Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

In der vorliegenden Arbeit geben wir Bedingungen an, unter welchen ein beliebiges System von Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{1}$$

für jede Folge $\{\eta_i\}$ eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}\xi_k| < \infty$ $(i=1,2,\ldots)$

besitzt. Die benutzte Methode stützt sich wesentlich auf die, neuerdings von den Herren S. Mazur und W. Orlicz begründete, Theorie der Räume vom Typus (B_0) [1]). Der Bequemlichkeit des Lesers wegen, werden zunächst die für das folgende wichtigen Begriffe und Sätze dieser Theorie zusammengestellt. Wir fügen sodann einige Bemerkungen hinzu. Es folgt ein allgemeiner Satz über Systeme linearer Gleichungen in einem Raum vom Typus (B_0) und eine Anwendung dieses Satzes auf die Systeme (1). Endlich werden diese Resultate zu einem einfachen Beweis des bekannten Satzes über die Existenz einer ganzen analytischen Funktion, die in einer gegebenen Punktfolge gegebene Werte annimmt, benutzt.

§ 1.

1. Ein linearer Raum E wird als *Raum vom Typus* (B_0) bezeichnet, wenn in ihm eine Folge von Funktionalen $\{|x|_i\}$ mit den folgenden Eigenschaften vorhanden ist:

---

[1]) S. Mazur und W. Orlicz, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, erscheint im nächsten Band dieses Journals.

1. $|x|_i \geqslant 0$, $|\Theta|_i = 0$, $|tx|_i = |t|\,|x|_i$, $|x+y|_i \leqslant |x|_i + |y|_i$ $(i=1,2,\ldots)$,

2. Ist $|x|_i = 0$ $(i=1,2,\ldots)$, so gilt $x=\Theta$, (x, y sind Elemente von E, Θ das Nullelement, t eine reelle Zahl),

3. Erklärt man die Entfernung (x,y) zweier Elemente x, y durch

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x-y|_i}{1+|x-y|_i},$$

so wird der Raum E zu einem vollständigen Raum.

Setzt man ferner

$$|x| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x|_i}{1+|x|_i}, \tag{2}$$

so heißt eine Folge linearer Funktionale $\{f_i(x)\}$ *stark konvergent*, wenn es eine Kugel $|x| \leqslant r$ gibt, so daß $\{f_i(x)\}$ in dieser Kugel gleichmäßig kovergiert. Jeder Raum vom Typus (B_0) ist, wie leicht einzusehen, ein Raum vom Typus (F) [2]). Die Räume vom Typus (B) sind spezielle Fälle der Räume vom Typus (B_0) und man erhält sie, indem man

$$|x|_i = \|x\| \qquad (i=1,2,\ldots)$$

setzt. Viele Sätze aus der Theorie der Räume vom Typus (B) übertragen sich auf die Räume vom Typus (B_0). Insbesondere gilt der folgende, für uns wichtige

Satz 1.[3]) *Es sei $U(x)$ eine im Raume E vom Typus (B_0) erklärte lineare Operation mit Werten aus einem Raum G, ebenfalls vom Typus (B_0). Ist $Y(y)$ ein lineares Funktional in G so ist*

$$X(x) = Y[U(x)] \tag{3}$$

ein lineares Funktional in E. Die Operation

$$X = \bar{U}(Y)$$

die durch (3) erklärt ist, ist linear und heißt zur Operation $U(x)$ konjugiert. Damit die Gleichung

$$y = U(x) \tag{4}$$

für jedes $y \in G$ eine Lösung $x \in E$ besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die Operation $X = \bar{U}(Y)$ eine stetige Umkehrung zuläßt.

[2]) Über die Räume vom Typus (F) siehe: S. Mazur und W. Orlicz, Über Folgen linearer Operationen, Studia Math. 4 (1933) p. 152–158.

[3]) loc. cit. [1]).

2. Bemerkung 1. *Damit eine Folge linearer Funktionale $\{f_i(x)\}$ stark gegen $f(x)$ konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß es eine natürliche Zahl N und eine Zahlenfolge $\{M_i\}$ mit $M_i > 0$, $M_i \to 0$ gibt, so daß*

$$|f_i(x) - f(x)| \leqslant M_i \sum_{k=1}^{N} |x|_k \qquad (x \in E) \tag{5}$$

gilt.

Die Bedingung ist hinreichend. Denn ist $|x| \leqslant \frac{1}{2^{N+1}}$, so wird nach (2)

$$\frac{|x|_k}{1+|x|_k} \leqslant \frac{1}{2}, \text{ also } |x|_k \leqslant 1 \qquad (k=1,2,\ldots,N)$$

und die Folge $\{f_i(x)\}$ ist in der Kugel $|x| \leqslant \frac{1}{2^{N+1}}$ gleichmäßig konvergent.

Die Bedingung ist notwendig. Es sei nämlich die Folge $\{f_i(x)\}$ in der Kugel $|x| \leqslant \delta$ gleichmäßig konvergent. Wir wählen eine natürliche Zahl N, so daß $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\delta}{2}$ ist. Die Menge H der Punkte x mit $|x|_i \leqslant \frac{\delta}{2}$ $(i=1,2,\ldots,N)$ gehört dann nach (2) der Kugel $|x| < \delta$ an, und infolgedessen ist die Folge $\{f_i(x)\}$ in H gleichmäßig konvergent. Setzt man nun

$$M_i = \frac{2}{\delta} \sup_{x \in H} |f_i(x) - f(x)|,$$

so ist (5) ersichtlich erfüllt.

Ist $f(x)$ ein additives Funktional und gibt es eine Zahl $M > 0$ und eine natürliche Zahl N, so daß

$$|f(x)| \leqslant M \sum_{k=1}^{N} |x|_k \qquad (x \in E)$$

gilt, so ist $f(x)$ offenbar linear. Umgekehrt, ist $f(x)$ ein beliebiges lineares Funktional in E, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $|x| < \delta$, $|f(x)| < 1$ gilt. Eine der in Bemerkung 1 durchgeführten ähnliche Überlegung zeigt, daß es eine Zahl $M > 0$ und eine natürliche Zahl N gibt, so daß die Ungleichung

$$|f(x)| \leqslant M \sum_{i=1}^{N} |x|_i \qquad (x \in E) \tag{6}$$

besteht. Ist $f(x) \not\equiv 0$, so nennen wir die kleinste natürliche Zahl N, für die es ein $M>0$ gibt, so daß (6) besteht, die *Ordnung* des Funktionals $f(x)$ und bezeichnen sie mit $n(f)$. Für $f(x) \equiv 0$ setzen wir $n(f)=0$. Aus dieser Definition folgt sofort, daß $f(x)$ in der Menge der Punkte: $|x|_i \leqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,n(f))$ beschränkt bleibt, während es für $N<n(f)$ immer eine Folge $\{x_m\}$ mit $|x_m|_1 \leqslant 1$, $|x_m|_2 \leqslant 1,\ldots, |x_m|_N \leqslant 1$ $(m=1,2,\ldots)$ gibt, für welche die Folge $\{f(x_m)\}$ unbeschränkt ist. Die Ordnung besitzt ferner folgende Eigenschaften:

a) ist λ eine reelle Zahl $\neq 0$, so gilt $n(\lambda f)=n(f)$;

b) $n(f_1+f_2) \leqslant \max[n(f_1), n(f_2)]$;

c) ist $n(f_1)<n(f_2)$, so gilt $n(f_1+f_2)=n(f_2)$;

d) ist die Folge linearer Funktionale $\{f_i(x)\}$ in jedem Punkt x beschränkt, so ist auch die Folge $\{n(f_i)\}$ beschränkt.

Die Eigenschaften a), b) sind evident. Um c) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß aus b)

(7) $$n(f_1+f_2) \leqslant n(f_2)$$

folgt. Anderseits gibt es eine Folge $\{x_k\}$, $|x_k|_i \leqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,n(f_2)-1;$ $k=1,2,\ldots)$, für welche die Folge $\{f_2(x_k)\}$ unbeschränkt ist. Es ist dann, wegen $n(f_1) \leqslant n(f_2)-1$, die Folge $\{f_1(x_k)\}$ beschränkt und infolgedessen die Folge $\{f_1(x_k)+f_2(x_k)\}$ unbeschränkt. Daraus schließen wir aber, daß $n(f_1+f_2) \geqslant n(f_2)$ sein muß, was zusammen mit (7) die Behauptung ergibt.

Endlich folgt d), nach einem Satze der Herren S. Mazur und W. Orlicz [4]), aus der gleichgradigen Stetigkeit der Folge $\{f_i(x)\}$, ähnlich wie (6).

Als Beispiel eines Raumes vom Typus (B_0) nehmen wir den *Raum* (s) aller Zahlenfolgen $\{\xi_k\}$. Man setzt dann für $x=\{\xi_k\}$, $|x|_i=|\xi_i|$ ($|\xi_i|$ bedeutet den absoluten Wert von ξ_i). Jedes lineare Funktional ist von der Form

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N} a_k \xi_k.$$

Man sieht leicht, daß, wenn $a_N \neq 0$ ist,

$$n(f)=N$$

gilt. Die starke Konvergenz einer Folge von linearen Funktionalen $\{f_i(x)\}$

[4]) loc. cit. [2]), p. 153.

$$f_i(x)=\sum_{k=1}^{N_i} a_k^{(i)} \xi_k$$

gegen $f(x) \equiv 0$ bedeutet hier nach d), daß die Folge $\{N_i\}$ beschränkt, $N_i \leqslant N$ und $\lim_{i\to\infty} a_k^{(i)}=0$ $(k=1,2,\ldots,N)$ ist.

3. Wir betrachten nun ein System von Gleichungen

(8) $$f_i(x)=\eta_i \qquad (i=1,2,\ldots)$$

wo $f_i(x)$ gegebene lineare Funktionale in E und η_i reelle Zahlen sind.

Satz 2. *Damit das System* (8) *für jede Folge* $\{\eta_i\}$ *eine Lösung* $x \in E$ *besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1) die Funktionale $f_i(x)$ *sind voneinander linear unabhängig,*

2) für jede natürliche Zahl p *gibt es eine natürliche Zahl* i_p, *so daß, wenn für irgendwelche Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$, $(\lambda_i \neq 0)$ *und* $\varphi(x)=\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\ldots+\lambda_i f_i(x)$

$$n(\varphi) \leqslant p$$

ist, die Ungleichung

$$i \leqslant i_p$$

gilt.

Beweis. Die Bedingungen sind notwendig. Setzen wir $\{\eta_i\}=y$, so ist durch (8) eine in E lineare Operation $y=U(x)$ mit Werten aus dem Raum (s) erklärt. Ist

$$Y(y)=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\ldots+c_N\eta_N$$

ein beliebiges lineares Funktional in (s), so wird

(9) $$\bar{U}(Y)=Y[U(x)]=c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_N f_N(x).$$

Diese Operation soll nach dem Satz 1 eine Umkehrung besitzen. Das ist aber ersichtlich mit 1) äquivalent. Nehmen wir nun an, daß 2) nicht richtig sei. Es gibt dann eine natürliche Zahl p und eine Folge linearer Funktionale

(10) $$\varphi_m(x)=\lambda_1^{(m)} f_1(x)+\lambda_2^{(m)} f_2(x)+\ldots+\lambda_{i_m}^{(m)} f_{i_m}(x), \quad (\lambda_{i_m}^{(m)} \neq 0,\ i_m \to \infty)$$

so daß

$$n(\varphi_m) \leqslant p \qquad (m=1,2,\ldots)$$

gilt. Nach Bemerkung 1 können wir nun eine Zahlenfolge $\{a_m\}$

mit $a_m \neq 0$ bestimmen, so daß die Folge $\{a_m \varphi_m(x)\}$ gegen $f(x) \equiv 0$ stark konvergiert. Dem Satz 1 zufolge muß dann die Folge der Funktionale in (s)

$$Y_m(y) = a_m(\lambda_1^{(m)} \eta_1 + \lambda_2^{(m)} \eta_2 + \ldots + \lambda_{i_m}^{(m)} \eta_{i_m})$$

gegen $Y(y) \equiv 0$ konvergieren. Aus der Eigenschaft d) der Ordnung folgt nun, wegen $\lambda_{i_m}^{(m)} \neq 0$, daß die Folge $\{i_m\}$ beschränkt ist, entgegen (10).

Die Bedingungen sind hinreichend. Zunächst folgt aus 1), daß die Operation (9) eine Umkehrung zuläßt. Es sei nun

$$(11) \qquad \varphi_m(x) = \lambda_1^{(m)} f_1(x) + \lambda_2^{(m)} f_2(x) + \ldots + \lambda_{i_m}^{(m)} f_{i_m}(x)$$

eine gegen $f(x) \equiv 0$ stark konvergente Folge. Nach der Eigenschaft d) der Ordnung ist die Folge $\{n(\varphi_m)\}$ beschränkt. Aus 2) folgt daher, daß die Folge $\{i_m\}$ beschränkt ist: $i_m \leqslant N$. Berücksichtigt man nun 1), so sieht man leicht, daß die Folgen $\{\lambda_1^{(m)}\}$, $\{\lambda_2^{(m)}\}, \ldots, \{\lambda_N^{(m)}\}$ gegen 0 konvergieren. [Denn es gibt Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_N$, so daß $f_k(x_k) = 1$, $f_i(x_k) = 0$, $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, N)$ und $\lim\limits_{m \to \infty} \varphi_m(x_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ ist]. Folglich konvergieren die Funktionale

$$\bar{Y}_m(y) = \lambda_1^{(m)} \eta_1 + \lambda_2^{(m)} \eta_2 + \ldots + \lambda_{i_m}^{(m)} \eta_{i_m}$$

stark gegen $Y(y) \equiv 0$, w. z. b. w.

Bemerkung 2. *Aus der Bedingung 2) folgt insbesondere, daß*

$$\lim_{i \to \infty} n(f_i) = \infty$$

sein muß. Wir schließen daraus, daß, wenn E ein Raum vom Typus (B) ist, das System (8) nicht für jede Folge $\{\eta_i\}$ lösbar sein kann, da in diesem Fall $n(f) = 1$ für jedes von $f(x) \equiv 0$ verschiedene lineare Funktional wäre.

Bemerkung 3. *Ist*

$$n(f_i) < n(f_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

so besitzt das System (8) *immer eine Lösung.* Die Bedingungen 1), 2) folgen nämlich dann ohne weiteres aus den Eigenschaften a), b), c) der Ordnung.

§ 2.

4. Es sei nun

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ein beliebiges System von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten ξ_k.

Satz 3. *Damit das System* (12) *für jede Folge* $\{\eta_i\}$ *eine Lösung* $\{\xi_k\}$ *mit*

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik} \xi_k| < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1′) *die Zeilen der Matrix* (a_{ik}) *sind voneinander linear unabhängig;*

2′) *für jede natürliche Zahl* p *gibt es eine natürliche Zahl* i_p, *so daß, wenn für irgendwelche Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$, M $(\lambda_i \neq 0,\ M > 0)$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{i} \lambda_\nu a_{\nu k}\right| \leqslant M \sum_{\nu=1}^{p} |a_{\nu k}| \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist, die Ungleichung $i \leqslant i_p$ *besteht.*

Beweis. Wir dürfen offenbar annehmen, daß es in jeder Kolonne der Matrix (a_{ik}) mindestens ein von 0 verschiedenes Element gibt. Die Menge E aller Zahlenfolgen $\{\xi_k\}$, die der Bedingung (13) genügen, bildet einen linearen Raum bei den gewöhnlichen Definitionen der Verknüpfungen. Setzen wir noch für $x = \{\xi_k\}$

$$(14) \qquad |x|_i = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik} \xi_k| \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

so wird E, wie leicht einzusehen, ein Raum vom Typus (B_0). Da die Elemente $e_m = \{\xi_k^{(m)}\}$, $\xi_k^{(m)} = 0$ $(k \neq m)$, $\xi_m^{(m)} = 1$ $(k, m = 1, 2, \ldots)$ ersichtlich eine Basis in E bilden, so ist jedes lineare Funktional in E von der Form

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k .$$

Ist ferner

$$(16) \qquad n(f) \leqslant N,$$

so gilt für ein gewisses $M > 0$ nach (6) und (14)

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k\Big| \leqslant M \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}\xi_k| \qquad (x \in E).$$

Setzt man hier der Reihe nach $x = e_1, e_2, \ldots,$ so erhält man

$$|c_k| \leqslant M \sum_{i=1}^{N} |a_{ik}| \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Umgekehrt, ist (17) erfüllt, so ist offenbar (15) ein lineares Funktional und es besteht die Ungleichung (16).

Setzt man nun

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

so bekommt man den Satz 3 als Folge des Satzes 2.

Bemerkung 4. Die Bemerkung 2 ergibt hier nach (17) als notwendige Bedingung dafür, daß das System (12) immer eine Lösung besitzt, folgendes:

Für jede natürliche Zahl p gibt es eine natürliche Zahl i_p, so daß für $i \geqslant i_p$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|a_{1k}| + |a_{2k}| + \ldots + |a_{pk}|}{|a_{ik}|} = 0$$

gilt.

Bemerkung 5. *Ist $a_{ik} \neq 0$ $(i, k = 1, 2, \ldots,)$ und*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{ik}}{a_{i+1,k}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{19}$$

so besitzt das System (12) *immer eine Lösung.*

Um dies zu beweisen, genügt es nach der Bemerkung 3 zu zeigen, daß

$$n(f_i) = i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gilt, wo $f_i(x)$ durch (18) erklärt ist. Zunächst folgt aus (17)

$$n(f_i) \leqslant i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Ferner setze man

$$x_m = \{\xi_k^{(m)}\}, \; \xi_k^{(m)} = 0, \; k \neq m, \; \xi_m^{(m)} = \frac{1}{a_{i-1,m}} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots).$$

Dann sind nach (19) die Folgen $\{|x_m|_1\}, \{|x_m|_2\}, \ldots, \{|x_m|_{i-1}\}$

beschränkt und die Folge $\{f_i(x_m)\}$ unbeschränkt. Demnach ist $n(f_i) \geqslant i$, also wegen (20) $n(f_i) = i$.

5. Wir bemerken jetzt, daß alle vorangehenden Ausführungen ungeändert bleiben, wenn man überall „reelle Zahl" durch „komplexe Zahl" ersetzt.

Es seien nun $\{z_i\}$, $\{w_i\}$ beliebige Folgen komplexer Zahlen und

$$\lim_{i \to \infty} z_i = \infty, \quad z_i \neq z_k, \quad i \neq k. \tag{21}$$

Es wird eine analytische Funktion

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ mit } g(z_i) = w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gesucht. Es genügt zu zeigen, daß das System

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_i^k \xi_k = w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

eine Lösung besitzt. Wir dürfen dabei, wegen (21),

$$|z_i| \leqslant |z_{i+1}| \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

voraussetzen.

Zunächst folgt aus der bekannten Auswertung der Vandermondeschen Determinante, daß die Zeilen der Matrix $(a_{ik}) = (z_i^k)$ voneinander linear unabhängig sind. Nehmen wir nun an, daß für irgendwelche Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, M$ $(\lambda_i \neq 0, M > 0)$ und eine natürliche Zahl p

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{i} \lambda_\nu z_\nu^k\Big| \leqslant M \sum_{\nu=1}^{p} |z_\nu^k| \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

ist. Hieraus erhält man für eine beliebige natürliche Zahl m

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k|z_i^k|} \Big|\sum_{\nu=1}^{i} \lambda_\nu z_\nu^k\Big| \leqslant M \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k|z_i^k|} \sum_{\nu=1}^{p} |z_\nu^k|$$

und umsomehr

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{i} \lambda_\nu \frac{z_\nu^k}{k z_i^k}\Big| \leqslant M \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{p} \Big|\frac{z_\nu^k}{k z_i^k}\Big|,$$

was auch in der Form

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{i} \lambda_\nu \sum_{k=1}^{m} \frac{z_\nu^k}{k z_i^k}\Big| \leqslant M \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \Big|\frac{z_\nu^k}{k z_i^k}\Big| \tag{23}$$

geschrieben werden kann. Beachten wir nun, daß die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_\nu^k}{k z_i^k}$ wegen (22) für $\nu < i$ konvergieren, während man für $\nu = i$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_i^k}{k z_i^k} = \infty$ erhält. Es ergibt sich dann, wegen $\lambda_i \neq 0$,

$$\lim_{m \to \infty} \left| \sum_{\nu=1}^{i} \lambda_\nu \sum_{k=1}^{m} \frac{z_\nu^k}{k z_i^k} \right| = \infty$$

und nach (23) umsomehr

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{z_\nu^k}{k z_i^k} \right| = \infty .$$

Daraus folgt $|z_i| \leqslant |z_p|$. Wählt man nun gemäß (21) die natürliche Zahl i_p, so daß für $\nu > i_p$ $|z_\nu| > |z_p|$ gilt, so muß $i \leqslant i_p$ sein, womit alles bewiesen ist.

Dieser Beweis bleibt, wie Herr H. Steinhaus bemerkt hat, ungeändert, wenn man $\lim_{i \to \infty} |z_i| = r$, $|z_i| \leqslant r$ statt $z_i \to \infty$ annimmt und $g(z)$ regulär im Kreise $|z| < r$ voraussetzt.

(Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1936).