p$ est une chaîne entre les points $x', x''\in X$. Ce nombre existe, puisque d'après la définition de la chaîne et d'après (i) on a

$$|f(x')-f(x_1)|<\tfrac{1}{2},\qquad |f(x_i)-(x_{i+1})|<1 \quad\text{et}\quad |f(x_p)-f(x'')|.$$

Nous allons montrer que le nombre $I(x',x'')$ ne dépend pas du choix de la chaîne $A_1, A_2, \dots, A_p$, c. à d. que pour toute chaîne $A_1', A_2', \dots, A_{p'}'$ entre x' et x'' on a la relation

$$[f(x'),f(x_1)] + \sum_{i=1}^{p-1}[f(x_i),f(x_{i+1})] + [f(x_p),f(x'')] =$$
$$= [f(x'),f(x_1')] + \sum_{i=1}^{p'-1}[f(x_i'),f(x_{i+1}')] + [f(x_{p'}'),f(x'')].$$

Or, en vertu de (i)

$$|f(x')-f(x_1)|<\tfrac{1}{2}\quad\text{et}\quad |f(x')-f(x_1')|<\tfrac{1}{2},$$

[4]) Dans le cas où l'espace X est quasi-péanien (voir plus loin p. 84), ce théorème a été établi (dans un énoncé différent) par M. K. Borsuk [2], p. 190. Une courte démonstration pour le cas où X est un continu localement connexe se trouve dans ma note [1]. Dans le cas d'espaces quasi-péaniens, on trouve les th. 4—7 qui vont suivre aussi chez K. Borsuk [2], p. 197 et 204 et [1], p. 155.

d'où en vertu de (2)

$$[f(x'),f(x_1)]-[f(x'),f(x_1')] = [f(x_1'),f(x_1)],$$

et d'une façon analogue

$$[f(x_p),f(x'')]-[f(x_{p'}'),f(x'')] = [f(x_p),f(x_{p'}')].$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{i=1}^{p-1}[f(x_i),f(x_{i+1})] + [f(x_p),f(x_{p'}')] + \sum_{i=p'-1}^{1}[f(x_{i+1}'),f(x_i')] + [f(x_1'),f(x_1)] = 0$$

ou encore que

$$\text{(iii)}\qquad \sum_{i=1}^{p-1}[f(x_i),f(x_{i+1})]=0$$

pour toute chaîne „fermée" $A_1, A_2, \dots, A_p=A_1$. Dans le cas où cette chaîne contient deux éléments égaux, p. ex. lorsque $A_k=A_l$ pour $1\leqslant k<l<p$, on considère deux chaînes

$$A_1, A_2, \dots, A_k=A_l, A_{l+1}, \dots, A_p=A_1,$$
$$A_k, A_{k+1}, \dots, A_l=A_k,$$

dont chacune a un nombre plus petit d'éléments que la chaîne fermée primitive. On peut donc supposer que les éléments de la chaîne sont distincts (excepté A_1 et A_p).

Soit A_k un élément arbitraire de cette chaîne. Il existe par définition un j tel que $f(A_k)\subset L_j$. Soit $R=\sum_{A\in \boldsymbol{K}-(A_k)} A$. La chaîne $A_1, A_2, \dots, A_p$ étant fermée et ses éléments étant différents, l'ensemble $B=\sum_{i\neq k} A_i$ est connexe et on a $B\subset R$. Soit P celle des composantes de R qui contient l'ensemble connexe B. L'ensemble $A_k+(R-P)$ est dans ces conditions connexe, puisque P est ouvert et fermé dans R. Posons

$$X_1=\overline{P},\qquad X_2=\overline{A_k+(R-P)}.$$

Comme $\overline{P}\cdot(\overline{R-P})\cdot R=0$ et $\overline{A}_k\cdot\overline{f^{-1}(L_j)-A_k}\cdot f^{-1}(L_j)=0$, les ensembles P et A_k étant respectivement des composantes d'ensembles ouverts R et $f^{-1}(L_j)$ dans l'espace localement connexe X, on a

$$X_1\cdot X_2 = \overline{P}\cdot\overline{A}_k + \overline{P}\cdot(\overline{R-P}) = \overline{P}\cdot\overline{A}_k + \overline{P}\cdot(\overline{R-P})\cdot A_k + \overline{P}\cdot(\overline{R-P})\cdot R =$$
$$= \overline{P}\cdot A_k \subset \overline{A}_k\cdot\overline{R} = \overline{A}_k\cdot[\overline{\sum_{i\neq j} f^{-1}(L_i)} + \overline{f^{-1}(L_j)-A_k}] =$$
$$= \overline{A}_k\cdot\overline{\sum_{i\neq j} f^{-1}(L_i)} + \overline{A}_k\cdot[\overline{f^{-1}(L_j)-A_k}]\cdot\sum_{i\neq j} f^{-1}(L_i) + \overline{A}_k\cdot[\overline{f^{-1}(L_j)-A_k}]\cdot f^{-1}(L_j) =$$
$$= \overline{A}_k\cdot\sum_{i\neq j}\overline{f^{-1}(L_i)} \subset \overline{f^{-1}(L_j)}\cdot\sum_{i\neq j}\overline{f^{-1}(L_i)} = f^{-1}(\overline{L}_j\cdot\sum_{i\neq j}\overline{L}_i),$$

donc d'après (i)

$$X_1 \cdot X_2 \subset f^{-1}(\overline{L}_j \cdot \overline{L}_{j-1}) + f^{-1}(\overline{L}_j \cdot \overline{L}_{j+1}),$$
$$\overline{L}_{j-1} \cdot \overline{L}_{j+1} = 0.$$

L'unicohérence de X entraîne la connexité de $X_1 \cdot X_2$. On peut donc supposer que $X_1 \cdot X_2 \subset f^{-1}(\overline{L}_j \cdot \overline{L}_{j+1})$, d'où $B \cdot A_k \subset f^{-1}(\overline{L}_{j+1})$, ce qui donne $f(A_{k-1}) + f(A_{k+1}) \subset L_{j+1}$. En remplaçant k successivement par $1, 2, \ldots, p$, on obtient

$$f(A_1) + f(A_2) + \ldots + f(A_p) \subset L_j + L_{j+1},$$

d'où en vertu de (i)

$$\delta[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p)] < 1.$$

En y appliquant (2), on en tire (iii).

Nous avons ainsi démontré que le nombre $I(x', x'')$ est une fonction des variables $x', x'' \in X$ seules. Cette fonction est continue, puisqu'elle est continue sur chaque ensemble de la classe $\boldsymbol{K}$.

Soit $x_0 \in f^{-1}(1)$ et posons $\varphi(x) = I(x_0, x)$. On a $\varphi \in R_1^X$ et d'après (ii) et (1)

$$e^{i\varphi(x)} = e^{iI(x_0, x)} = e^{i[f(x_0), f(x_1)]} \left(\prod_{i=1}^{p-1} e^{i[f(x_i), f(x_{i+1})]} \right) . e^{i[f(x_p), f(x)]} =$$
$$= \frac{f(x_1)}{f(x_0)} \left(\prod_{i=1}^{p-1} \frac{f(x_{i+1})}{f(x_i)} \right) \frac{f(x)}{f(x_p)} = \frac{f(x)}{f(x_0)} = f(x),$$

de sorte que $f \sim 1$ sur X, c. q. f. d.

Les th. 2 et 3 entraînent en vertu de (5) et (8) les deux théorèmes suivants:

Théorème 4. *La somme $X_1 + X_2$ de deux ensembles fermés (ou ouverts), localement connexes, unicohérents et dont le produit $X_1 \cdot X_2$ est connexe, est un ensemble unicohérent* [4]).

Théorème 5. *Le produit cartésien $X \times Y$ de deux espaces localement connexes et unicohérents est unicohérent* [4]).

En remarquant que R_n est un produit cartésien de n droites R_1 (de même que K_n des segments K_1), et que la sphère S_{n+1} est une somme de deux ensembles homéomorphes à K_{n+1} et dont le produit est connexe, on obtient le bien connu

Corollaire 6. *Pour tout $n = 1, 2, \ldots$, les espaces R_n, K_n, et S_{n+1} sont unicohérents.*

Théorème 7. *Tout rétracte Y d'un espace X localement connexe et unicohérent est unicohérent* [4]).

Démonstration. Soit $g \in Y^X$ une fonction telle que $g(y) = y$ pour $y \in Y$. Considérons une fonction arbitraire $f \in S_1^Y$. On a $fg \in S_1^X$ et, d'après le th. 3, $fg \sim 1$ sur X. Par conséquent $fg \sim 1$ sur Y, d'où $f \sim 1$ sur Y, puisque $fg = f$ sur Y.

Théorème 8. *Soit $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ où $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ sont des ensembles localement connexes et unicohérents. Si, en outre, pour toute suite convergente de points de X, il existe un indice n tel que X_n contient tous les points de cette suite, l'espace X est unicohérent.*

Démonstration. Soit $f \in S_1^X$. Soit x_1 un point arbitraire de X_1. Chaque X_n étant par hypothèse localement connexe et unicohérent, il existe une fonction $\varphi_n \in R_1^{X_n}$ telle que $f(x) = e^{i\varphi_n(x)}$ pour $x \in X_n$. Comme $e^{i\varphi_n(x_1)} = e^{i\varphi_1(x_1)}$, on peut supposer que $\varphi_n(x_1) = \varphi_1(x_1)$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Par suite de la connexité de X_n et de l'égalité $\varphi_n(x_1) = \varphi_{n+1}(x_1)$, on a en vertu de (3) $\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x)$ pour $x \in X_n$. Posons $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ pour $x \in X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. On a évidemment $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X$. Reste donc à démontrer que la fonction φ est continue. Soit à ce but $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ dans X; soit n un indice, tel que $x_k \in X_n$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Par conséquent $\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_n(x) = \varphi(x)$.

Remarquons que la démonstration précédente repose sur la proposition suivante, que nous avons démontrée implicitement:

(11) *Prémisses:* 1° $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *où les ensembles $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ sont connexes,*

2° *pour toute suite convergente de points de X, il existe un indice n tel que X_n contient tous les points de cette suite,*

3° $f \in S_1^X$,

4° $f \sim 1$ *sur* X_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Thèse: $f \sim 1$ *sur* X.

Remarque. On peut ajouter la connexité locale aux thèses des th. 4—8. [5])

---

[5]) A ce § se rattache encore le th. 10 de la partie II.

§ 4. Espaces compacts.

Théorème 9. *Pour qu'une transformation $f \in S_1^X$ d'un espace compact X soit inessentielle, il faut et il suffit que $f \sim 1$ sur X.*

La démonstration s'obtient directement de (9).

Corollaire 10. *Si l'espace X est compact, alors pour que l'espace S_1^X soit connexe, il faut et il suffit que X jouisse de la propriété* (b).

Théorème 11. *Si les espaces X_1 et X_2 sont compacts et les espaces $S_1^{X_2}$, $S_1^{X_1}$ et $X_1 \cdot X_2$ sont connexes, l'espace $S_1^{X_1+X_2}$ est aussi connexe.*

La démonstration résulte immédiatement du cor. 10 et de (5).

Théorème 12. *Si les espaces X et Y sont compacts et les espaces S_1^X et S_1^Y connexes, alors l'espace $S_1^{X \times Y}$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f \in S_1^{X \times Y}$. D'après le cor. 10, on a $f \sim 1$ sur $(x) \times Y$ pour tout $x \in X$ et sur $X \times (y)$ pour tout $y \in Y$. En désignant donc par Y' une composante arbitraire de Y_r on conclut de (8') que $f \sim 1$ sur $X \times Y'$, ce qui entraîne en vertu de (7) (remarque) que $f \sim 1$ sur $X + Y$.

Théorème 13. *Si l'espace S_1^X est connexe, toute composante Y de X est compacte.*

Démonstration. Supposons par contre que Y ne soit pas compact. Il existe alors dans Y une suite infinie $\{y_k\}$ ne contenant aucune suite convergente. Elle forme donc un sous-ensemble fermé de X. Il existe[3] par conséquent une fonction $\psi \in R_1^X$, telle que $\psi(y_k) = k$ pour $k = 1, 2, \ldots$ En posant $f(x) = e^{i\psi(x)}$ pour $x \in X$, on a $f \in S_1^X$ et, en vertu de (9), il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$, telle que l'ensemble $\varphi(X)$ est borné et que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X$. On a donc $e^{i\varphi(x)} = e^{i\psi(x)}$ avec $\varphi(Y)$ borné et avec $\psi(Y)$ non borné, ce qui est en contradiction avec (3).

Théorème 14. *X étant une courbe simple fermée, toute homéomorphie $f \in S_1^X$ est une transformation essentielle.*

Démonstration. Dans le cas contraire, il existerait une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X$. La fonction φ serait donc une homéomophie, ce qui est impossible, puisque R_1 ne contient aucun sous-ensemble homéomorphe de S_1.

Corollaire 15. *S_1 n'est pas un rétracte de K_2.*

Remarque. Le th. 14 entraîne, par un raisonnement très bref[6]), le „Fixpunktsatz" pour K_2 (cas particulier du „Fixpunktsatz" de M. L. E. J. Brouwer), à savoir qu'il existe pour tout $f \in K_2^{K_2}$ un $z \in K_2$ tel que $f(z) = z$.

Notons encore les théorèmes suivants:

Théorème 16. *Etant donnée une transformation continue g à tranches[7]) connexes d'un espace compact X tel que l'espace S_1^X est connexe, l'espace $S_1^{g(X)}$ l'est aussi[8]).*

Théorème 17. *Etant donnée une transformation intérieure g[9]) d'un espace compact X tel que l'espace S_1^X est connexe, l'espace $S_1^{g(X)}$ l'est aussi[10]).*

II. COUPURES DE S_2, THÉORÈMES QUALITATIFS.

§ 1. Le théorème fondamental et quelques unes de ses appliquations.

Nous allons considérer dans la suite la surface sphérique S_2, composée du plan des nombres complexes R_2 et du point $z' = \infty$. A tout point $z \in S_2 - (z') - (z'')$, où $z'' = 0$, nous faisons correspondre le point $r(z) = \frac{z}{|z|}$. On a ainsi $r \in S_1^{S_2 - (z') - (z'')}$.

On dit qu'un ensemble $Y \subset X$ *coupe* X entre les points $x_1, x_2 \in X$, lorsqu'il n'existe aucun continu $K \subset X - Y$ tel que $x_1, x_2 \in K$. D'un ensemble $Y \subset X$ qui ne coupe X entre aucun couple $x_1, x_2 \in X - Y$, on dit qu'il ne coupe pas X.

Théorème 1. *Pour qu'un ensemble $X \subset S_2 - (z') - (z'')$ ne coupe pas S_2 entre les points z' et z'', il faut et il suffit que $r \sim 1$ sur X.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, soit $K \subset S_2 - X$ un continu contenant z' et z''. Pour prouver que $r \sim 1$ sur $X \subset S_2 - K$, il suffit de prouver qu'il en est ainsi sur chaque

[6]) K. Borsuk [3], p. 385.
[7]) c. à d. ensembles de la forme $g^{-1}(y)$ pour $y \in g(X)$.
[8]) Pour la démonstration voir S. Eilenberg [2], p. 165, th. 5.
[9]) c. à d. que l'ensemble $g(U)$ est ouvert dans $g(X)$, si U était ouvert dans X.
[10]) Pour la démonstration voir S. Eilenberg [2], p. 175, th. 14. A ce § se rattache encore le th. 11 de la partie II.

composante C de l'ensemble ouvert S_2-K. Or, C est notoirement homéomorphe de R_2[11]), et par conséquent jouit de la propriété (b) en vertu du cor. I.6 et du th. I.3.

Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit, en vertu de I.(6), de considérer le cas où X est ouvert.

Nous allons montrer d'abord que si un ensemble ouvert $X\subset S_2-(z')-(z'')$ coupe S_2 entre z' et z'', il existe un ensemble fermé $Y\subset X$ qui coupe S_2 entre les mêmes points. Posons à ce but

$$U_n=\sum_{x\epsilon S_2-X} U\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

En supposant qu'aucun des ensembles fermés $S_2-U_n\subset X$ ne coupe S_2 entre z' et z'', on obtient une suite $K_n\subset U_n$ de continus contenant z' et z''. Or, S_2-X étant fermé, on a $\prod\limits_{n=1}^{\infty} U_n=S_2-X$. Il existerait donc, comme on sait, un continu $K\subset S_2-X$ contenant z' et z'', contrairement à l'hypothèse.

L'existence d'un ensemble fermé $Y\subset X$ qui coupe S_2 entre z' et z'' étant ainsi établie, soit K_2 l'ensemble des nombres complexes satisfaisants à la condition $|z|\leqslant 1$. On peut évidemment supposer que $Y\subset K_2-(z'')$. Soit C la composante de K_2-Y qui contient z''. On a $C\cdot S_1=0$, puisque Y coupe S_2 entre z' et z''.

Supposons maintenant que $r\sim 1$ sur Y. Il résulte de I.(10) (en y posant $X_1=K_2-C$, $X_2=\overline{C}$, $f=r$) qu'il existe une fonction $r\epsilon S_1^{K_2}$, telle que $r'(z)=r(z)$ pour $z\epsilon K_2-C$, donc telle que $r(z)=z$ pour $z\epsilon S_1$. Or, c'est impossible en vertu du cor. I.15.

On déduit de I.(7) (remarque) deux théorèmes suivants:

Théorème 2. *Pour qu'un ensemble localement connexe $X\subset S_2$ coupe S_2 entre deux points z' et z'', il faut et il suffit qu'une de ses composantes coupe S_2 entre les mêmes points.*

Théorème 3. *Pour qu'un ensemble fermé $X\subset S_2$ coupe S_2 entre deux points z' et z'', il faut et il suffit qu'une de ses composantes coupe S_2 entre ces points.*

[11]) La démonstration topologiquement la plus simple de cette proposition relève de la théorie de la représentation conforme; elle n'a même pas recours au théorème de Jordan.

Dans le cas particulier où X est compact, on peut supposer que K est un arc simple polygonal. L'homéomorphie de S_2-K avec R_2 est alors évidente.

Théorème 4. *Aucun ensemble $X\subset S_2$ homéomorphe à un ensemble linéaire ne coupe S_2* [12]).

Démonstration. Il suffit évidemment, en vertu du th. II.1, de montrer qu'un ensemble linéaire jouit de la propriété (b). D'après I.(7) (remarque), on peut se borner aux ensembles linéaires et connexes. Or, il résulte du th. I.1 qu'un ensemble linéaire et connexe remplit la condition (b), puisque chaque transformation continue d'un tel ensemble est homotope à l'unité.

On dit qu'un ensemble Y s'obtient de l'ensemble X par une *déformation continue* dans un ensemble Z, lorsqu'il existe une fonction $g\,\epsilon\,Z^{X\times K_1}$, telle que $g(x, 0)=x$ pour $x\,\epsilon\,X$ et $g(X, 1)=Y$.

Théorème 5. *Si l'ensemble $X\subset S_1-(z')-(z'')$ coupe S_2 entre z' et z'', chaque ensemble Y qui s'obtient de X par une déformation continue dans $S_2-(z')-(z'')$ coupe S_2 entre z' et z''.*

Démonstration. Soit $g\,\epsilon\,[S_2-(z')-(z'')]^{X\times K_1}$ une fonction telle que $g(x, 0)=x$ pour $x\,\epsilon\,X$ et que $g(X, 1)=Y$.

Supposons que Y ne coupe pas S_2 entre z' et z''. En vertu des th. II.1 et I.1, la transformation $r\,\epsilon\,S_1^Y$ est homotope à l'unité; il en serait donc de-même de la transformation $r\,g(x, 1)\,\epsilon\,S_1^X$ et de la transformation $r\,g(x, 0)=r(x)\,\epsilon\,S_1^X$, qui est homotope à la précédente. Or, en vertu des th. I.1 et II.1, la transformation $r\,\epsilon\,S_1^X$ ne peut pas être homotope à l'unité, quand X coupe S_2 entre z' et z''.

Théorème 6. *Pour qu'un ensemble $X\subset S_2-(z')-(z'')$ ne coupe pas S_2 entre z' et z'', il faut et il suffit qu'il existe une déformation continue de X dans $S_2-(z')-(z'')$ en un point* [13]).

Démonstration. La condition est suffisante en vertu du th. précédent. Pour prouver qu'elle est nécessaire, admettons que X ne coupe pas S_2 entre z' et z''. Il existe donc une fonction $\varphi\,\epsilon\,R_1^X$ telle que $r(x)=\dfrac{x}{|x|}=e^{i\varphi(x)}$ pour $x\,\epsilon\,X$. Posons:

$$g(x, t)=[(1-t)\,|x|+t]\,e^{i(1-t)\varphi(x)} \quad \text{pour} \quad (x, t)\,\epsilon\,X\times K_1.$$

La fonction g ainsi définie déforme X dans $S_2-(z')-(z'')$ en le point 1.

[12]) Ce théorème est dû à M. Z. Dufrène. Sa démonstration (fondée sur une méthode différente) a été présentée au Seminaire de la Topologie à l'Université de Varsovie le 4. 4. 1930; elle n'a pas été publiée.

[13]) Pour les ensembles X compacts voir K. Borsuk [3], p. 383.

Notons encore le

Théorème 7. *Etant donnés deux ensembles connexes X et Y tels que $X \subset Y \subset \overline{X} \subset S_2$ et dont Y coupe S_2 entre z' et z'', il existe un point $q \in Y$ tel que $X+(q)$ coupe S_2 entre z' et z''* [14]).

§ 2. Les théorèmes sur trois continus. Coupures irréductibles.

Théorème 8. *Soient $X_1 \subset S_2$ et $X_2 \subset S_2$ deux ensembles fermés (ou ouverts) dans X_1+X_2, dont le produit $X_1 \cdot X_2$ est connexe. Si aucun d'eux ne coupe S_2 entre les points z' et z'', leur somme X_1+X_2 ne coupe non plus S_2 entre ces points* [15]).

La démonstration s'obtient immédiatement du th. II.1 et de I.(5).

Théorème 9. *Soient $X_1 \subset S_2$, $X_2 \subset S_2$ et $X_3 \subset S_2$ trois ensembles connexes, dont le produit $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ n'est pas vide. Si aucun des ensembles X_i+X_j ne coupe S_2 entre les points z' et z'', l'ensemble $X_1+X_2+X_3$ ne coupe non plus S_2 entre ces points* [16]).

Démonstration. Il existe, d'après le th. I.1, trois fonctions $\varphi_{ij} \in R_1^{X_i+X_j}$ telles que $r(x)=e^{i\varphi_{ij}(x)}$ pour $x \in X_i+X_j$. On peut évidemment supposer que $\varphi_{12}(z)=\varphi_{23}(z)=\varphi_{31}(z)$ pour un point $z \in X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$. Par suite de la connexité de X_i on a selon I.(3)

$$\varphi_{12}(x)=\varphi_{21}(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_1,$$
$$\varphi_{12}(x)=\varphi_{23}(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_2,$$
$$\varphi_{23}(x)=\varphi_{31}(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_3.$$

[14]) Pour la démonstration voir S. Eilenberg [2], p. 171, th. 12.

[15]) C'est une généralisation sur les ensembles quelconques du premier théorème de Z. Janiszewski [1], p. 62.

Remarquons que le deuxième théorème de Z. Janiszewski [1], p. 62 s'obtient du théorème 8 du texte d'une façon presque immédiate. En effet, soient $X_1, X_2 \subset S_2$ deux ensembles connexes et fermés (ou ouverts) dont le produit $X_1 \cdot X_2$ n'est pas connexe. On peut évidemment supposer que z_1' et z_2'' appartiennent à deux composantes distinctes de $X_1 \cdot X_2$. Aucun des ensembles ouverts (ou fermés) $Y_1=S_2-X_1$ et $Y_2=S_2-X_2$ ne coupe S_2 entre z' et z'', tandisque leur somme $Y_1+Y_2=(S_2-X)+(S_2-X_2)=S_2-X_1 \cdot X_2$ coupe S_2 entre z' et z''. En vertu du théorème 8, l'ensemble $Y_1 \cdot Y_2=(S_2-X_1)\cdot(S_2-X_2)=S_2-(X_1+X_2)$ est donc non connexe, c. q. f. d.

[16]) C'est une généralisation sur les ensembles connexes quelconques du théorème de C. Kuratowski [8], connu sous le nom du „théorème sur trois continus". Pour une démonstration procédant par l'homologie voir E. Čech [1], p. 20.

En posant donc

$$\varphi(x)=\varphi_{ij}(x) \qquad \text{pour} \quad x \in X_i+X_j,$$

on obtient une fonction univoque telle que $r(x)=e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in X_1+X_2+X_3$. Pour prouver que cette fonction est continue, remarquons qu'une fonction qui est continue sur chacun des ensembles X_i+X_j l'est aussi sur $X_1+X_2+X_3$. On a donc $r \sim 1$ sur $X_1+X_2+X_3$, c. q. f. d.

Remarquons que la démonstration du th. II.9 repose sur la proposition suivante, que nous avons démontrée implicitement:

(1) *Prémisses:* 1° *les ensembles X_1, X_2 et X_3 sont connexes,*
2° $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \neq 0$,
3° $f \in S_2^{X_1+X_2+X_3}$,
4° $f \sim 1$ *sur chacun des ensembles* X_i+X_j.
Thèse: $f \sim 1$ *sur* $X_1+X_2+X_3$.

On en tire en vertu des th. I.3 et I.9 les théorèmes suivants:

Théorème 10. *Etant donnés trois ensembles X_1, X_2 et X_3 connexes, tels que $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \neq 0$ et que chacune des sommes X_i+X_j est un ensemble localement connexe et unicohérent, la somme $X_1+X_2+X_3$ l'est aussi.*

Théorème 11. *Etant donnés trois continus X_1, X_2 et X_3 tels que $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \neq 0$ et que chacun des espaces $S_1^{X_i+X_j}$ est connexe, l'espace $S_1^{X_1+X_2+X_3}$ l'est aussi.*

Théorème 12. *Etant donnés trois ensembles $X_1 \subset S_2$, $X_2 \subset S_2$ et $X_3 \subset S_2$ connexes et tels qu'aucun des ensembles X_i+X_j ne coupe S_2 entre aucun couple des points $z_1, z_2, z_3 \in S_2$, l'ensemble $X_1+X_2+X_3$ ne coupe pas S_2 au moins parmi un de ces couples* [17]).

Démonstration. Pour tout ensemble $X \subset S_2$ qui ne coupe pas S_2 entre un couple x_1 et x_2, il existe évidemment un ensemble ouvert $U \supset X$ ayant la même propriété. Il existe par conséquent trois ensembles ouverts $U_{ij} \supset X_i+X_j$ dont aucun ne coupe S_2 entre aucun couple des points z_1, z_2, z_3. Soit Y_1 celle des composantes de $U_{12} \cdot U_{31}$ qui contient l'ensemble connexe X_1. En définissant les ensembles Y_2 et Y_3 d'une façon analogue, on obtient trois ensembles $Y_i \supset X_i$ ouverts, connexes et tels qu'aucun des ensembles Y_i+Y_j ne coupe S_2 entre aucun couple des points z_1, z_2, z_3. Le théorème sera donc démontré, lorsque nous aurons prouvé que $Y_1+Y_2+Y_3$ ne coupe pas S_2 au moins parmi un de ces couples.

[17]) C'est une généralisation sur les ensembles connexes quelconques du théorème de E. Čech [1], p. 20, dont la démonstration est basée sur l'homologie.

On peut supposer que $Y_i \cdot Y_j \neq 0$. En effet, en supposant que $Y_2 \cdot Y_3 = 0$, on peut appliquer aux ensembles $Y_1 + Y_2$ et $Y_1 + Y_3$ le th. II. 8. De même, on peut supposer que $Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 = 0$, puisque dans le cas contraire on pourrait y appliquer le th. II. 9.

Soient maintenant $L_i \subset Y_i$ trois arcs simples tels que $L_i \cdot L_j \neq 0$. Comme $L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = 0$, on peut trouver trois arcs simples $L_i' \subset L_i$, tels que chacun des ensembles $L_i' \cdot L_j'$ se compose d'un seule point x_{ij} qui soit une extrémité commune de L_i' et L_j'. L'ensemble $Z = L_1' + L_2' + L_3'$ est une courbe simple fermée et par conséquent ne coupe S_2 qu'en deux régions [18]). Comme il y a trois points z_1, z_2 et z_3, la courbe Z ne coupe pas S_2 entre un couple de ces points, p. ex. entre z_1 et z_2. Nous allons prouver que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ ne coupe non plus S_2 entre ce couple de points.

Sans compromettre la généralité, on peut supposer que $z_1 = z'$ et que $z_2 = z''$. D'après le th. II. 1, il existe donc une fonction $\psi \in R_1^Z$, telle que $r(x) = e^{i\psi(x)}$ pour $x \in Z$, et trois fonctions $\varphi_{ij} \in R_1^{Y_i + Y_j}$, telles que $r(x) = e^{i\varphi_{ij}(x)}$ pour $x \in Y_i + Y_j$, et que

$$\text{(i)} \qquad \psi(x_{ij}) = \varphi_{ij}(x_{ij}).$$

Pour $x \in L_3' + L_1'$, on a $e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi_{31}(x)}$, ce qui entraîne en vertu de (i) et de I. (3) que $\psi(x) = \varphi_{31}(x)$. En particulier,

$$\text{(ii)} \qquad \psi(x_{12}) = \varphi_{31}(x_{12}).$$

Considérons l'ensemble Y_1. On a $e^{i\varphi_{12}(x)} = e^{i\varphi_{31}(x)}$ pour $x \in Y_1$ et, de (i) et (ii), on tire $\varphi_{12}(x_{12}) = \varphi_{31}(x_{12})$. Il en résulte en vertu de I. (3) que

$$\varphi_{12}(x) = \varphi_{31}(x) \qquad \text{pour} \quad x \in Y_1.$$

D'une façon analogue

$$\varphi_{12}(x) = \varphi_{23}(x) \qquad \text{pour} \quad x \in Y_2,$$
$$\varphi_{23}(x) = \varphi_{31}(x) \qquad \text{pour} \quad x \in Y_3.$$

En posant

$$\varphi(x) = \varphi_{ij}(x) \qquad \text{pour} \quad x \in Y_i + Y_j$$

on obtient donc une fonction univoque, telle que $r(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in Y_1 + Y_2 + Y_3$, et continue, puisqu'elle est continue sur chacun des ensembles ouverts Y_i. Nous avons ainsi établi que $r \sim 1$ sur $Y_1 + Y_2 + Y_3$, c. q. f. d.

---

[18]) Nous nous appuyons ici sur le théorème de Jordan, qui sera démontré dans la partie III (th. 5) sans avoir recours aux résultats de ce §.

Nous allons appliquer les th II. 8 et II. 12 à démontrer deux théorèmes qui concernent les relations entre la notion de coupure irréductible et celles de continu indécomposable et de continu irréductible entre deux points [19]). Ces notions s'étendent sur les ensembles non fermés de la façon suivante:

Un espace connexe X sera dit *irréductible entre les points* x_1 *et* x_2, lorsque

1⁰ X contient x_1 et x_2;

2⁰ aucun vrai sous-ensemble connexe et fermé de X ne contient ces deux points simultanément.

Un espace connexe X sera dit *indécomposable*, lorsqu'il n'est pas somme de ses deux vrais sous-ensembles connexes et fermés.

Un ensemble $X \subset S_2$ sera dit une *coupure irréductible entre deux points* $z_1, z_2 \in S_2 - X$, lorsque

1⁰ X coupe S_2 entre les points z_1 et z_2;

2⁰ aucun vrai sous-ensemble de X, fermé dans X, ne coupe S_2 entre ces points.

Il résulte du th. II. 8 qu'une coupure irréductible est toujours connexe.

Lemme 1. *Si un ensemble* $X \subset S_2$ *est une coupure irréductible de* S_2 *entre les points* z' *et* z'' *et si* $Y \subset X$ *est un ensemble connexe et fermé dans* X, *alors l'ensemble* $X - Y$ *est connexe.*

Démonstration. En effet, supposons que

$$X - Y = P_1 + P_2, \quad P_1 \neq 0 \neq P_2, \quad \overline{P}_1 \cdot P_2 + P_1 \cdot \overline{P}_2 = 0.$$

En appliquant le th. II. 8 aux ensembles $Y + P_2$ et $Y + P_2$, dont aucun ne coupe S_2 entre z' et z'', on conclut que X ne coupe pas S_2 entre z' et z'', contrairement à l'hypothèse.

Lemme 2. *Si un ensemble* $X \subset S_2$, *supposé une coupure irréductible de* S_2 *entre deux points* z' *et* z'', *est décomposable, il existe deux ensembles* X_1 *et* X_2 *connexes, fermés dans* X *et tels que*

$$\text{(iii)} \qquad X = X_1 + X_2,$$

$$\text{(iv)} \qquad 0 \neq X_1 \neq X \qquad \textit{et} \qquad 0 \neq X_2 \neq X,$$

$$\text{(v)} \quad X_1 = X \cdot \overline{X - X_2}, \qquad \text{(vi)} \quad X_2 = X \cdot \overline{X - X_1}.$$

---

[19]) C. Kuratowski [3], p. 130; [5], p. 24; Z. Janiszewski et C. Kuratowski [1], p. 210; C. Kuratowski [2], I, p. 200.

Démonstration. Si l'ensemble X est connexe et décomposable, il existe un ensemble $Y\subset X$ connexe, fermé dans X et tel que

(vii) $$0\neq Y\neq X, \qquad X\neq X\cdot\overline{X-Y}.$$

Posons

(viii) $$X_1=X\cdot\overline{X-Y}, \qquad X_2=X\cdot\overline{X-X_1}.$$

Les ensembles X_1 et X_2 sont fermés dans X et connexes d'après le lemme précédent. Les relations (iii), (iv) et (vi) s'obtiennent de (vii) et de (viii) par un calcul immédiat. Pour démontrer (v), il suffit de remarquer que l'on a l'identité

$$X\cdot\overline{X-Y}=X\cdot\overline{X-X\cdot\overline{X-X\cdot\overline{X-Y}}}$$

pour chaque ensemble $Y\subset X$ fermé dans X [20]).

Théorème 13. *Un ensemble $X\subset S_2$, supposé une coupure irréductible de S_2 entre tout couple des points $z_1, z_2, z_3\in S_2$, est une somme de deux ensembles connexes indécomposables* [21]).

De plus, dans le cas où X est décomposable, la décomposition de X en deux ensembles connexes indécomposables est donnée par le lemme II. 2.

Démonstration. Supposons que X soit décomposable. Il existe alors, selon le lemme II. 2, deux ensembles X_1 et X_2 connexes, fermés dans X et satisfaisant à (iii)—(vi). Supposons qu'un de ces ensembles, p. ex. X_2, ne soit pas indécomposable. Il existerait alors deux ensembles Y_1 et Y_2 connexes, fermés dans X et tels que

(ix) $$X_2=Y_1+Y_2, \qquad Y_1\neq X_2\neq Y_2.$$

Nous allons montrer que

$$X\neq Y_1+Y_2, \qquad X\neq X_1+Y_1 \quad \text{et} \quad X\neq X_1+Y_2.$$

En effet, la première de ces relations résulte de (ix) et de (iv). En supposant que $X=X_1+Y_1$, on aurait selon (vi) $X_2\subset Y_1$, contrairement à (ix).

Ces inégalités montrent que les ensembles X_1, Y_1 et Y_2 satisfont aux hypothèses du th. II. 12, contrairement à l'hypothèse que $X=X_1+Y_1+Y_2$ coupe S_2 entre tout couple des points z_1, z_2 et z_3.

[20]) C. Kuratowski [1], p. 37 renvoi 2.

[21]) Pour les continus voir C. Kuratowski [3], p. 138 et [5], p. 36.

Théorème 14. *Un ensemble $X\subset S_2$, supposé une coupure irréductible de S_2 entre z' et z'', est soit indécomposable, soit remplit les conditions:*

$$X=X_1+X_2, \qquad X_1\cdot X_2=P_1+P_2,$$

$$P_1\cdot P_2=0, \qquad P_1\neq 0\neq P_2,$$

où X_1, X_2, P_1 et P_2 sont des ensembles fermés dans X, et X_1, X_2 sont connexes et irréductibles entre chaque couple de points $x_1\in P_1$ et $x_2\in P_2$ [22]).

De plus, les ensembles X_1 et X_2 sont donnés par le lemme II. 2.

Démonstration. Supposons que X est décomposable et soient X_1 et X_2 les ensembles donnés par le lemme II. 2. En vertu de (iv), aucun d'eux ne coupe S_2 entre z' et z''. Il existe donc deux fonctions $\varphi_1\in R_1^{X_1}$ et $\varphi_2\in R_1^{X_2}$ telles que $r(x)=e^{i\varphi_i(x)}$ pour $x\in X_i$ $(i=1,2)$. On peut supposer que $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$ pour un point $x_0\in X_1\cdot X_2$. Désignons par P_1 l'ensemble des points $x\in X_1\cdot X_2$ tels que $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ et posons $P_2=X_1\cdot X_2-P_1$. Les ensembles P_1 et P_2 sont fermés dans X et on a $P_1\neq 0$ et $P_2\neq 0$, puisque, dans le cas contraire, on obtiendrait $r\sim 1$ sur X, en posant $\varphi(x)=\varphi_i(x)$ pour $x\in X_i$.

Reste à démontrer que X_1 et X_2 sont irréductibles entre tout couple de points $x_1\in P_1$ et $x_2\in P_2$. Soit à ce but $Y\subset X_1$ un ensemble connexe, fermé dans X et contenant x_1 et x_2. Supposons que $Y+X_2$ ne coupe pas S_2 entre z' et z''. Il existerait donc une fonction $\psi\in R_1^{Y+X_2}$ telle que $r(x)=e^{i\psi(x)}$ pour $x\in Y+X_2$ et que $\psi(x_1)=\varphi_1(x_1)=\psi_2(x_1)$. En vertu de I. (3), on aurait donc $\psi(x)=\varphi_1(x)$ pour $x\in Y$ et $\psi(x)=\varphi_2(x)$ pour $x\in X_2$, d'où $\varphi_1(x_2)=\varphi_2(x_2)$, ce qui est impossible, car $x_2\in P_2$. L'ensemble $Y+X_2$ coupe donc S_2 entre z' et z''. Par conséquent $X=Y+X_2$, d'où, en vertu de (v), $X_1\subset Y$ et finalement $X_1=Y$, c. q. f. d.

§ 3. Connexité locale. Coupures locales.

Etant donné un ensemble quelconque X, désignons par $L(X)$ l'ensemble des points $x\in\overline{X}$ pour lesquels il existe un entourage U de x aussi petit que l'on veut et tel que l'ensemble $X\cdot U$ soit connexe. L'ensemble $L(X)\subset\overline{X}$ ainsi défini est évidemment un G_δ. La condition $X\subset L(X)$ équivaut à la connexité locale de X; chaque ensemble Y tel que $X\subset Y\subset L(X)$ est dans ce cas localement connexe.

[22]) Pour les continus voir C. Kuratowski [3], p. 137 et [6], p. 235. Pour le cas de continus, un théorème inverse sera démontré dans la partie III (th. 20).

On appelle ensemble *quasi-péanien* tout ensemble G_δ localement connexe et situé dans un espace complet.

(2) *Prémisses:* 1^0 $X \subset Y \subset X+L(X)$,

2^0 $f \epsilon S_1^Y$,

3^0 $f \sim 1$ *sur* X.

Thèse: $f \sim 1$ *sur* Y.

Démonstration. Soit $\varphi \epsilon R_1^X$ une fonction telle que

(i) $$f(x)=e^{i\varphi(x)} \quad \text{pour} \quad x \epsilon X.$$

Soit $x \epsilon L(X)$. Selon la définition de $L(X)$, il existe un entourage U de x tel que $X \cdot U$ est connexe et que $\delta[f(X \cdot U)]<1$. On en tire en vertu de I.(4) $\delta[\varphi(X \cdot U)]<\pi$. Il en résulte que l'oscillation de la fonction φ au point x [23]) est $<2\pi$; en vertu de (i) elle est donc égale à 0. La fonction φ admet donc une extension φ' sur l'ensemble $X+L(X) \supset Y$ [23]) et, par suite de la continuité des fonctions f et φ', on a $f(y)=e^{i\varphi'(y)}$ pour tout $y \epsilon Y$.

(3) *Prémisses:* 1^0 *l'ensemble* X *est quasi-péanien,*

2^0 $f \epsilon S_1^X$,

3^0 $f \sim 1$ *sur toute courbe simple fermée* $Z \subset X$.

Thèse: $f \sim 1$ *sur* X.

Démonstration. Nous allons montrer d'abord que $f \sim 1$ sur la somme L_1+L_2 de chaque couple d'arcs simples $L_1, L_2 \subset X$. Comme $f \sim 1$ sur L_1 et sur L_2, on peut supposer que $L_1 \cdot L_2 \neq 0$. Soit $x_0 \epsilon L_1 \cdot L_2$. Il existe alors deux fonctions $\varphi_1 \epsilon R_1^{L_1}$ et $\varphi_2 \epsilon R_1^{L_2}$ telles que $f(x)=e^{i\varphi_i(x)}$ pour $x \epsilon L_i$ $(i=1,2)$ et que $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$. En supposant que f *non* ~ 1 sur L_1+L_2, on doit admettre que l'ensemble P_2 des points $x \epsilon L_1 \cdot L_2$ tels que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$ est non vide. Les ensembles P_2 et $P_1=L_1 \cdot L_2-P_2$ étant fermés et non vides (puisque $x_0 \epsilon P_1$), il existe deux arcs simples $L_1' \subset L_1$ et $L_2' \subset L_2$ n'ayant en commun que leurs extrémités x' et x'' telles que $\varphi_1(x')=\varphi_2(x')$ et $\varphi_1(x'') \neq \varphi_2(x'')$. Mais alors on voit facilement que f *non* ~ 1 sur la courbe simple fermée $L_1'+L_2'$, contrairement à l'hypothèse.

[23]) C. Kuratowski [1], p. 210.

Soient maintenant $L_1, L_2, L_3 \subset X$ trois arcs simples. Nous allons prouver que $f \sim 1$ sur $L_1+L_2+L_3$. On peut supposer que $L_i \cdot L_j \neq 0$, puisqu'en supposant p. ex. que $L_2 \cdot L_3=0$, on aurait $f \sim 1$ sur L_1+L_2 et sur L_1+L_3; en appliquant I.(5), on aurait donc $f \sim 1$ sur $L_1+L_2+L_3$. Soient $\varphi_1 \epsilon R_1^{L_1}$ et $\varphi_2 \epsilon R_1^{L_2+L_3}$ deux fonctions telles que $f(x)=e^{i\varphi_1(x)}$ pour $x \epsilon L_1$, que $f(x)=e^{i\varphi_2(x)}$ pour $x \epsilon L_2+L_3$ et que $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$ pour un point $x_0 \epsilon L_1 \cdot L_2$. Soit maintenant $x \epsilon L_1 \cdot (L_2+L_3)$ un point différent de x_0. Comme $L_2 \cdot L_3 \neq 0$, il existe dans L_2+L_3 un arc simple L_2' contenant x_0 et x. Comme $f \sim 1$ sur L_1+L_2', on a $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$. Il en résulte, en posant $\varphi(x)=\varphi_1(x)$ pour $x \epsilon L_1$ et $\varphi(x)=\varphi_2(x)$ pour $x \bar{\epsilon} L_2+L_3$, que $f \sim 1$ sur $L_1+L_2+L_3$.

En vertu de I.(7) (remarque), on peut supposer que l'ensemble X est connexe. Soit $x_0 \epsilon X$ et choisissons un nombre $\varphi(x_0)$ tel que $f(x_0)=e^{i\varphi(x)}$. Considérons un point arbitraire $x_1 \epsilon X$ et un arc simple $L \subset X$ contenant x_0 et x_1 (un tel arc existe, puisque X est connexe et quasi-péanien). Il existe donc une fonction $\psi \epsilon R_1^L$ telle que $f(x)=e^{i\psi(x)}$ pour $x \epsilon L$ et que $\psi(x_0)=\varphi(x_0)$. Posons $\varphi(x_1)=\psi(x_1)$. On a $f(x)=e^{i\varphi(x)}$; pour terminer la démonstration il suffit donc de prouver que la fonction φ est univoque et continue.

Soit à ce but $x_1 \epsilon X$ et $0<\varepsilon<1$. Il existe un nombre $\eta>0$ tel que la relation $|x-x_1|<\eta$ entraîne $|f(x)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}$. L'ensemble X étant quasi-péanien, on peut choisir un nombre $\eta_1>0$ d'une manière que la relation $|x_1-x_2|<\eta_1$ entraîne l'existence d'un arc simple L tel que $x_1, x_2 \epsilon L$ et que $\delta(L)<\eta$. Désignons par L_1 et L_2 deux arcs simples tels que $x_0, x_1 \epsilon L_1$ et $x_0, x_2 \epsilon L_2$. Comme $f \sim 1$ sur L_1+L_2+L, il existe une fonction $\psi \epsilon R_1^{L_1+L_2+L}$ telle que $f(x)=e^{i\psi(x)}$ pour $x \epsilon L_1+L_2+L$ et que $\psi(x_0)=\varphi(x_0)$. Par définition, on a donc $\varphi(x_1)=\psi(x_1)$ et $\varphi(x_2)=\psi(x_2)$. Or, les relations $\delta(L)<\eta$ et $x_1 \epsilon L$ entraînent $\delta[f(L)]<\frac{\varepsilon}{\pi}$, ce qui donne en vertu de I.(4) l'inegalité $\delta[\psi(L)]<\varepsilon$ et finalement $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon$.

Les th. II.1 et II.(2) donnent le

Théorème 15. *$X \subset S_2$ étant un ensemble qui ne coupe pas S_2 entre z' et z'', l'ensemble $X+L(X)-(z')-(z'')$ ne coupe non plus S_2 entre z' et z''.*

Corollaire 16. *$X \subset S_2$ étant un ensemble qui ne coupe pas S_2, tout ensemble Y tel que $X \subset Y \subset X + L(X)$ ne coupe S_2 non plus.*

Les th. II.1 et II.(3) donnent le

Théorème 17. *$X \subset S_2-(z')-(z'')$ étant un G_δ localement connexe et qui coupe S_2 entre z' et z'', il existe une courbe simple fermée $Z \subset X$ qui coupe S_2 entre les mêmes points*[24]).

Corollaire 18. *$X \subset S_2$ étant un G_δ localement connexe, chaque constituant*[25]) *de S_2-X est sa composante.*

Théorème 19. *Une coupure $X \subset S_2-(z')-(z'')$ irréductible entre z' et z'' et qui est localement connexe, est une courbe simple fermée.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. L'ensemble X étant une coupure irréductible entre z' et z'', l'ensemble $X - U(x, \varepsilon)$ ne coupe pas S_2 entre z' et z''. Il en résulte en vertu du th. II.15 que l'ensemble $L(X)-(z')-(z'')-U(x,\varepsilon) \subset L[X-U(x,\varepsilon)]-(z')-(z'')$ ne coupe non plus S_2 entre z' et z''. L'ensemble $L(X)-(z')-(z'')$ est donc une coupure irréductible entre z' et z''. Il en résulte en vertu du th. II.17 qu'il est une courbe simple fermée. Or, comme $X \subset L(x)-(z')-(z'')$, X est également une courbe simple fermée, puisque aucun vrai sous-ensemble d'une courbe simple fermée ne coupe S_2 (th. II.4).

Théorème 20. *Si l'ensemble $X \subset S_2$ est localement connexe et Y est un constituant de S_2-X, chaque point $x \in \overline{Y}-Y$ est accessible de Y*[26]), c. à d. qu'il existe un continu K (contenant plus d'un point) tel que $x \in K \subset Y + (x)$.

Démonstration. Soit $\{y_k\}$ une suite de points de Y convergeant vers x. Désignons par Y' la composante de S_2-X' qui contient le point y_1 où $X' = L(X)-(x)-\sum_{k=1}^{\infty}(y_k)$. En vertu du th. II.15, on a $y_k \in Y'$ pour $k=1, 2,\dots$, et par conséquent $x \in Y'$. L'ensemble X' étant un G_δ localement connexe, Y' est un constituant de S_2-X' (cor. II.18). Il en résulte qu'il existe un continu $K \subset Y'$ irréductible entre les points y_1 et x. Reste à montrer que $K-(x) \subset Y$. L'ensemble $K-(x)$ étant, comme on le sait, connexe, on a $K-(x) \subset Y''$ où Y'' est la composante de $S_2-X'' = S_2-[X'+(x)]$ qui contient le point y_1.

Or, on a

$$X'' = X' + (x) = L(X) - \sum_{k=1}^{\infty}(y_k) \supset X.$$

X'' est donc un G_δ localement connexe et Y'' est un constituant de S_2-X'' (cor. II.18). Par conséquent $Y'' \subset Y$, puisque $X \subset X''$, d'où $K-(x) \subset Y$, c. q. f. d.

Corollaire 21. *$X \subset S_2$ étant un ensemble localement connexe, chaque constituant de S_2-X est fermé dans S_2-X.*

Nous allons maintenant appliquer le th. II.15 pour établir un théorème concernant les coupures locales de S_2.

On dit qu'un ensemble $X \subset S_2$ coupe S_2 *localement* dans un point $x \in S_2$, lorsqu'il coupe chaque entourage U de x suffisamment petit. On voit aussitôt que pour les ensembles X fermés (localement dans le point x) cette condition équivaut à la condition

$$x \in \overline{S_2-X}-L(S_2-X).$$

En effet, ces deux conditions équivalent à celle que pour tout entourage suffisamment petit U de x l'ensemble $(S_2-X)\cdot U$ ne soit pas connexe.

Théorème 22. *Un continu $X \subset S_2$ coupe localement S_2 en tout point $x \in X$ qui coupe X.*

Démonstration. Il existe, par hypothèse, deux points $x_1, x_2 \in X-(x)$, entre lesquels le point x coupe le continu X. Il en résulte que $S_2-X+(x)$ coupe S_2 entre x_1 et x_2, tandisque S_2-X ne coupe pas S_2. D'après le th. II.15 on a donc x non $\in L(S_2-X)$. Or, on a $x \in \overline{S_2-X}$, puisque x coupe le continu X. On obtient donc $x \in \overline{S_2-X}-L(S_2-X)$, c. q. f. d.

Corollaire 23. *Un continu $X \subset S_2$ irréductible entre deux points x_1 et x_2 coupe localement S_2 dans tout point $x \in X-(x_1)-(x_2)$.*

Corollaire 24. *Un continu indécomposable $X \subset S_2$ coupe localement S_2 dans chacun de ses points.*

---

[24]) Pour X fermé voir R. L. Moore [1], p. 260 et C. Kuratowski [3], p. 140.

[25]) c. à d. l'ensemble des points qui se laissent joindre par des continus avec un point fixe.

[26]) Ce théorème est bien connu pour les X compacts.

III. COUPURES DE S_2, THÉORÈMES QUANTITATIFS.

§ 1. Préliminaires.

Etant donnés deux points différents $z_1, z_2 \in S_1$, posons:

$$h_{z_1 z_2}(z) = \frac{z_1 - z}{z_1} : \frac{z_2 - z}{z_2}, \qquad h_{z_1 z_2}(\infty) = \frac{z_2}{z_1}.$$

Ainsi définie, la fonction $h_{z_1 z_2}$ transforme S_2 en S_2 par homéomorphie et on a toujours $h_{z_1 z_2}(z_1)=0$, $h_{z_1 z_2}(z_2)=\infty$. En posant donc

$$r_{z_1 z_2}(z) = \frac{h_{z_1 z_2}(z)}{|h_{z_1 z_2}(z)|} \quad \text{pour} \quad z_1 \neq z_2 \quad \text{et} \quad z \in S_2 - (z_1) - (z_2),$$

$$r_{z_1 z_2}(z) = 1 \qquad \text{pour} \quad z_1 = z_2,$$

on a $r_{z_1 z_2}(z) = r(h_{z_1 z_2}(z))$ et on déduit du th. II.1 et de la définition de $h_{z_1 z_2}$ les conséquences suivantes:

(1) *Pour qu'un ensemble $X \subset S_2$ ne coupe pas S_2 entre les points $z_1, z_2 \in S_2 - X$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$r_{z_1 z_2} \sim 1 \quad \textit{sur} \quad X.$$

(2) $r_{z_1 z_2}(z) \cdot r_{z_2 z_3}(z) \cdot r_{z_3 z_1}(z) = 1$ *pour tout* $z \in S_2 - (z_1) - (z_2) - (z_3)$.

Pour chaque couple de fonctions $f_1, f_2 \in S_1^X$, nous écrirons

$f_1 \sim f_2$ *sur un sous-ensemble* Y *de* X,

lorsque $f \sim 1$ sur Y où $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$. On vérifie facilement que cette relation est symétrique et transitive, et que si $f_1 \sim f_2$ et $f_1' \sim f_2'$ sur Y, alors $f_1 \cdot f_1' \sim f_2 \cdot f_2'$ et $\frac{f_1}{f_1'} \sim \frac{f_2}{f_2'}$ sur Y.

Il résulte du th. I.1 que pour avoir $f_1 \sim f_2$ sur X, il faut et il suffit que les fonctions f_1 et f_2 soient homotopes.

Les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n \in S_1^X$ seront dites *linéairement indépendantes*, lorsque la relation $\prod_{i=1}^{n} f_i^{p_i} \sim 1$ sur X (p_i entiers) implique $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$.

L'ensemble $\Phi \subset S_1^X$ s'appelle une *base* d'un ensemble $\Psi \subset S_1^X$, lorsque 1° les fonctions de Φ sont linéairement indépendantes 2° pour toute fonction $g \in \Psi$, il existe une suite finie $f_1, f_2, \dots, f_n \in \Phi$ et un système de nombres entiers $p_1, p_2, \dots, p_n$ tels que $g \sim \prod_{i=1}^{n} f_i^{p_i}$ sur X.

En faisant correspondre à tout couple de fonctions $f_1, f_2 \in S_1^X$ la fonction $f_1 \cdot f_2 \in S_1^X$, on obtient un groupe abelien, que nous désignerons également par S_1^X [27]). L'ensemble $P(X) \subset S_1^X$ des fonctions $f \in S_1^X$ telles que $f \sim 1$ sur X est évidemment un sous-groupe de S_1^X. Considérons le groupe-quotient („Faktorgruppe") $\mathfrak{B}_1(X) = S_1^X / P(X)$, c. à d. le groupe qui s'obtient du groupe S_1^X en identifiant les éléments homotopes [27]). On voit aussitôt que les notions d'indépendance linéaire et de base, définies plus haut, coïncident avec les mêmes notions conçues dans le sens habituel de la théorie des groupes, appliquées au groupe $\mathfrak{B}_1(X)$. La proposition (3), qui va suivre, montre que le groupe $\mathfrak{B}_1(X)$ est l'ainsi dit groupe libre („freie Gruppe"). Nous appliquerons dans la suite les propriétés élémentaires suivantes de groupes abeliens libres: 1° *s'il n'existe aucun système de $n+1$ éléments linéairement indépendants, il existe une base d'au plus n éléments*, 2° *le nombre d'éléments d'une base ne dépend pas du choix de la base.*

(3) *Prémisses:* 1° $f \in S_1^X$,
2° $f^p \sim 1$ *sur* X *pour un entier* $p \neq 0$.
Thèse: $f \sim 1$ *sur* X.

Démonstration. Soit $\varphi \in R_1^X$ une fonction telle que $[f(x)]^p = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$. Posons $\psi_i(x) = \frac{\varphi(x) + 2i\pi}{p}$ pour $x \in X$ et $i = 0, 1, \dots, p-1$. Soit X_i $(i = 0, 1, \dots, p-1)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) = e^{i\psi_i(x)}$. Les ensembles X_i étant évidemment fermés et disjoints on a $f \sim 1$ sur $X_0 + X_1 + \dots + X_{p-1}$. Reste donc à montrer que $X = X_0 + X_1 + \dots + X_{p-1}$. Soit à ce but $x \in X$. Il existe un $y \in R_1$ tel que $f(x) = e^{iy}$. On a donc $f(x) = e^{iy + 2n\pi}$ $(n = 1, 2, \dots)$ et par suite $e^{ip(y+2n\pi)} = e^{i\varphi(x)}$. Il existe donc un entier k_n tel que $p(y + 2n\pi) = \varphi(x) + 2k_n\pi$. L'égalité

$$y + 2n\pi = \frac{\varphi(x) + 2k_n\pi}{p}$$

montre qu'en faisant varier n on peut obtenir $0 \leqslant k_n \leqslant p-1$. D'où $x \in X_{k_n} \subset X_0 + X_1 + \dots + X_{p-1}$.

Désignons par $b_1(X)$ le nombre d'éléments d'une base finie de S_1^X, s'il y en a une, et posons dans le cas contraire: $b_1(X) = \infty$ [28]). On voit aussitôt que la condition $b_1(X) = 0$ équivaut à la condition (b); pour X compacts elle équivaut donc (cor. I.10) à la connexité de S_1^X.

---

[27]) Ce groupe a été considéré (pour X compact) par N. Bruschlinsky [1]. Cf. aussi K. Borsuk [6] et H. Freudenthal [1].

[28]) Le nombre $b_1(X)$ nous remplacera le nombre de Betti correspondant à la dimension 1. Cf: N. Bruschlinsky [1].

(4) *Pour toute fonction $f \in S_1^{S_1}$, il existe un entier p tel que $f(z) \sim z^p$ sur S_1.*

Démonstration. Désignons par K_1' l'intervalle fermé $\langle 0, 2\pi \rangle$ et posons $g(x)=e^{ix}$ pour $x \in K_1'$. En posant $f^*(x)=fg(x)$ pour $x \in K_1'$, on a $f^* \in S_1^{K_1'}$ et il existe d'après les th. I. 6 et I. 3 une fonction $\varphi^* \in R_1^{K_1'}$ telle que $fg(x)=e^{i\varphi^*(x)}$ pour $x \in K_1'$. On a $e^{i\varphi^*(0)}=fg(0)=f(e^{i0})=f(e^{i2\pi})=fg(2\pi)=e^{i\varphi^*(2\pi)}$, d'où l'existence d'un entier p tel que $\varphi(2\pi)-\varphi(0)=2p\pi$. Considérons la fonction $\varphi(z)$ faisant correspondre à tout point $z \in S_1$ tel que $z=e^{ix}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ le nombre $\varphi^*(x)-px$. On a $\varphi \in R_1^{S_1}$, puisque $\varphi^*(0)-p\cdot 0=\varphi^*(2\pi)-p\cdot 2\pi$. Ensuite $e^{i\varphi(z)}=e^{i\varphi^*(x)}\cdot e^{-ipx}=f(e^{ix})\cdot(e^{ix})^{-p}=f(z)\cdot z^{-p}$. Il en résulte que $f(z)\sim z^p$ sur S_1.

(5) *Toute fonction $f\in S_1^Y$ où Y est un sous-ensemble fermé d'un espace donné X admet une extensions sur un ensemble ouvert U (tel que $Y\subset U\subset X$).*

Cette proposition résulte immédiatement du fait que S_1 est un *rétracte absolu de voisinage* dans le sens de M. K. Borsuk[29]).

Désignons par $b_0(X)$ et $b_0'(X)$ respectivement le nombre des composantes et celui des constituants[30]) de X dans le cas où ce nombre est fini; dans le cas contraire, posons respectivement $b_0(X)=\infty$ et $b_0'(X)=\infty$[31]).

§ 2. Le théorème de dualité de J. W. Alexander.

Lemme 1. *Si les points $z_0, z_1, \dots, z_n$ appartiennent à de divers constituants de S_2-X, les fonctions $r_{z_0z_1}, r_{z_0z_2}, \dots, r_{z_0z_n}$ sont linéairement indépendantes sur X.*

Démonstration. Dans le cas $n=1$ le lemme résulte de III. (3) et III. (1). Admettons ce lemme pour $n-1$ et supposons que $\prod_{i=1}^{n} r_{z_0z_i}^{p_i}\sim 1$ sur X. D'après I. (6), il existe alors un ensemble ouvert U tel que $X\subset U\subset S_2-\sum_{i=0}^{n}(z_i)$ et que $\prod_{i=1}^{n} r_{z_0z_i}^{p_i}\sim 1$ sur U. Désignons par C_i celle

[29]) K. Borsuk [5], p. 222, 227 et 224.

[30]) cf. renvoi [25]).

[31]) Le nombre $b_0(X)$ (ou $b_0'(X)$) remplacera dans la suite le nombre de Betti correspondant à la dimension zéro.

des composantes de S_2-U qui contient z_i $(i=0, 1, \dots, n)$ et par K_1 un segment rectiligne qui joint C_0 avec l'un des continus $C_1, C_2, \dots, C_n$ (p. ex. avec C_n) sans avoir des points communs avec les autres ($K_1\cdot C_i=0$ pour $i=1, 2, \dots, n-1$). L'ensemble S_2-U étant compact, il en résulte que $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ sont des composantes de $(S_2-U)+K_1$. Or, on a selon III. (1) $r_{z_0z_n}^{p_n}\sim 1$ sur $U-K_1$, puisque $K_1\cdot C_0\neq 0$ et $K_1\cdot C_n\neq 0$. Il vient donc

$$\prod_{i=1}^{n-1} r_{z_0z_i}^{p_i}\sim 1 \quad \text{sur} \quad U-K_1.$$

et par conséquent $p_1=p_2=\dots=p_{n-1}=0$. Le cas général se réduit donc au cas $n=1$, déjà établi.

Remarque. Il est évident que l'indépendance linéaire des fonctions $r_{z_0z_1}, \dots, r_{z_0z_n}$ sur X est une condition suffisante, pour que X coupe S_2 entre tout couple parmi $z_0, z_1, \dots, z_n$. En effet, en supposant que X ne coupe pas S_2 entre z_{i_1} et z_{i_2} $(0\leqslant i_1<i_2\leqslant n)$, on a selon III. (2) et III. (1)

$$r_{z_0z_{i_1}}^{-1}\cdot r_{z_0z_{i_2}}=r_{z_{i_1}z_{i_2}}\sim 1 \quad \text{sur} \quad X$$

et les fonctions $r_{z_0z_1}, \dots, r_{z_0z_n}$ ne sont pas linéairement indépendantes sur X.

Cette remarque et le lemme précédent impliquent le

Théorème 1. *Pour tout ensemble $X\subset S_2$, on a*

$$b_0'(S_2-X)\leqslant b_1(X)+1.$$

Lemme 1. *$X\subset S_2$ étant un ensemble fermé et $z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$ une suite (finie ou non) de points de S_2-X, qui contient exactement un point de chaque composante de S_2-X, la suite des fonctions $r_{z_0z_1}, r_{z_0z_2}, \dots, r_{z_0z_n}, \dots$ est une base de S_1^X.*

Démonstration. Considérons deux points $x_1, x_2 \in S_2-X$. Il existe deux indices i_1 et i_2 tels que chacun des couples x_1, z_{i_1} et x_2, z_{i_2} se trouve dans une composante de S_2-X. On a donc selon III. (2) et III. (1):

$$r_{x_1x_2}=r_{x_1z_{i_1}}\cdot r_{z_{i_1}z_0}\cdot r_{z_0z_{i_2}}\cdot r_{z_{i_2}x_2} \quad \text{sur} \quad X,$$

$$r_{x_1z_{i_1}}\sim 1 \quad \text{sur} \quad X, \qquad r_{z_{i_2}x_2}\sim 1 \quad \text{sur} \quad X,$$

d'où

$$r_{x_1x_2}\sim r_{z_0z_{i_1}}^{-1}\cdot r_{z_0z_{i_2}} \quad \text{sur} \quad X.$$

Pour démontrer le lemme, il suffit donc, en vertu du lemme III.1, de montrer que, étant donnée une fonction arbitraire $f \epsilon S_1^X$, il existe un système fini de points $x_0, x_1, \ldots, x_n \epsilon S_2 - X$ et un système d'entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que $f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{x_0 x_i}^{p_i}$ sur X.

Or, selon III.(5), il existe un ensemble ouvert $U \supset X$ auquel la fonction f se laisse étendre. Dans U, nous pouvons trouver un ensemble $P \supset X$ qui est somme d'un nombre fini de polygones [32]). En unissant ces polygones par de segments rectilignes, auxquels on peut toujours étendre la fonction f, et en appliquant III.(5) au continu composé de P et de ces segments, on parvient au polygone $\Pi \supset X$ sur lequel la fonction f se trouve ainsi étendue. Désignons par $C_0, C_1, \ldots, C_n$ les composantes de $S_2 - \Pi$. Soit $x_i \epsilon C_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$ et posons $Y = S_2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i)$.

Chacun des ensembles $\overline{C}_i$ est homéomorphe à K_2 [33]), de sorte qu'il existe une fonction continue $g \epsilon \Pi^Y$ telle que $g(x) = x$ pour $x \epsilon \Pi$ (c. à d. que Π soit un rétracte de Y). En posant $f_1(x) = fg(x)$ pour $x \epsilon Y$, on a $f_1 \epsilon S_1^Y$ et $f_1(x) = f(x)$ pour $x \epsilon X$.

Nous avons ainsi montré que chaque fonction $f \epsilon S_1^X$ se laisse étendre sur S_2, à l'exception d'un nombre fini de points $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Dans la suite, nous appliquerons l'induction complète suivant le nombre n. Dans le cas $n = -1$ ou $n = 0$, on a $f_1 \epsilon S_1^{S_2}$ ou $f_1 \epsilon S_1^{S_2 - (x_0)}$, d'où $f_1 \sim 1$ sur X (cor. I.6, th. I.3) et finalement $f \sim 1$ sur X.

Supposons à l'instant que $x_0 = \infty$ et $x_n = 0$. Désignons par K_2' le cercle $|z| \leqslant t$ où t est choisi assez petit pour que l'on ait $K_2' \cdot X = 0$ et x_i *non* $\epsilon K_2'$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, ce qui est toujours possible, X étant fermé et x_n étranger à X. En posant pour $z \epsilon S_1$

$$g(z) = f_1(tz),$$

on a $g \epsilon S_1^{S_1}$ et il existe d'après III.(4) un entier p_n tel que $g(z) \cdot z^{p_n} \sim 1$

[32]) Nous appelons ici *polygone* tout ensemble fermé $P \subset S_2$ qui est la fermeture d'un ensemble ouvert connexe et dont la frontière se compose d'un nombre fini de segments rectilignes.

[33]) en vertu du théorème suivant, d'ailleurs le seul concernant S_2 qui soit postulé dans ce mémoire comme démontré (sauf le § 7):

Etant donné un continu $X \subset S_2$, toute composante C de $S_2 - X$ est homéomorphe à R_2 (cf. renvoi [11])).

Si en outre, X est un polygone, $\overline{C}$ est homéomorphe à K_2.

sur S_1. On a donc $f_1(z) \cdot \frac{z^{p_n}}{|z|^{p_n}} \sim 1$ sur la circonférence S_1' donnée par la relation $|z| = t$. Considérons la fonction $f_2(z) = f_1(z) \cdot \frac{z^{p_n}}{|z|^{p_n}}$ pour $z \epsilon S_2 - \sum_{i=0}^{n}(x_i) - (K_2' - S_1') = Y - (K_2' - S_1')$. On a $f_2 \sim 1$ sur S_1'; en vertu de I.(10) (en y posant $X_1 = Y - (K_2' - S_1')$, $X_1 = K_2'$, $f = f_2$), il existe donc une fonction $f_3 \epsilon S_1^{Y + (x_n)}$ qui est une extension de f_2. Pour $z \epsilon X$, on a ainsi

$$f_3(z) = f_2(z) = f_1(z) \cdot \frac{z^{p_n}}{|z|^{p_n}} = f(z) \cdot \frac{z^{p_n}}{|z|^{p_n}}.$$

Pour se débarrasser de l'hypothèse que $z_0 = \infty$ et $z_n = 0$, on n'a qu'à appliquer à S_2 la transformation $h_{z_0 z_n}^{-1}$ (qui fait passer z_n en 0 et z_0 en ∞) et, par conséquent, à remplacer la fonction $\frac{z}{|z|}$ par $r_{z_0 z_n}^{-1}$. On obtient ainsi pour $z \epsilon X$

$$f(z) = f_3(z) \cdot r_{z_0 z_n}^{p_n}(z)$$

avec $f_3 \epsilon S_1^{Y + (x_n)}$, ce qui réduit le cas de n au cas de $n-1$.

Le lemme qui vient d'être établi implique immédiatement le

Théorème 2. *Pour tout ensemble fermé $X \subset S_2 \neq X$, on a*

$$b_0(S_2 - X) = b_1(X) + 1 \text{ [34])}.$$

Corollaire 3. *La classe des sous-ensembles fermés de S_2 qui coupent S_2 en n (ou ∞) régions est invariante par rapport à l'homéomorphie.*

Corollaire 4. *Pour qu'un ensemble fermé $X \subset S_2$ ne coupe pas S_2, il faut et il suffit que l'espace S_1^X soit connexe* [35]).

[34]) Les nombres b_0 $(S_2 - X)$ et b_1 (X) remplaçant ici les nombres de Betti (voir renvois [28]) et [31])), on retrouve ce théorème comme cas particulier du théorème de dualité de J. W. Alexander [1], p. 343; cf. aussi L. Pontrjagin [1]. Le théorème 2 peut être aussi regardé comme cas particulier d'un théorème de H. Freudenthal [1], p. 162, dans l'énoncé duquel les notions d'homologie n'interviennent pas.

[35]) K. Borsuk [4], p. 247.

Théorème 5. *(de Jordan). Chaque courbe simple fermée $X \subset S_2$ coupe S_2 en deux régions et en est la frontière commune.*

Démonstration. D'après le th. I.14, on a $b_1(X) \geqslant 1$ et d'après III.(4) on a $b_1(X) \leqslant 1$. Il en résulte que $b_1(X)=1$ et par conséquent que $b_0(S_2-X)=2$. Pour prouver que X est la frontière de chacune des deux régions de S_2-X, remarquons que d'après le th. II.4 aucun vrai sous-ensemble de X ne coupe pas S_2.

Considérons les propriétés suivantes d'un espace compact Y:

(α_1) La classe des sous-ensembles ouverts de Y est invariante par rapport à l'homéomorphie.

(α_2) La classe des coupures fermées de Y est invariante par rapport à l'homéomorphie.

(α_3) De tout point $y \in Y$ il existe un entourage connexe U, aussi petit que l'on veut, contenant y et tel que l'ensemble $Y-\overline{U}$ soit connexe.

Théorème 6. *Les propriétés* (α_2) *et* (α_3) *impliquent* (α_1).

Démonstration. Soit X un sous-ensemble ouvert de Y et $X' \subset Y$ son image homéomorphe. Considérons un point arbitraire $x \in X$. Il existe selon (α_3) un entourage connexe $U \subset X$ de x, tel que l'ensemble $Y-\overline{U}$ est connexe. L'ensemble $F=\overline{U}-U$ est une coupure fermée de Y. D'après (α_2), son image F' l'est donc aussi. Désignons par A la composante de $Y-F'$ qui contient l'ensemble connexe U'. On a $(Y-F')-A \neq 0$. Pour prouver que l'ensemble U' est ouvert, il suffit d'établir l'égalité $U'=A$.

Supposons par contre que $A-U' \neq 0$. Par suite, l'ensemble $F'+U'$ coupe Y entre tout couple $y_1 \in A-U$ et $y_2 \in (Y-F')-A$. Or, on a $F'+U'=(F+U)'=(\overline{U})'$, contrairement à ($\alpha_2$).

Corollaire 7. *La classe des sous-ensembles ouverts de S_2 est invariante par rapport à l'homéomorphie.*

§ 3. La formule de Mayer-Vietoris-Čech.

Le problème que nous nous proposons de résoudre dans ce § est d'évaluer le nombre $b_1(X_1+X_2)$ de la somme de deux espaces X_1 et X_2. Nous ferons usage des notations suivantes:

Y étant un sous-ensemble quelconque de X, nous désignerons par $G(X,Y)$ le groupe des fonctions $f \in S_1^Y$ qui admettent une extension sur X,

par $H(X,Y)$ le groupe des fonctions $f \in S_1^X$ telles que $f \sim 1$ sur Y,

par $P(X_1, X_2)$ le groupe des fonctions $f \in S_1^{X_1+X_2}$ telles que $f \sim 1$ sur X_1 et sur X_2,

par $g(X, Y)$ le nombre d'éléments d'une base de $G(X, Y)$, lorsqu'il en existe une finie, et ∞ en cas contraire.

Les signes $h(X, Y)$ et $p(X_1, X_2)$ seront entendus dans le sens analogue.

Lemme 3. *Si les ensembles X_1 et X_2 sont fermés (ou ouverts) et $X_1 \cdot X_2 \neq 0$, alors*

$$p(X_1, X_2) \leqslant b_0(X_1 \cdot X_2) - 1.$$

Démonstration. Supposons que

$$X_1 \cdot X_2 = P_0 + P_1 + \ldots + P_n \qquad (n \geqslant 0)$$

où les ensembles P_j sont non vides, connexes, fermés (ou ouverts) et disjoints deux à deux. Soient

$$f_1, f_2, \ldots, f_m \in P(X_1, X_2) \qquad (m > n).$$

Il existe alors des fonctions $\varphi_l \in R_1^{X_1}$ et $\psi_l \in R_1^{X_2}$ telles que $f_l(x) = e^{i\varphi_l(x)}$ pour $x \in X_1$, $f_l(x) = e^{i\psi_l(x)}$ pour $x \in X_2$ et que $\varphi_l(x_0) = \psi_l(x_0)$ pour un certain $x_0 \in P_0$ $(l=1, 2, \ldots, m)$. On a $e^{i\varphi_l(x)} = e^{i\psi_l(x)}$ pour $x \in X_1 \cdot X_2$ et $l=1, 2, \ldots, m$, et, d'après I.(3), $\varphi_l(x) - \psi_l(x) = 0$ pour $x \in P_0$ et $\varphi_l(x) - \psi_l(x) = 2k_{lj}\pi$ pour $x \in P_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ où k_{lj} sont des entiers. La matrice des entiers k_{lj} $(l=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$ ayant plus de lignes que de colonnes, il existe des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_m$ qui ne s'annulent pas tous et pour lesquels on a

$$\sum_{l=1}^{m} p_l k_{lj} = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

En posant donc

$$\varphi^*(x) = \sum_{l=1}^{m} p_l \varphi_l(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_1,$$

$$\varphi^*(x) = \sum_{l=1}^{m} p_l \psi_l(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_2,$$

on obtient une fonction univoque, puisque $\sum_{l=1}^{m} p_l \varphi_l(x) = \sum_{l=1}^{m} p_l \psi_l(x)$ pour tout $x \in X_1 \cdot X_2$, et continue, puisque les ensembles X_1 et X_2 sont fermés (ou ouverts). On a

$$\prod_{l=1}^{m} [f_l(x)]^{p_l} = e^{i\varphi^*(x)} \quad \text{pour tout} \quad x \in X_1 + X_2$$

d'où l'inégalité $p(X_1, X_2) < m$. Or $m > b_0(X_1 \cdot X_2) - 1$ étant arbitraire, on a $p(X_1, X_2) \leqslant b_0(X_1 \cdot X_2) - 1$.

Lemme 4. *Si les ensembles X_1 et X_2 sont connexes, fermés et si $X_1 \cdot X_2 \neq 0$, alors*

$$p(X_1, X_2) = b_0(X_1 \cdot X_2) - 1.$$

Démonstration. En vertu du lemme précédent, il suffit de prouver que $p(X_1 \cdot X_2) \geqslant b_0(X_1 \cdot X_2) - 1$. Supposons que

$$X_1 \cdot X_2 = P_0 + P_2 + \ldots + P_n \qquad (n \geqslant 0)$$

où les ensembles P_j sont fermés, non vides et disjoints deux à deux. Posons pour $j=1, 2, \ldots, n$:

$$\psi_j(x) = 2\pi \frac{\varrho(x, X_1 \cdot X_2 - P_j)}{\varrho(x, P_j) + \varrho(x, X_1 \cdot X_2 - P_j)} \quad \text{pour} \quad x \in X_1 + X_2,$$

$$f_j(x) = e^{i\psi_j(x)} \quad \text{pour} \quad x \in X_1,$$

$$f_j(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in X_2.$$

On voit facilement que $f_j \in P(X_1, X_2)$. Pour prouver que les fonctions f_j sont linéairement indépendantes, supposons que

$$\prod_{j=1}^{n} [f_j(x)]^{p_j} = e^{i\varphi(x)} \quad \text{pour tout} \quad x \in X_1 + X_2$$

où $\varphi \in R_1^{X_1+X_2}$ et les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des entiers. On a $e^{i\varphi(x)} = e^{i[p_1\psi_1(x) + p_2\psi_2(x) + \ldots + p_n\psi_n(x)]}$ pour $x \in X_1$ et $e^{i\varphi(x)} = e^{i0}$ pour $x \in X_2$. Il existe donc d'après I.(3) deux entiers k_1 et k_2 tels que

$$\varphi(x) + 2k_1\pi = \sum_{j=1}^{n} p_j \psi_j(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_1,$$

$$\varphi(x) + 2k_2\pi = 0 \quad \text{pour} \quad x \in X_2.$$

Il en résulte que

$$2(k_1 - k_2)\pi = \sum_{j=1}^{n} p_j \psi_j(x) \quad \text{pour} \quad x \in X_1 \cdot X_2.$$

Soit maintenant $x_i \in P_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$; on a $\psi_j(x_i)=0$ pour $j \neq i$ et $\psi_j(x_i)=2\pi$ pour $j=i$. En posant donc $x=x_0$, on obtient $\sum_{j=1}^{n} p_j \psi_j(x) = 0$ pour tout $x \in X_1 \cdot X_2$. En posant dans cette formule $x=x_i$, on obtient $p_i=0$. Les fonctions f_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ sont donc linéairement indépendantes.

Lemme 5. *On a pour tout $Y \subset X$:*

$$b_1(X) = g(X, Y) + h(X, Y).$$

Démonstration. A chaque fonction $g \in G(X, Y)$ faisons correspondre une fonction $\bar{g} \in S_1^X$ telle que $\bar{g}(x) = g(x)$ pour $x \in Y$. Evidemment on a $g(X, Y) \leqslant b_1(X)$ et $h(X, Y) \leqslant b_1(X)$; on peut donc supposer que les nombres $g(X, Y)$ et $h(X, Y)$ soient finis. Désignons par

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \in G(X, Y) \subset S_1^Y \qquad n = g(X, Y)$$

$$h_1, h_2, \ldots, h_m \in H(X, Y) \subset S_1^X \qquad m = h(X, Y)$$

respectivement les bases de $G(X,Y)$ et de $H(X,Y)$. Nous allons montrer que les fonctions

$$\text{(i)} \qquad \bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n, \quad h_1, h_2, \ldots, h_m$$

forment une base de S_1^X.

Supposons que l'on ait pour un système d'entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$

$$\prod_{i=1}^{n} \bar{g}_i^{p_i} \cdot \prod_{i=1}^{m} h_i^{q_i} \sim 1 \quad \text{sur} \quad X.$$

Il en résulte que $\prod_{i=1}^{n} g_i^{p_i} \sim 1$ sur Y, puisque $h_i \sim 1$ sur Y, d'où il vient $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$. On a donc $\prod_{i=1}^{m} h_i^{q_i} \sim 1$ sur X, d'où $q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 0$. Les fonctions (i) sont donc linéairement indépendantes.

Soit maintenant f une fonction arbitraire de S_1^X. Il existe des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que $f \sim \prod_{i=1}^{n} g_i^{p_i}$ sur Y, d'où $f \cdot \prod_{i=1}^{n} (\bar{g}_i)^{-p_i} \in H(X, Y)$. Il existe donc des entiers $q_1, q_2, \ldots, q_m$ tels que $f \cdot \prod_{i=1}^{n} (g_i)^{-p_i} \sim \prod_{i=1}^{m} h_i^{q_i}$ sur X et finalement

$$f \sim \prod_{i=1}^{n} \bar{g}_i^{p_i} \cdot \prod_{i=1}^{m} h_i^{q_i} \quad \text{sur} \quad X.$$

Théorème 8. *Pour tout couple d'ensembles connexes et fermés X_1 et X_2 tels que $X_1 \cdot X_2 \neq 0$ et que les nombres $b_1(X_1)$, $b_1(X_2)$ et $b_0(X_1 \cdot X_2)$ sont finis, on a*

$$b_1(X_1 + X_2) = b_1(X_1) + b_1(X_2) + b_0(X_1 \cdot X_2) - 1$$
$$- [g(X_1, X_1 \cdot X_2) + g(X_2, X_1 \cdot X_2) - g(X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2)] \text{ [36]}.$$

[36]) Cette formule est analogue à la formule de l'addition établie dans la théorie de l'homologie par W. Mayer [1], p. 40, L. Vietoris [1], p. 162 et E. Čech [2], p. 178.

Démonstration. L'égalité qui est à démontrer se réduit en vertu des lemmes III.4 et III.5 à l'égalité

$$h(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)=h(X_1, X_1\cdot X_2)+h(X_2, X_1\cdot X_2)+p(X_1, X_2).$$

A toute fonction $f\in H(X_1, X_1\cdot X_2)$, c. à d. à toute fonction $f\in S_1^{X_1}$ telle que $f\sim 1$ sur $X_1\cdot X_2$, nous pouvons, en vertu de I.(10), faire correspondre une fonction $\bar f\in S_1^{X_1+X_2}$ telle que $\bar f(x)=f(x)$ pour $x\in X_1$ et que $\bar f\sim 1$ sur X_2. D'une façon analogue, nous ferons correspondre à toute fonction $g\in H(X_2, X_1\cdot X_2)$ une fonction $\bar g\in S_1^{X_1+X_2}$ qui en est une extension telle que $\bar g\sim 1$ sur X_1. On a évidemment $\bar f, \bar g\in H(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)$, d'où $h(X_1, X_1\cdot X_2)\leqslant h(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)$ et $h(X_2, X_1\cdot X_2)\leqslant h(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)$; comme $P(X_1, X_2)\subset H(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)$, on peut donc admettre les nombres $h(X_1, X_1\cdot X_2)$, $h(X_2, X_1\cdot X_2)$ et $p(X_1, X_2)$ finis. Soient

$$\begin{array}{lll} f_1, f_2, \ldots, f_n & \in H(X_1, X_1\cdot X_2) & n=h(X_1, X_1\cdot X_2),\\ g_1, g_2, \ldots, g_m & \in H(X_2, X_1\cdot X_2) & m=h(X_2, X_1\cdot X_2),\\ h_1, h_2, \ldots, h_l & \in P(X_1, X_2) & l=p(X_1, X_2) \end{array}$$

les bases correspondantes. Nous allons démontrer que les fonctions

(ii) $$\bar f_1, \bar f_2, \ldots, \bar f_n, \quad \bar g_1, \bar g_2, \ldots, \bar g_m, \quad h_1, h_2, \ldots, h_l$$

forment une base de $H(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)$.

Supposons que l'on ait pour un système d'entiers

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad q_1, q_2, \ldots, q_m, \quad s_1, s_2, \ldots, s_l$$

$$\prod_{i=1}^{n}\bar f_i^{p_i}\cdot\prod_{i=1}^{m}\bar g_i^{q_i}\cdot\prod_{i=1}^{l}h_i^{s_i}\sim 1 \quad \text{sur} \quad X_1+X_2.$$

Il en résulte que $\prod_{i=1}^{n}\bar f_i^{p_i}\sim 1$ sur X_1 et $\prod_{i=1}^{m}\bar g_i^{q_i}\sim 1$ sur X_2, puisque $\bar f_i\sim 1$ sur X_2, $\bar g_i\sim 1$ sur X_1 et $h_i\sim 1$ sur X_1 et sur X_2. Par conséquent $p_1=p_2=\ldots=p_n=q_1=q_2=\ldots=q_m=0$, ce qui donne $\prod_{i=1}^{l}h_i^{s_i}\sim 1$ sur X_1+X_2 et finalement $s_1=s_2=\ldots=s_l=0$. Les fonctions (ii) sont donc linéairement indépendantes.

Soit maintenant f une fonction arbitraire de $H(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)$. Il existe des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ tels que

$$f\sim\prod_{i=1}^{n}f_i^{p_i} \text{ sur } X_1 \qquad \text{et} \qquad f\sim\prod_{i=1}^{m}g_i^{q_i} \text{ sur } X_2.$$

Comme $\bar f_i\sim 1$ sur X_2 et $\bar g_i\sim 1$ sur X_1, on a donc

$$f\cdot\prod_{i=1}^{n}(\bar f_i)^{-p_i}\cdot\prod_{i=1}^{m}(\bar g_i)^{-q_i}\sim 1 \text{ sur } X_1 \quad \text{et} \quad \text{sur } X_2$$

et il existe des entiers $s_1, s_2, \ldots, s_l$ tels que

$$f\sim\prod_{i=1}^{n}\bar f_i^{p_i}\cdot\prod_{i=1}^{m}\bar g_i^{q_i}\cdot\prod_{i=1}^{l}h_i^{s_i} \quad \text{sur} \quad X_1+X_2.$$

Nous allons examiner quelques cas particuliers de la formule que nous venons d'établir. Remarquons d'abord que l'égalité

$$h(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)=h(X_1, X_1\cdot X_2)+h(X_2, X_1\cdot X_2)+p(X_1, X_2)$$

a été établie sans faire aucune hypothèse sur les ensembles X_1 et X_2 fermés (dans X_1+X_2). Supposons maintenant que $b_1(X_1\cdot X_2)=0$. On a alors $h_1(X_1+X_2, X_1\cdot X_2)=b_1(X_1+X_2)$, $h(X_1, X_1\cdot X_2)=b_1(X_1)$ et $h(X_2, X_1\cdot X_2)=b_1(X_2)$, de sorte qu'on obtient la formule

$$b_1(X_1+X_2)=b_1(X_1)+b_1(X_2)+p(X_1, X_2).$$

Or, dans le cas particulier où $X_1\cdot X_2$ est connexe ou vide, on voit facilement de I.(5) que $p(X_1, X_2)=0$. Nous avons ainsi démontré le

Théorème 9. *Pour tout couple d'ensembles X_1 et X_2 fermés, tels que $b_1(X_1\cdot X_2)=0$ et dont le produit $X_1\cdot X_2$ est connexe ou vide, on a*

$$b_1(X_1+X_2)=b_1(X_1)+b_1(X_2).$$

§ 4. Les théorèmes de S. Straszewicz.

Théorème 10. *Si aucun des ensembles $X_1\subset S_2$ et $X_2\subset S_2$ fermés (ou ouverts) dans X_1+X_2 ne coupe S_2 entre aucun couple de $z_0, z_1, \ldots, z_n$ ($n>0$) tandisque X_1+X_2 coupe S_2 entre chaque couple de ces points, on a $b_0(X_1\cdot X_2)\geqslant n+1$* [37].

Démonstration. Considérons les n fonctions $r_{z_0z_i}\in S^{X_1+X_2}$. On a selon III.(1) $r_{z_0z_i}\sim 1$ sur X_1 et sur X_2. D'après le lemme III.1, ces fonctions sont linéairement indépendantes. Il en résulte que $p(X_1, X_2)\geqslant n$, d'où $X_1\cdot X_2\neq 0$ et, en vertu du lemme III.3, $b_0(X_1\cdot X_2)\geqslant n+1$.

[37]) S. Straszewicz [1], p. 168.

Théorème 11. *$X_1 \subset S_2$ et $X_2 \subset S_2$ étant des continus tels que $S_2 \neq X_1 + X_2$, on a*

$$b_0[S_2 - (X_1 + X_2)] \geqslant b_0(X_1 \cdot X_2)\ ^{38)}.$$

Démonstration. Le théorème est évidemment vrai dans le cas où $X_1 \cdot X_2 = 0$. On peut donc supposer que $X_1 \cdot X_2 \neq 0$. D'après le th. III.2 et le lemme III.4, on a

$$b_0[S_2 - (X_1 + X_2)] = b_1(X_1 + X_2) + 1 \geqslant p(X_1, X_2) + 1 = b_0(X_1 \cdot X_2),$$ c. q. f. d.

Les th. III.10 et III.11 impliquent le suivant

Théorème 12. *$X_1 \subset S_2$ et $X_2 \subset S_2$ étant des continus dont aucun ne coupe S_2 et tels que $S_2 \neq X_1 + X_2$, on a*

$$b_0[S_2 - (X_1 + X_2)] = b_0(X_1 \cdot X_2)\ ^{39)}.$$

Théorème 13. *Si le produit $X_1 \cdot X_2$ de deux continus $X_1 \subset S_2$ et $X_2 \subset S_2$ n'est pas connexe, il existe deux points de $S_2 - (X_1 + X_2)$ tels que $X_1 + X_2$, mais non X_1, coupe S_2 entre eux* [40].

Démonstration. On a par hypothèse $b_0(X_1 \cdot X_2) > 1$, d'où en vertu du lemme III.4, $p(X_1, X_2) > 0$. Soit donc $f \in S_1^{X_1+X_2}$ une fonction telle que $f \sim 1$ sur X_1, mais que f *non* ~ 1 sur $X_1 + X_2$. D'après le lemme III. 2, il existe une suite finie $z_0, z_1, \ldots, z_n$ de points de $S_2 - (X_1 + X_2)$ entre lesquels $X_1 + X_2$ coupe S_2 et une suite d'entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (qui ne sont pas tous nuls) tels que $f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i}$ sur $X_1 + X_2$. On a donc $\prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i} \sim 1$ sur X_1 et, en vertu du lemme III.1, il existe parmi les points $z_0, z_1, \ldots, z_n$ un couple entre lequel X_1 ne coupe pas S_2, c. q. f. d.

Posons à présent pour tout ensemble fermé $X \subset S_2 \neq X$ tel que les nombres $b_1(X)$ et $b_0(X)$ sont finis:

$$I(X) = b_0(X) - b_1(X).$$

---

[38]) S. Straszewicz [1], p. 173.
[39]) S. Straszewicz [1], p. 174.
[40]) C'est une généralisation du deuxième théorème de Z. Janiszewski [1], p. 62, due à MM. C. Kuratowski et S. Straszewicz [1], p. 154.

Ce nombre a été introduit par M. S. Straszewicz [41]) qui a établi le théorème suivant:

Théorème 14. *Pour tout couple d'ensembles fermés $X_1 \subset S_2$ et $X_2 \subset S_2$ tels que $S_2 \neq X_1 + X_2$ et que les nombres $b_1(X_1)$, $b_1(X_2)$, $b_0(X_1)$, $b_0(X_2)$, $b_1(X_1 \cdot X_2)$ et $b_0(X_1 \cdot X_2)$ sont finis, on a*

$$I(X_1 + X_2) + I(X_1 \cdot X_2) = I(X_1) + I(X_2)\ ^{42)}.$$

Démonstration. Le théorème est évidemment vrai dans le cas $X_1 \cdot X_2 = 0$, puisqu'on a (th. III.9)

$$b_0(X_1 + X_2) = b_0(X_1) + b_0(X_2), \qquad b_1(X_1 + X_2) = b_1(X_1) + b_1(X_2)$$

et

$$I(X_1 \cdot X_2) = I(0) = 0.$$

Supposons que le théorème soit vrai dans le cas $b_0(X_1) = b_0(X_2) = 1$ et $b_0(X_1) + b_0(X_2) = n$. Soit $b_0(X_1) + b_0(X_2) = n + 1$. On peut donc supposer que X_1 n'est pas connexe. Désignons par Y une des ses composantes telle que $Y \cdot X_2 \neq 0$. On vérifie facilement les formules suivantes:

$$I(X_1 + X_2) + I[(X_1 - Y) \cdot X_2] = I(X_1 - Y) + I(X_2 + Y),$$
$$I(X_1 \cdot X_2) = I[(X_1 - Y) \cdot X_2] + I(X_2 \cdot Y),$$
$$I(X_1 - Y) + I(Y) = I(X_1),$$
$$I(X_2 - Y) + I(X_2 \cdot Y) = I(X_2) + I(Y).$$

La formule cherchée s'en obtient par addition.

Nous avons ainsi ramené le cas général au cas $b_0(X_1) = b_0(X_2) = 1$ et $X_1 \cdot X_2 \neq 0$. La formule cherchée prend la forme

$$b_1(X_1 + X_2) + b_1(X_1 \cdot X_2) - b_0(X_1 \cdot X_2) + 1 = b_1(X_1) + b_1(X_2),$$

qui se réduit en vertu du th. III.8 à la formule

$$b_1(X_1 \cdot X_2) = g(X_1, X_1 \cdot X_2) + g(X_2, X_1 \cdot X_2) - g(X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2),$$

que nous nous proposons maintenant de démontrer.

Considérons les trois suites:

$$C_1', C_2', \ldots, C_{n'}', \qquad C_1'', C_2'', \ldots, C_{n''}'', \qquad C_0, C_1, \ldots, C_n$$

---

[41]) M. S. Straszewicz [1], p. 184 considère le nombre $b_0(S_2 - X) - b_0(X)$ qui est égal, en vertu du th. III. 2, à $b_1(X) + 1 - b_0(X) = 1 - I(X)$. Dans la théorie de l'homologie on considère le nombre $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n p_n(X)$ (où $p_n(X)$ désigne le n-ième nombre de Betti de X), qu'on appelle *la caractéristique d'Euler-Poincaré*. Or, pour $X \subset S_2 \neq X$ et $n \geqslant 2$, on a $p_n(X) = 0$, de sorte que cette caractéristique devient égale à $p_0(X) - p_1(X)$. Elle coïncide donc avec $I(X)$ en vertu des renvois [28]) et [31]).
[42]) S. Straszewicz [1], p. 184.

où $\{C_i'\}$ désigne la suite des composantes de $S_2 - X \cdot X_2$ telles que $C_i' \subset X_1$. D'une façon analogue $\{C_n''\}$ désignera la suite des composantes de $S_2 - X_1 \cdot X_2$ telles que $C_n'' \subset X_2$, enfin $\{C_i\}$ désignera celle composantes de $S_2 - X_1 \cdot X_2$ telles que $C_i - (X_1 + X_2) \neq 0$. Il est évident que chaque composantes de $S_2 - X_1 \cdot X_2$ figure dans ces suites exactement une fois. La troisième suite est certainement non vide, puisque $S_2 - (X_1 + X_2) \neq 0$. En vertu du lemme III.2 les fonctions

(i) $\quad r_{z_0 z_1'}, \; r_{z_0 z_2'}, \; \ldots, \; r_{z_0 z_{n'}'} \qquad z_i' \in C_i'$

(ii) $\quad r_{z_0 z_1''}, \; r_{z_0 z_2''}, \; \ldots, \; r_{z_0 z_{n''}''} \qquad z_i'' \in C_i''$

(iii) $\quad r_{z_0 z_1}, \; r_{z_0 z_2}, \; \ldots, \; r_{z_0 z_n} \qquad z_i \in C_i - (X_1 + X_2)$

forment donc une base de $S_1^{X_1 \cdot X_2}$. La démonstration sera achevée, lorsqu'il sera prouvé que 1⁰ les fonctions (ii) et (iii) forment une base de $G(X_1, X_1 \cdot X_2)$ 2⁰ les fonctions (i) et (iii) forment une base de $G(X_2, X_1 \cdot X_2)$ et 3⁰ les fonctions (iii) forment une base de $G(X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2)$. Ces fonctions sont (sur $X_1 \cdot X_2$) linéairement indépendantes, puisqu'elles forment une base de $S_1^{X_1 \cdot X_2}$, et appartiennent à ces groupes, puisque

$$z_0, z_1, \ldots, z_n, z_1'', z_2'', \ldots, z_{n''}'' \in S_2 - X_1 \quad \text{et} \quad z_0, z_1, \ldots, z_n, z_1', z_2', \ldots, z_{n'}' \in S_2 - X_2.$$

Pour prouver 1⁰, considérons une fonction arbitraire $f \in S_1^{X_1}$. On a $X_1 \cdot X_2 \subset S_2 - \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n''} C_i'' \subset X_2$. Il existe donc, en vertu du lemme III.2 (appliqué à $S_2 - \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n''} C_i''$) une suite d'entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_1'', p_2'', \ldots, p_{n''}''$, telle que

$$f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i} \cdot \prod_{i=1}^{n''} r_{z_0 z_i''}^{p_i''} \quad \text{sur} \quad S_2 - \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n''} C_i'' \supset X_1 \cdot X_2.$$

On prouve 2⁰ d'une façon analogue.

Enfin, pour démontrer 3⁰, considérons une fonction arbitraire $f \in S_1^{X_1 + X_2}$. Il existe donc deux suites d'entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_1'', p_2'', \ldots, p_{n''}''$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_1', q_2', \ldots, q_{n'}'$, telles que

$$f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i} \cdot \prod_{i=1}^{n''} r_{z_0 z_i''}^{p_i''} \quad \text{sur} \quad X_1 \cdot X_2,$$

$$f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{q_i} \cdot \prod_{i=1}^{n'} r_{z_0 z_i'}^{q_i'} \quad \text{sur} \quad X_1 \cdot X_2,$$

d'où

$$\prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i - q_i} \cdot \prod_{i=1}^{n''} r_{z_0 z_i''}^{p_i''} \cdot \prod_{i=1}^{n'} r_{z_0 z_i'}^{-q_i'} \sim 1 \quad \text{sur} \quad X_1 \cdot X_2,$$

donc $p_1'' = p_2'' = \ldots = p_n'' = 0$ et finalement

$$f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i} \quad \text{sur} \quad X_1 \cdot X_2.$$

Remarque. Le th. III.14 reste vrai dans le cas où $S_2 = X_1 + X_2$, lorsqu'on pose $I(S_2) = 2$ (et non$=1$, comme cela résulte de la formule $I(X) = b_0(X) - b_1(X)$; c'est d'ailleurs clair en vertu du renvoi[41]), puisque $p_2(S_2) = 1$). En effet, le théorème est évidemment vrai dans le cas où $X_1 = X_2 = S_2$. On peut donc supposer que $X_1 - X_2 \neq 0$. On obtient le théorème cherché en appliquant le th. III.14 aux ensembles $Y_1 = X_1 - U(x, \varepsilon)$ et $Y_2 = X_2$, où $U(x, \varepsilon) \cdot X_2 = 0$ et $\varepsilon > 0$.

§ 5. Frontières communes à n régions.

Théorème 15. *Pour qu'un ensemble fermé $X \subset S_2$ soit une frontière*[43]) *commune à $n+1$ régions*[44]) *($n > 1$), il faut et il suffit qu'il existe n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ linéairement indépendantes et telles que $f_i \sim 1$ sur chaque ensemble fermé $Y \subset X \neq Y$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, soient $C_0, C_1, \ldots, C_n$ les $n+1$ régions-composantes de $S_2 - X$ dont X est la frontière commune. Soit $z_i \in C_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). L'ensemble X est donc, comme on le voit facilement, une coupure irréductible entre chaque couple de points $z_0, z_1, \ldots, z_n$, ce qui entraîne, selon III(1) que $r_{z_0 z_i} \sim 1$ sur chaque ensemble fermé $Y \subset X \neq Y$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) et, selon le lemme III.1, que les fonctions $r_{z_0 z_i} \in S_1^X$ sont linéairement indépendantes.

La condition est suffisante. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S_1^X$ les fonctions satisfaisant aux conditions du théorème. D'après III.(5), il existe un ensemble ouvert $U \supset X$ sur lequel les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se laissent étendre. S_2 étant localement connexe, il en résulte[45]) l'existence d'un nombre fini de composantes $C_1, C_2, \ldots, C_m$ de $S_2 - X$

[43]) Un ensemble X est dit *frontière* d'un ensemble $Y \subset S_2$ en formule $X = \mathrm{Fr}(Y)$, lorsque $X = \overline{Y} \cdot (\overline{S_2 - Y})$.

[44]) c. à d. un ensemble ouvert et connexe.

[45]) K. Borsuk [7].

telles que $X'=S_2-\sum_{j=1}^{m} C_j \subset U$. Soit C_j une composante pour laquelle $\mathrm{Fr}(C_j) \neq X$. On a donc $f_i \sim 1$ sur $\mathrm{Fr}(C_j)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ et, d'après I.(10) (en y posant $X_1=X'$, $X_2=\overline{C}_j$, $f=f_i$), on peut étendre les fonctions f_i sur $X'+C_j$. On peut donc supposer que la relation $\mathrm{Fr}(C_j)=X$ est vérifiée pour chaque $j=1, 2, \ldots, m$.

Or, les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant linéairement indépendantes, il vient $b_1(X') \geqslant n$, d'où selon le th. III.2 $b_0(S_2-X') \geqslant n+1$ et finalement $m \geqslant n+1$, c. q. f. d.

Corollaire 16. *La classe des sous-ensembles fermés de S_2 qui sont des frontières communes à n (ou ∞) régions est invariante par rapport à l'homéomorphie.*

Théorème 17. *Pour qu'un ensemble fermé $X \subset S_n \neq X$ soit une frontière commune à deux régions (ou, ce qui est la même chose, qu'il soit une coupure irréductible entre un couple de points de S_n-X), il faut et il suffit qu'il existe une transformation essentielle $f \in S_{n-1}^X$ qui soit inessentielle sur chaque ensemble fermé $Y \subset X \neq Y$.*

Démonstration. Pour réproduire la démonstration précédente, nous avons besoin des propositions suivantes:

1° Pour chaque couple de points $x_1, x_2 \in S_n$, il existe une fonction $f \in S_{n-1}^{S_n-(x_1)-(x_2)}$ telle que pour qu'un ensemble fermé $X \subset S_n-(x_1)-(x_2)$ coupe S_n entre x_1 et x_2 il faut et il suffit que la fonction f transforme X d'une façon essentielle [46]).

2° Chaque fonction $f \in S_{n-1}^X$ où X est un sous-ensemble fermé de S_n, se laisse étendre sur un ensemble ouvert $U \supset X$ [29]).

3° Pour tout ensemble ouvert $C \subset S_n$, chaque transformation inessentielle $f \in S_{n-1}^{\mathrm{Fr}(C)}$ se laisse étendre sur C [46]).

4° Si un ensemble fermé $X \subset S_n \neq X$ ne coupe pas S_n, aucune transformation $f \in S_{n-1}^X$ n'est essentielle [47]).

Corollaire 18. *La classe des sous-ensembles fermés de S_n qui sont des coupures irréductibles entre deux points est invariante par rapport à l'homéomorphie.*

Théorème 19. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu décomposable $X \subset S_2$ soit une coupure irréductible entre deux points est que l'on ait:*

$$X=X_1+X_2, \qquad X_1 \cdot X_2=P_1+P_2,$$
$$P_1 \cdot P_2=0, \qquad P_1 \neq 0 \neq P_2,$$

où P_1 et P_2 sont deux ensemble fermés et X_1 et X_2 sont deux continus irréductibles entre chaque couple de points $x_1 \in P_1$ et $x_2 \in P_2$ [48]).

[46]) K. Borsuk [3].

[47]) K. Borsuk [4], p. 247.

[48]) C. Kuratowski [6], p. 235.

Démonstration. La condition est nécessaire en vertu du th. II.14. Pour prouver qu'elle est suffisante, il suffit en vertu du th. III.15 de construire une fonction $f \in S_1^X$ telle que f *non* ~ 1 sur X, mais $f \sim 1$ sur chaque ensemble fermé $Y \subset X \neq Y$. Posons

$$\psi(x)=\pi \frac{\varrho(x, P_1)}{\varrho(x, P_1)+\varrho(x, P_2)} \qquad \text{pour} \quad x \in X,$$
$$f(x)=e^{i\psi(x)} \qquad \text{pour} \quad x \in X_1,$$
$$f(x)=e^{-i\psi(x)} \qquad \text{pour} \quad x \in X_2.$$

Nous avons établi dans la démonstration du th. II.1 que f *non* ~ 1 sur X. Pour prouver que $f \sim 1$ sur chaque ensemble fermé $Y \subset X \neq Y$, il suffit de prouver que $f \sim 1$ sur $X-U(x_0, \varepsilon)$ où $x_0 \in X_2$, $\varepsilon>0$ et $U(x_0, \varepsilon) \cdot X_1=0$. Or, X_2 étant irréductible entre chaque couple $x_1 \in P_1$ et $x_2 \in P_2$, il existe deux ensembles fermés Y_1 et Y_2 tels que

$$X_2-U(x_0, \varepsilon)=Y_1+Y_2,$$
$$Y_1 \cdot Y_2=0,$$
$$P_1 \subset Y_1, \qquad P_2 \subset Y_2.$$

Posons:

$$\varphi(x)=\psi(x) \qquad \text{pour} \quad x \in X_1,$$
$$\varphi(x)=-\psi(x) \qquad \text{pour} \quad x \in Y_1,$$
$$\varphi(x)=-\psi(x)+2\pi \qquad \text{pour} \quad x \in Y_2.$$

On vérifie facilement que $\varphi \in R_1^{X-U(x_0,\varepsilon)}$ et que $f(x)=e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X-U(x_0, \varepsilon)$.

§ 6. Ensembles localement connexes.

Lemme 6. *$X \subset S_2$ étant un ensemble localement connexe et $z_0, z_1, \ldots, z_n$ une suite finie de points de S_2-X, contenant exactement un point de chaque constituant de S_2-X, les fonctions*

$$r_{z_0 z_1}, \; r_{z_0 z_2}, \; \ldots, \; r_{z_0 z_n}$$

forment une base de S_1^X.

Démonstration. Il résulte du lemme III.1 que ces fonctions sont linéairement indépendantes. Soit $f \in S_1^X$. Il existe, comme on sait, un ensemble G_δ $X' \supset X$ sur lequel la fonction f admet une extension. Considérons l'ensemble

$$Y=X' \cdot L(X)-\sum_{i=0}^{n} (z_i),$$

qui est un G_δ localement connexe contenant X. D'après le th. II.15, l'ensemble $S_2 - Y$ admet aussi exactement $n+1$ constituants et $z_0, z_1, \dots, z_n$ est une suite de $n+1$ points extraits de chacun d'eux.

Pour tout ensemble fermé $Y_1 \subset Y$, désignons par Y_1^* l'ensemble fermé somme de Y_1 et de toutes les composantes de $S_2 - Y_1$ qui sont contenues dans Y.

D'après le th. II.17, Y contient un ensemble fermé Y_1 qui coupe S_2 entre chacun des couples de points $z_0, z_1, \dots, z_n$. Cette suite contient donc exactement un point de chaque composante de $S_2 - Y_1^*$ et d'après le lemme III.2, il existe une suite d'indices $p_1, p_2, \dots, p_n$ telle que

$$f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i} \quad \text{sur} \quad Y_1^*.$$

Pour prouver que cette relation subsiste sur Y, ce qui achève la démonstration, il suffit, en vertu de II.(3), de montrer qu'elle subsiste sur chaque ensemble fermé $Y_2 \subset Y$. Considérons l'ensemble $(Y_1 + Y_2)^*$. On voit aussitôt que la suite $z_0, z_1, \dots, z_n$ contient exactement un point de chaque composante de $S_2 - (Y_1 + Y_2)^*$, donc, en vertu du lemme III.2, il existe une suite d'indices $q_1, q_2, \dots, q_n$ telle que

$$f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{q_i} \quad \text{sur} \quad (Y_1 + Y_2)^*.$$

Il vient

$$\prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i - q_i} \sim 1 \quad \text{sur} \quad Y_1,$$

d'où, en vertu du lemme III.1, $p_i = q_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, puisque Y_1 coupe S_2 entre chaque couple de points $z_0, z_1, \dots, z_n$. Finalement,

$$f \sim \prod_{i=1}^{n} r_{z_0 z_i}^{p_i} \quad \text{sur} \quad Y_2, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le lemme qui vient d'être établi et le th. III.1 impliquent le suivant

Théorème 20. *Pour tout ensemble localement connexe $X \subset S_2 \neq X$ on a,*

$$b_0'(S_2 - X) = b_1(X) + 1.$$

Corollaire 21. *La classe des sous-ensembles localement connexes de S_2 qui coupent S_2 en n (ou une infinité de) constituants est invariante par rapport à l'homéomorphie.*

Théorème 22. *Pour qu'un ensemble connexe et localement connexe $X \subset S_2$ ne coupe pas S_2, il faut et il suffit qu'il soit unicohérent*[49]*).*

Démonstration. S_2 étant unicohérent (cor. I.6), on peut supposer que $X \neq S_2$. Le théorème résulte donc des th. III.20 et I.3 puisque la condition (b) équivaut à la condition $b_1(X) = 0$.

Les trois théorèmes suivants se démontrent d'une façon analogue aux th. III.11—13, excepté qu'au lieu de s'appuyer sur le lemme III.2 et le th. III.2, on doit s'appuyer sur le lemme III.6 et le th. III.20.

Théorème 23. *$X_1 \subset S_2$ et $X_2 \subset S_2$ étant deux ensembles connexes, localement connexes, fermés dans leur somme et tels que $S_2 \neq X_1 + X_2$, on a*

$$b_0'[S_2 - (X_1 + X_2)] \geqslant b_0(X_1 \cdot X_2).$$

Théorème 24. *$X_1 \subset S_2$ et $X_2 \subset S_2$ étant deux ensembles connexes, localement connexes, fermés dans leur somme, dont aucun ne coupe S_2 et tels que $S_2 \neq (X_1 + X_2)$, on a*

$$b_0'[S_2 - (X_1 + X_2)] = b_0(X_1 \cdot X_2).$$

Théorème. 25. *Si le produit $X_1 \cdot X_2$ de deux ensembles $X_1 \subset S_2$ et $X_2 \subset S_2$ connexes, localement connexes, fermés dans leur somme et tels que $b_0[S_2 - (X_1 + X_2)] < \infty$ n'est pas connexe, il existe deux points de $S_2 - (X_1 + X_2)$ tels que $X_1 + X_2$, mais non X_1, coupe S_2 entre eux.*

§ 7. Coupures locales.

Etant donné un sous-ensemble fermé Y d'un espace compact X, nous désignerons par (X, Y) l'espace qui s'obtient de X par l'identification des points de Y.

Lemme 7. *Etant donnés: un sous-ensemble ouvert U d'un espace compact X et un ensemble $U' \subset U$ ouvert et fermé dans U, on a*

$$b_1(X, X - U') \leqslant b_1(X, X - U) \text{ [50]}).$$

Démonstration. Posons $U'' = U - U'$. Soit f la fonction qui effectue l'identification de $X - U$. On vérifie facilement les formules suivantes:

$$f(X - U') + f(X - U'') = f(X),$$
$$f(X - U') \cdot f(X - U'') = f(X - U).$$

[49]) Pour X fermé voir C. Kuratowski [4], p. 145.

[50]) Nous écrivons $b_1(X, Y)$ au lieu de $b_1[(X, Y)]$.

L'ensemble $f(X-U)$ est vide ou se compose d'un seul point. Il en résulte en vertu du th. III. 9 que

$$b_1[f(X-U')]+b_1[f(X-U'')]=b_1[f(X)].$$

Or, on a $b_1[f(X-U')]=b_1(X, X-U')$ et $b_1[f(X)]=b_1(X, X-U)$, d'où $b_1(X, X-U')\leqslant b_1(X, X-U)$.

Lemme 8. Pour tout sous-ensemble fermé Y d'un espace compact X, on a

$$b_1(X, Y)\geqslant h(X, Y).$$

Démonstration. Soient $h_1, h_2, \ldots, h_n \in H(X, Y)$ n fonctions linéairement indépendantes. Il existe d'après I.(10) (en y posant $X_1=X$, $X_2=Y$, $f=f_i$) n fonctions $g_i \in S_1^X$ telles que $g_i\sim 1$ sur X et $g_i(x)=h_i(x)$ pour $x\in Y$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Considérons les fonctions $f_i(x)=\dfrac{h_i(x)}{g_i(x)}$. Elles sont linéairement indépendantes et on a $f_i(x)=1$ pour $x\in Y$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ peuvent donc être considérées comme fonctions de $S_1^{(X, Y)}$, qui sont évidemment linéairement indépendantes. L'inégalité cherchée en résulte aussitôt.

Le lemme précédent donne en vertu du lemme III. 5 l'inégalité $b_1(X, Y)\geqslant b_1(X)-g(X, Y)$, d'où

$$\text{(i)}\qquad b_1(X, Y)\geqslant b_1(X)-b_1(Y),$$

puisque $G(X, Y)\subset S_1^Y$.

Posons pour tout point x d'un espace compact X:

$$l_1(X, x)=\textit{borne inférieure des nombres}\ \liminf_{n\to\infty} b_1(X, X-U_n)$$

où $\{U_n\}$ parcourt toutes les suites d'ensembles ouverts tels que $x\in U_n$ et

$$\lim_{n\to\infty}\delta(U_n)=0\ ^{51)}.$$

Pareillement, pour tout ensemble $Y\subset S_2$ et tout $y\in S_2$, posons:

$$l_0(Y, y)=\textit{borne inférieure des nombres}\ \liminf_{n\to\infty} b_0(U_n\cdot Y)$$

où $\{U_n\}$ parcourt toutes les suites de sous-ensembles ouverts de S_2 tels que $y\in U_n$ et

$$\lim_{n\to\infty}\delta(U_n)=0.$$

[51]) Le nombre $b_1(X, x)$ peut être considéré comme le premier nombre de Betti local d'un espace compact X dans son point x. Or, dans le cas $X\subset S_2$ ce nombre coïncide avec le nombre analogue introduit par M. P. Alexandroff [1], p. 3, comme le montrent les formules du th. III. 27 et du théorème de dualité locale de P. Alexandroff [1], p. 4.

Théorème 26. *Pour tout ensemble fermé $X\subset S_2$ et pour tout point $x\in \mathrm{Fr}(X)$, on a*

$$l_0(S_2-X, x)=l_1(X, x)+1.$$

Démonstration. 1° $l_0(S_2-X, x)\geqslant l_1(X, x)+1$.

On peut évidemment supposer que $l_0(S_2-X, x)<\infty$. Il en résulte l'existence d'un nombre $\varepsilon>0$ tel qu'aucune composante de S_2-X n'est contenue dans $U(x, \varepsilon)$. On peut aussi admettre que

$$\text{(ii)}\qquad X-U(x, \varepsilon)\neq 0.$$

Soit $U\subset U(x, \varepsilon)$ un ensemble ouvert arbitraire tel que $x\in U$. Désignons par U' la composante de U qui contient x. On a

$$\text{(iii)}\qquad b_0(U'-X)\leqslant b_0(U-X).$$

Soit C la composante de S_2-U' qui contient l'ensemble connexe $S_2-U(x, \varepsilon)$. Posons $U''=S_2-C$. Nous allons montrer que

$$\text{(iv)}\qquad b_0(U''-X)\leqslant b_0(U'-X).$$

Comme $U''-X\supset U'-X$, il suffit de prouver que, pour toute composante C'' de $U''-X$, on a $C''\cdot(U'-X)\neq 0$. Supposons, par contre, que $C''\cdot(U'-X)=0$. L'ensemble C étant fermé, on a $\overline{C''}\cdot C=0$, puisque dans le cas contraire l'ensemble $C''+C\subset S_2-U'$ serait connexe et on aurait $C''\subset C$, contrairement à $C''\subset U''-X$. Il en résulte que $\mathrm{Fr}(C)\subset U''$, et, C'' étant par définition une composante de $U''-X$, que $\mathrm{Fr}(C'')\subset X$. L'ensemble C'' serait donc une composante de S_2-X contenue dans $U(x, \varepsilon)$, ce qui est impossible. L'inégalité (iv) est donc démontrée. Nous allons prouver que

$$\text{(v)}\qquad b_1(X, X-U'')+1=b_0(U''-X)$$

Soit à ce but f une transformation continue de S_2 qui effectue l'identification des points du continu C. L'ensemble $U''=S_2-C$ étant connexe, il résulte du th. de R. L. Moore[52]) que l'espace $f(S_2)$ est homéomorphe de S_2. D'après (ii) on a $f(U''-X)=f(S_2)-f(X)$ et comme $x\in\mathrm{Fr}(X)$, il vient $f(S_2)-f(X)\neq 0$. En vertu du th. III. 2 on a donc $b_0(U''-X)=b_1[f(X)]+1$, ce qui donne (v), puisque $f(X)=(X, X-U'')$. Les relations (iii), (iv) et (v) entraînent

$$b_0[U\cdot(S_2-X)]\geqslant b_1(X, X-U'')+1,$$

d'où l'inégalité cherchée (puisque $\delta(U'')<2\delta(U)$).

[52]) R. L. Moore [2], p. 425; C. Kuratowski [7], p. 318.

2° $l_0(S_2 - X, x) \leqslant l_1(X, x) + 1$.

Soit $U \subset X$ un ensemble ouvert dans X et tel que $x \in U$ et $\delta(U) < \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un nombre assujetti à l'inégalité (ii). Il existe alors un ensemble ouvert $U' \subset U(x, \varepsilon)$ tel que $U = X \cdot U'$. Soit U'' la composante de U' qui contient x. L'ensemble $X \cdot U''$ est alors ouvert et fermé dans $X \cdot U' = U$ et on a d'après le lemme III. 7

(vi) $$b_1(X, X - U'') \leqslant b_1(X, X - U).$$

Désignons par U''' l'ensemble U'' augmenté de toutes les composantes de $S_2 - U''$ qui sont disjointes de X. Pour montrer que l'ensemble U''' est ouvert, il suffit de remarquer que la somme de toutes les composantes d'un ensemble fermé $S_2 - U''$ qui contiennent au moins un point d'un ensemble fermé X est fermée.

L'ensemble U''' est donc ouvert et connexe. On a

(vii) $$X \cdot U''' = X \cdot U''$$

et, selon (ii), $U''' \subset U(x, \varepsilon)$. De plus, pour toute composante C de $S_2 - U'''$, on a $X \cdot C \neq 0$.

Soit f la fonction continue définie sur S_2 qui identifie les points de l'ensemble $S_2 - U'''$. La fonction f peut être représentée comme une superposition de deux fonctions $f = f_1 f_2$, telles que les tranches de la fonction f_1 sont des composantes de tranches de f et les tranches de la fonction f_2 sont 0-dimensionnelles [53]). Les tranches de la fonction f_1 sont donc: tous les points individuels de U''' et toutes les composantes de $S_2 - U'''$. Il résulte donc du th. cité de R. L. Moore que $f_1(S_2)$ est homéomorphe de S_2. On a $f_1(S_2 - U''') - f_1(X)$, puisque X contient des points de chaque composante de $S_2 - U'''$. Il en résulte que

(viii) $$b_0(U''' - X) = b_0[f_1(S_2) - f_1(X)].$$

Cette relation et la relation $x \in \mathrm{Fr}(X)$ entraînent $f_1(S_2) - f_1(X) \neq 0$ et on a d'après le th. III. 2

(ix) $$b_0[f_1(S_2) - f_1(X)] = b_1[f_1(X)] + 1.$$

Il résulte de la relation

$$(X, X - U''') = f(X) = f_2 f_1(X) = [f_1(X), f_1(X - U''')]$$

[53]) G. T. Whyburn [1], p. 297; S. Eilenberg [1], p. 292.

et de (i) que

$$b_1[f_1(X)] - b_1[f_1(X - U''')] \leqslant b_1(X, X - U''').$$

Or, l'ensemble $f_1(X - U''')$ appartient à une seule tranche de f_2 et par conséquent il est 0-dimensionnel. On en tire

(x) $$b_1[f_1(X)] \leqslant b_1(X, X - U'''),$$

puisque, pour tout espace séparable 0-dimensionnel Y, on a $b_1(Y) = 0$ en vertu de I. (7) (remarque).

Les relations (viii), (ix), (x), (vii) et (vi) entraînent

$$b_0[U'''(S_2 - X)] \leqslant b_1(X, X - U) + 1$$

d'où l'inégalité cherchée (puisque $\delta(U''') \leqslant 2\varepsilon$).

Corollaire 27. *Pour tout ensemble fermé $X \subset S_2$ et tout $x \in X$, le nombre $l_0(S_2 - X, x)$ est invariant par rapport aux transformations homéomorphes de X.*

En effet, dans le cas où le point x, ainsi que son image homéomorphe, sont des points frontières, le corollaire s'obtient du théorème qui vient d'être démontré. Dans le cas où l'un de ces points est intérieur, l'autre l'est aussi (cor. III. 7) et le nombre en question est égal à 0.

Ouvrages cités.

Alexander, J. W. [1] *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), pp. 333—349.

Alexandroff, P. [1] *On local properties of closed sets*, Ann. of Math. (2) 36 (1935), pp. 1—35.

Borsuk, K. [1] *Sur les rétractes*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 152—170.

— [2] *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. XVII (1931), pp. 171—209.

— [3] *Sur un espace des transformations continues et ses applications topologiques*, Monatshefte für Math. u. Phys. 38 (1931), pp. 381—386.

— [4] *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Ann. 106 (1932) pp. 239—248.

— [5] *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. XIX (1932) pp. 220—242.

— [6] *Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. XX (1933), pp. 224—231.

— [7] *Über eine Bedingung, die dem lokalen Zusammenhange äquivalent ist*, Mathematica 7 (1933), pp. 144—146.

Bruschlinsky, N. [1] *Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3*, Math. Ann. 109 (1934), pp. 525—537.

Čech, E. [1] *Trois théorèmes sur l'homologie*, Publ. de la Fac. de Sc. de l'Univ. Masaryk (1931), fasc. 144.

— [2] *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, Fund. Math. XIX (1932), pp. 149—183.

Eilenberg, S. [1] *Sur les transformations continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. XXII (1934), pp. 292—296.

— [2] *Sur les transformations continues d'espaces métriques en circonférence*, Fund. Math. XXIV (1935), pp. 160—176.

Freudenthal, H. [1] *Die Hopfsche Gruppe*, Compositio Math. 2 (1935), pp. 134—162.

Janiszewski, Z. [1] *O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua* (en polonais), Prace Matematyczno-Fizyczne 26 (1915), pp. 11—63.

Janiszewski, Z. et Kuratowski, C. [1] *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I (1920), pp. 210—222.

Kuratowski, C. [1] *Topologie I*, Monografje Matematyczne 3, Warszawa-Lwów 1933.

— [2] *Théorie des continus irréductibles entre deux points, I*, Fund. Math. III (1922), pp. 200—231 et *II*, Fund. Math. X (1929), pp. 225—275.

— [3] *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fund. Math. VI (1924), pp. 130—145.

— [4] *Les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer*, Fund. Math. VIII (1926), pp. 137—150.

— [5] *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, Fund. Math. XII (1928), pp. 20—42.

— [6] *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, Fund. Math. XII (1928), pp. 214—239.

— [7] *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. XIII (1929), pp. 307—318.

— [8] *Théorème sur trois continus*, Monatshefte für Math. u. Phys. 36 (1929), pp. 77—80.

Kuratowski, C. et Straszewicz, S. [1] *Généralisation d'un théorème de Janiszewski*, Fund. Math. XIII (1929), pp. 152—157.

Mayer, W. [1] *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Math. u. Phys. 36 (1929), pp. 1—42.

Moore, R. L. [1] *Concerning continuous curves in the plane*, Math. Zeit. 15 (1922), pp. 254—260.

— [2] *Concerning upper semi-continuous collection of continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), pp. 416—428.

Pontrjagin, L. [1] *Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze*, Math. Ann. 105 (1931), pp. 165—205.

Straszewicz, S. [1] *Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*, Fund. Math. VII (1925), pp. 159—187.

Vietoris, L. [1] *Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*, Monatshefte fur Math. u. Phys. 37 (1930), pp. 159—162.

Whyburn, G. T. [1] *Non-alternating transformations*, Amer. Jour. of Math. 56 (1934), pp. 294—302.

Sur l'existence de l'intégrale d'une différentielle totale.

Par

G. Van der Lijn (Bruxelles).

Soient $P(x,y,z)$ et $Q(x,y,z)$ deux fonctions mesurables définies dans un intervalle I $(a\leqslant x\leqslant A,\ b\leqslant y\leqslant B,\ c\leqslant z\leqslant C)$ de l'espace euclidien à trois dimensions. Soient $\varepsilon(x,y,z)$ une fonction mesurable positive définie dans I, et η un nombre positif.

Théorème. *Il existe au moins une fonction $z(x,y)$ des deux variables x et y, continue et dérivable dans le rectangle R $(a\leqslant x\leqslant A,$ $b\leqslant y\leqslant B)$, et telle que, exception faite des points d'un ensemble S dont la mesure superficielle est moindre que $\eta\cdot\operatorname{mes} R$, on ait les relations*

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}-P[x,y,z(x,y)]\right|\leqslant\varepsilon[x,y,z(x,y)]\quad et$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}-Q[x,y,z(x,y)]\right|\leqslant\varepsilon[x,y,z(x,y)].$$

Démonstration. Soit M_0 un point (x_0,y_0,z_0) où les trois fonctions P, Q et ε sont approximativement continues. Désignons par H l'ensemble des points où l'on a simultanément les trois relations

$$(1)\qquad \begin{aligned}|P(x,y,z)-P(x_0,y_0,z_0)|&<\tfrac{1}{2}\,\varepsilon(x_0,y_0,z_0)\\ |Q(x,y,z)-Q(x_0,y_0,z_0)|&<\tfrac{1}{2}\,\varepsilon(x_0,y_0,z_0)\\ |\varepsilon(x,y,z)-\varepsilon(x_0,y_0,z_0)|&<\tfrac{1}{2}\,\varepsilon(x_0,y_0,z_0).\end{aligned}$$

Cet ensemble admet le point M_0 pour point de densité, et il en est de même de l'ensemble H' des point (x',y',z') en lequel se transforme l'ensemble H par les relations

$$(2)\qquad x'=x,\quad y'=y,\quad z'=z-(x-x_0)\,P(x_0,y_0,z_0)-(y-y_0)\,Q(x_0,y_0,z_0).$$