Sur les fonctions indépendantes.

Par

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund (Wilno).

§ 1. Introduction. Nous démontrons dans ce travail quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes. Nous commençons par rappeler les définitions et quelques propriétés des fonctions indépendantes.

Soit $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t)$, une suite finie de fonctions réelles, mesurables, définies presque partout dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. On dit que ces fonctions sont *indépendantes* dans l'intervalle considéré, si, quelle que soit la suite d'intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_k$, on a l'égalité [1])

$$(1.1) \qquad |\underset{t}{\mathrm{E}}\{f_1(t) \in I_1, f_2(t) \in I_2, \ldots, f_k(t) \in I_k\}| = \prod_{i=1}^{n} |\underset{t}{\mathrm{E}}\{f_k(t) \in I_k\}|.$$

Dans cette relation, $\underset{t}{\mathrm{E}}\{P\}$ désigne l'ensemble des points jouissant de la propriété P, et $|E|$ désigne la mesure lebesguienne de l'ensemble E.

Les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ d'une suite infinie de fonctions sont appelées indépendantes, si les fonctions de toute suite partielle $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont indépendantes.

La notion de fonctions indépendantes s'étend immédiatement au cas où $f_1, f_2, \ldots$ sont des fonctions de plusieurs variables. Il suffit de considérer dans l'égalité (1.1) la variable t comme point variable de l'espace à k dimensions et de traîter $|E|$ comme la mesure k-dimensionnelle. De même, les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ peuvent être complexes. On suppose alors que les intervalles $I_1, I_2, \ldots$ dans (1.1) sont des rectangles à côtés parallèles aux axes de coordonnées.

[1]) Cf. Kolmogoroff [3], p. 50, Steinhaus [1], [2], Kac [1].

En partant de l'égalité (1.1) et en prenant des sommes et des produits d'ensembles, on voit que, si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont indépendantes, on a l'égalité

$$(1.2) \qquad |\underset{t}{\mathrm{E}}\{f_1(t) \in F_1, f_2(t) \in F_2, \ldots, f_k(t) \in F_k\}| = \prod_{i=1}^{k} |\underset{t}{\mathrm{E}}\{f_i(t) \in F_i\}|,$$

quels que soient les ensembles boreliens $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Cette relation cesse d'être vraie, lorsque $F_1, F_2, \ldots$ sont des ensembles mesurables L absolument quelconques, car même si la fonction $f(t)$ et l'ensemble F sont mesurables, l'ensemble $\underset{t}{\mathrm{E}}\{f(t) \in F\}$ peut ne pas l'être [1]).

Soit $f(t)$ une fonction mesurable L, définie dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. On appelle la fonction

$$(1.3) \qquad \varphi(y) = |\underset{t}{\mathrm{E}}\{f(t) \leqslant y\}|$$

fonction distribuante (ou *fonction de répartition*) de $f(t)$. Deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont appelées *équimesurables* quand elles possèdent la même fonction distribuante.

Etant donnée une suite quelconque $f_1(t), f_2(t), \ldots$ de fonctions mesurables, il existe une suite $g_1(t), g_2(t), \ldots$ de fonctions indépendantes telles que $g_i(t)$ et $f_i(t)$ sont équimesurables pour tout $i = 1, 2, \ldots$.

Dans le cas où l'ensemble des valeurs que prennent les fonctions f_i est tout au plus dénombrable, la construction de la suite $\{g_i\}$ est bien connue. Nous la rappelons brièvement, car nous en profiterons dans la suite.

Soit $\lambda(x)$ une fonction quelconque définie dans l'intervalle $(0,1)$. Nous dirons qu'une fonction $\mu(x)$ définie dans un intervalle (a, b) est *semblable* à $\lambda(x)$, si $\mu(x) = \lambda\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$.

[1]) En voici un exemple. Soit $h(x)$ une fonction croissante au sens strict dans l'intervalle $(0,1)$ et telle que $h'(x) = 0$ presque partout dans cet intervalle. Soit H l'ensemble des points où $h'(x) = 0$. L'ensemble H est transformé par la fonction $h(x)$ en un ensemble de mesure nulle G, situé sur l'axe des y (cf. S. Saks [1], p. 156). La fonction $g(x)$ définie par les conditions: $g(x) = h(x)$ pour $x \in H$ et $g(x) = h(0)$ ailleurs, est donc mesurable. Soit H_1 un ensemble non mesurable ne contenant pas le point 0 et contenu dans H, et G_1 l'image de H_1 sur l'axe des y. L'ensemble G_1, contenu dans l'ensemble G de mesure nulle, est lui même de mesure nulle, donc mesurable. En même temps l'ensemble $H_1 = \underset{x}{\mathrm{E}}\{g(x) \in G_1\}$ est non mesurable.

Soit $\{w_k^i\}_{k=1,2,\ldots}$ la suite des valeurs de la fonction $f_i(t)$. Nous désignons par e_k^i la mesure de l'ensemble $\underset{t}{\mathrm{E}}\{f_i(t)=w_k^i\}$ et nous posons $E_k^i=e_1^i+e_2^i+\ldots+e_k^i$.

On peut admettre que les fonctions f_i sont non croissantes dans l'intervalle (0,1), car s'il n'en est pas ainsi, on peut remplacer les fonctions f_i par des fonctions f_i^* équimesurables respectivement avec les f_i et non croissantes. (Si notamment $\varphi_i(y)$ est la fonction distribuante de $f_i(t)$, on peut définir $f_i^*(t)$ comme la fonction inverse à $\varphi_i(y)$). Les fonctions f_i sont donc constantes par intervalles (fonctions en escalier).

Posons maintenant $g_1(t)=f_1(t)$ et admettons que les fonctions $g_h(t)$ soient déjà définies pour $h=1, 2, \ldots, k-1$. Soit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ la suite des intervalles où $g_{k-1}(t)$ est constante. Nous définissons $g_k(t)$, en la supposant semblable à $f_k(t)$ dans chacun des intervalles δ_i. La fonction $g_k(t)$ est manifestement équimesurable avec $f_k(t)$. Pour démontrer que les fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_k$ sont indépendantes, remarquons que la formule (1.2), appliquée à la suite $\{g_i\}$, est sûrement vraie, si les ensembles F_i se réduisent chacun à un seul point. Elle restera donc vraie dans le cas général, car il suffit de se borner aux ensembles F_i tout au plus dénombrables.

Si toutes les fonctions f_k sont égales à 1 pour $0<t<\frac{1}{2}$ et à -1 pour $\frac{1}{2}<t<1$, alors, en posant g_k égale à 0 dans tous les points de discontinuité, on obtient la formule

$$g_k(t) = \operatorname{sign} \sin (2^k \pi t). \tag{1.4}$$

Ces fonctions sont souvent appelées *fonctions de Rademacher*.

La construction que nous venons d'envisager ne peut pas être appliquée, quand l'ensemble des valeurs des fonctions f_i est indénombrable. Dans ce cas, on peut procéder comme suit (en nous bornant, pour simplifier, au cas de deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$).

Posons: $f_1(x,y)=f_1(x)$ et $f_2(x,y)=f_2(y)$.

On voit aisément que les fonctions $f_1(x,y)$ et $f_2(x,y)$ sont indépendantes dans le carré Q $(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$. Transformons le carré Q en l'intervalle I $(0\leqslant t\leqslant 1)$ de façon que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

(a) la transformation est biunivoque, en négligeant deux ensembles de mesure nulle, l'un situé dans Q et l'autre dans I.

(b) la transformation conserve la mesure de l'ensemble, c. à d. que la mesure plane de l'ensemble mesurable $E\subset Q$ est égale à la mesure linéaire de l'image de E, contenue dans l'intervalle I.

La transformation en question transforme $f_i(t)$ en une fonction $g_i(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1;\ i=1,2)$. On voit immédiatement que la fonction $f_i(t)$ est équimesurable avec $g_i(t)$ et que les fonctions $g_1(t)$ et $g_2(t)$ sont indépendantes. Si les fonctions f_1 et f_2 admettent un nombre fini ou dénombrable de valeurs, cette construction embrasse comme cas particulier la construction précédente.

Le même raisonnement s'étend immédiatement au cas d'un nombre fini quelconque de fonctions f_i. Il peut aussi être appliqué aux suites $\{f_i\}$ infinies, mais alors on doit se servir de la notion et des propriétés de la mesure dans l'espace $0\leqslant x_i\leqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots)$ à une infinité de dimensions.

Pour éviter cette difficulté, on peut employer le raisonnement suivant, provenant de M. H. Steinhaus [1]). Soit $t=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ le développement diadique d'un nombre arbitraire t de l'intervalle (0,1). Pour fixer les idées, supposons que ce développement est essentiellement infini. Nous définissons une suite de points $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \ldots, \vartheta_n(t), \ldots$ par les formules

$$\vartheta_1=0,\alpha_1\alpha_3\alpha_6\alpha_{10}\ldots,\qquad \vartheta_2=0,\alpha_2\alpha_3\alpha_9\ldots,\qquad \vartheta_3=0,\alpha_4\alpha_8\ldots \tag{1.5}$$

Inversement, à toute suite de points $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ aux développements diadiques de la forme (1.5), nous assignons le point $t=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, de sorte que $t=t(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots)$ et $\vartheta_i=\vartheta_i(t)$ $(i=1,2,\ldots)$. Comme l'a démontré M. Steinhaus [2]), les fonctions $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \ldots$ sont indépendantes et de plus, quel que soit l'ensemble mesurable H contenu dans l'intervalle (0,1), on a $|\underset{t}{\mathrm{E}}\{\vartheta_i(t)\in H\}|=|H|$. Par conséquent, si l'on pose

$$g_i(t)=f_i(\vartheta_i(t)),$$

les fonctions f_i et g_i sont équimesurables et les fonctions g_i sont toutes indépendantes. (On voit aisément que les g_i sont mesurables, si les f_i le sont; si les f_i sont non croissantes, ce que nous pouvons toujours supposer, ce fait est immédiat.)

On peut montrer facilement que si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions indépendantes définies dans l'intervalle (0,1) et si $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont respectivement leur fonctions distribuantes, la fonction dis-

[1]) Steinhaus [2].
[2]) Steinhaus [1].

stribuante $\chi(y)$ de la somme $f(t)+g(t)$ est donnée par la formule

$$\chi(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y-u)\,d\psi(u), \tag{1.6}$$

valable pour tous les y où χ est continue.

Ces remarques permettent d'identifier la notion de fonctions indépendantes avec celle de variables aléatoires indépendantes du calcul des probabilités. Tout théorème démontré pour l'une de ces notions peut être traduit immédiatement en langage de l'autre. En particulier, tous les résultats du travail présent peuvent être formulés en termes de la théorie des probabilités. Nous ne le faisons qu'exceptionnellement, car cela ne présente aucune difficulté. Cependant nous devons remarquer que pour la démonstration de certains théorèmes du calcul des probabilités, en particulier pour le th. 1 (§ 2) du travail présent, la notion de fonctions indépendantes nous paraît avantageuse.

La notion de fonctions indépendantes peut être utilisée pour l'arithmétisation de celle de variables aléatoires. Toutefois, pour que l'identification mentionnée soit légitime, il faut démontrer au préalable la proposition suivante:

Soient $\{x_i(t)\}_{i=1,2,\dots,n}$ et $\{y_i(t)\}_{i=1,2,\dots,n}$ deux suites de fonctions indépendantes, telles que $x_i(t)$ et $y_i(t)$ sont équimesurables pour $i=1,2,\dots,n$. Alors les fonctions $X(t)=x_1(t)+x_2(t)+\dots+x_n(t)$ et $Y(t)=y_1(t)+y_2(t)+\dots+y_n(t)$ sont équimesurables.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la formule (1.6). Voici une démonstration indépendante, qui peut d'ailleurs servir à démontrer (1.6). Supposons d'abord que chacune des fonctions x_i (donc aussi chacune des y_i) admette un nombre tout au plus dénombrable de valeurs différentes $w_1^i, w_2^i, \dots$. Soit $E_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ l'ensemble des points t où $x_1=w_{k_1}^1$, $x_2=w_{k_2}^2, \dots, x_n=w_{k_n}^n$, et $F_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ l'ensemble correspondant pour les fonctions y_i. En vertu de l'indépendance des x_i et de celle des y_i, on a

$$|E_{k_1,k_2,\dots,k_n}|=\prod_{i=1}^{n}|\underset{t}{\mathrm{E}}\,x_i=w_{k_i}^i|=\prod_{i=1}^{n}|\underset{t}{\mathrm{E}}\,y_i=w_{k_i}^i|=|F_{k_1,k_2,\dots,k_n}|,$$

ce qui prouve notre assertion dans le cas considéré.

Dans le cas général, nous choisissons un $\varepsilon>0$ et remplaçons les suites $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ par les suites $\{x_i'\}$ et $\{y_i'\}$, où

$$x_i'(t)=k\varepsilon,\quad \text{si}\quad k\varepsilon\leqslant x_i(t)<(k+1)\varepsilon \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\dots;\ i=1,2,\dots),$$

la définition des y_i' étant analogue. Les fonctions x_i' sont indépendantes et il en est de même des y_i'. De plus, les fonctions x_i' et y_i' sont équimesurables. Les

fonctions $X'=x_1'+x_2'+\dots+x_n'$ et $Y'=y_1'+y_2'+\dots+y_n'$ sont donc aussi équimesurables. En faisant tendre ε vers 0, on voit que X est équimesurable avec Y. La proposition subsiste pour $n=\infty$.

Ce raisonnement donne aussi le résultat suivant, dont nous ferons l'usage dans la suite:

Soit $X^*(t)=\operatorname*{Max}_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_1^m x_i(t)\right|$, $Y^*(t)=\operatorname*{Max}_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_1^m y_i(t)\right|$; alors $X^*(t)$ est équimesurable avec $Y^*(t)$.

De ce résultat, on peut déduire le théorème suivant:

Etant données deux suites infinies $\{x_i(t)\}_{i=1,2,\dots}$ et $\{y_i(t)\}_{i=1,2,\dots}$ composées de fonctions indépendantes et où $x_i(t)$ est équimesurable avec $y_i(t)$, si la série $\sum_i x_i(t)$ converge presque partout, il en est de même de la série $\sum_i y_i(t)$.

Posons, en effet, $X_{m,n}^*(t)=\operatorname*{Max}_{m\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=m}^{k} x_j(t)\right|$, où $m\leqslant n$, et définissons $Y_{m,n}^*(t)$ d'une façon analogue. Soit: $X_m^*(t)=\lim_{n\to\infty}X_{m,n}^*(t)$, $Y_m^*(t)=\lim_{n\to\infty}Y_{m,n}^*(t)$; il est évident que les limites en question existent. La condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_i x_i(t)$ converge presque partout, est que l'on ait $\lim_{m\to\infty}X_m^*(t)=0$ presque partout. Les fonctions $X_{m,n}^*(t)$ et $Y_{m,n}^*(t)$ sont équimesurables. Les fonctions $X_m^*(t)$ et $Y_m^*(t)$ sont donc équimesurables pour tout $m=1,2,\dots$. Si $X_m^*(t)\to0$ presque partout, $\lim_{m\to\infty}Y_m^*(t)$ existe, car la suite $\{Y_m^*(t)\}$ est non croissante. Donc, $Y_m^*(t)\to0$ presque partout, ce qui achève la démonstration.

Mentionnons encore la propriété suivante des fonctions indépendantes:

Si les fonctions $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$ sont indépendantes et intégrables L dans l'intervalle $(0,1)$, leur produit est aussi intégrable et, en outre,

$$\int_0^1 f_1 f_2\dots f_k\,dt=\int_0^1 f_1\,dt\cdot\int_0^1 f_2\,dt\cdot\dots\cdot\int_0^1 f_k\,dt. \tag{1.7}$$

Cette formule à été démontrée par M. M. Kac[1]), dans l'hypothèse superflue que le produit $f_1 f_2\dots f_k$ est intégrable. Or, l'intégrabilité de ce produit s'obtient facilement, en considérant les sommes approchées lebesguiennes pour les intégrales $\int_0^1 f_i\,dt$ et en for-

[1]) Kac [1].

mant le produit de ces sommes. On aura aussi à tenir compte de l'égalité (1.1) et du fait que le produit d'un nombre fini de séries absolument convergentes converge absolument.

En particulier, si les valeurs moyennes de toutes les fonctions $f_i(t)$ sont égales à 0, c. à d. que si

$$\int_0^1 f_i\,dt = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

le système des fonctions f_i est orthogonal sur $(0,1)$. Comme les intégrales $\int_0^1 f_i^2\,dt$ peuvent être infinies, le système en question n'est pas nécessairement normalisable.

Ajoutons que si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont indépendantes et la somme $s=f_1+f_2+\ldots+f_k$ est intégrable, toutes les fonctions f_i sont intégrables (de même, si $s\epsilon L^p$, on a $f_i\epsilon L^p$ pour $i=1,2,\ldots$). Si p. ex. $k=2$, l'intégrabilité de f_1 s'obtient facilement, en considérant la somme s sur l'ensemble $\underset{t}{\mathrm{E}}\{\alpha\leqslant f_2(t)\leqslant\beta\}$, où les nombres α et β sont tels que ce dernier ensemble soit de mesure positive; on doit aussi tenir compte de (1.1). D'une manière analogue, si aucune des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ne s'évanouit presque partout dans $(0,1)$, l'intégrabilité du produit $f_1 f_2 \ldots f_k$ entraîne celle de tous les facteurs f_i.

§ 2. *Théorème 1.* *Soit $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ une suite finie de fonctions indépendantes dans $(0,1)$, telles que*

$$\int_0^1 x_i(t)\,dt = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{2.1}$$

Alors, en posant

$$X(t)=\sum_{i=1}^n x_i(t), \qquad X^*(t)=\operatorname*{Max}_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^m x_i(t)\Big|,$$

on a pour tout $p>1$

$$\int_0^1 \{X^*(t)\}^p\,dt \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 |X(t)|^p\,dt. \quad ^{1)} \tag{2.2}$$

[1]) Cf. aussi Paley et Zygmund [1_1], p. 351 et suivantes. Le th. 1, avec une constante absolue au lieu du coefficient $2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$, de même que le th. 13 (cf. plus loin, p. 87), subsistent aussi pour $p=1$. Nous y reviendrons dans un autre travail. (Remarque ajoutée pendant la correction des épreuves).

Fixons un nombre $\varepsilon>0$ et soit

$$x_i'(t)=\varepsilon k \quad \text{pour} \quad \varepsilon k\leqslant x_i(t)<\varepsilon(k+1), \qquad x_i''(t)=x_i'(t)-\int_0^1 x_i'(t)dt,$$

où $i=1, 2, \ldots$ et $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Les fonctions $x_k(t)$ étant indépendantes, il en est de même des $x_k'(t)$, donc des $x_k''(t)$. Les fonctions $x_k''(t)$ admettent au plus une infinité dénombrable de valeurs et la valeur moyenne de tout $x_k''(t)$ est égale à 0.

En partant des fonctions $x_k''(t)$ et en appliquant la construction décrite au § 1, on obtient une suite de fonctions $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, constantes par intervalles, indépendantes et équimesurables respectivement avec $x_1''(t), x_2''(t), \ldots, x_k''(t)$. De plus, si δ est un intervalle de constance de $y_k(t)$, on a

$$\int_\delta y_{k+1}(t)\,dt=\int_\delta y_{k+2}(t)\,dt=\ldots=\int_\delta y_n(t)\,dt=0.$$

En même temps, toutes les fonctions $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_k(t)$ sont constantes dans δ. Pour tout point t intérieur à δ, nous avons ainsi

$$y_1(t)+y_2(t)+\ldots+y_k(t)=\frac{1}{\delta}\int_\delta [y_1(u)+y_2(u)+\ldots+y_k(u)]\,du=\frac{1}{\delta}\int_\delta Y(u)\,du,$$

où $Y=y_1+y_2+\ldots+y_n$. Désignons par $X''^*(t)$ et $Y^*(t)$ les fonctions analogues à $X^*(t)$, mais formées respectivement pour les suites $\{x_i''\}$ et $\{y_i\}$. La dernière égalité montre que

$$Y^*(t)\leqslant\operatorname*{Max}_{\xi<t<\eta}\frac{1}{\eta-\xi}\int_\xi |Y(t)|\,dt,$$

excepté peut-être les extrémités des intervalles de constance.

D'après le théorème de M. M. Hardy et Littlewood[1]), on a

$$\int_0^1 \{Y^*(t)\}^p\,dt\leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 |Y(t)|^p\,dt. \tag{2.3}$$

Les fonctions Y et Y^* sont respectivement équimesurables avec X'' et X''^* où $X''=x_1''+x_2''+\ldots+x_n''$. La dernière inégalité peut donc être écrite sous la forme

$$\int_0^1 [X''^*(t)]^p\,dt\leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 |X(t)|^p\,dt. \tag{2.4}$$

[1]) Hardy et Littlewood [1], Hardy, Littlewood et Pólya [1], p. 291.

Les fonctions x_k' et x_k'' dépendent de ε. Faisons tendre ε vers 0. Alors $x_k'(t)$ tend vers $x_k(t)$ uniformément par rapport à t. Par conséquent $\int_0^1 x_k'(t)\,dt \to \int_0^1 x(t)\,dt = 0$. On en déduit les relations suivantes, aussi uniformes par rapport à t:

$$x_k''(t) \to x_k(t) \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

$$X''(t) \to X(t), \qquad X''^*(t) \to X^*(t),$$

et l'inégalité (2.4) se transforme en (2.2). Le théorème est ainsi démontré. Il est évident qu'il subsiste pour $n=\infty$. Il résulte du th. 1 que l'on a pour tout $R>0$

$$(2.5) \qquad |\underset{t}{\mathrm{E}}\{X^*(t) \geqslant R\}| \leqslant 2R^{-p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 |X(t)|^p\,dt \qquad (p>1).$$

En particulier, si $p=2$, il vient

$$|\underset{t}{\mathrm{E}}\{X^*(t) \geqslant R\}| \leqslant 8R^{-2}\int_0^1 |X^2(t)|\,dt.$$

La dernière inégalité a été obtenue pour la première fois par M. Kolmogoroff[1]), même sous une forme plus précise, à savoir sans le coefficient 8 dans le second membre. Cette inégalité à été formulée par M. Kolmogoroff en termes de variables aléatoires indépendantes. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont de telles variables, à valeurs moyennes nulles, et si

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} x_k, \qquad s = s_n, \qquad t = \operatorname*{Max}_m |s_m|,$$

l'inégalité (2.2) peut être écrite dans la forme

$$\mathfrak{M}\{t^p\} \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathfrak{M}\{|s|^p\},$$

où $\mathfrak{M}\{x\}$ désigne l'espérance mathématique de la variable x.

Remarquons que l'hypothèse (2.1) est indispensable pour la validité du théorème. Soit, en effet $n=2$; posons $x_1(t)=z_1(t)+a$ et $x_2(t)=z_2(t)-a$, où z_1 et z_2 sont deux fonctions indépendantes à valeurs moyennes nulles. Alors $x_1+x_2=z_1+z_2$ et l'on vérifie que l'inégalité (2.2) est en défaut (même si l'on y remplace $2p^p/(p-1)^p$ par un coefficient quelconque), pourvu que a soit suffisamment grand.

[1]). Kolmogoroff [1].

Il est peu vraisemblable que le coefficient $2p^p/(p-1)^p$ dans (2.2) soit le plus petit possible, ce qui d'ailleurs n'a pas d'importance. Il serait intéressant de savoir si l'inégalite (2.2) subsiste pour $p=1$ lorsqu'on y modifie convenablement le coefficient numérique dans le second membre. Nous ignorons la réponse à cette question (cf. aussi le th. 3 plus loin) *). Ajoutons seulement que l'on a les inégalités suivantes:

$$\int_0^1 X^*(t)\,dt \leqslant A\int_0^1 |X(t)|\log^+|X(t)|\,dt + A, \qquad \int_0^1 \{X^*(t)\}^\mu\,dt \leqslant A_\mu\left\{\int_0^1 |X(t)|\,dt\right\}^\mu,$$

qui peuvent être considérées comme des cas-limites de (2.2) pour $p=1$. (A désigne ici une constante absolue et A_μ ne dépend que de μ.) Les démonstrations en sont les mêmes que celle de (2.2), pourvu qu'au lieu de (2.3) on applique d'autres inégalités analogues, dues aussi à MM. Hardy et Littlewood[1]).

§ 3. Soient $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ des fonctions indépendantes, de carré intégrable dans $(0,1)$. Supposons que

$$(3.1) \qquad \int_0^1 x_\nu(t)\,dt = 0, \qquad \int_0^1 x_\nu^2(t)\,dt = 1 \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n)$$

et soit $X(t) = b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) + \ldots + b_n x_n(t)$, où $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des constantes arbitraires. L'application de l'inégalité de Schwarz nous donne $\int_0^1 |X|\,dt \leqslant \left(\int_0^1 X^2\,dt\right)^{1/2}$. Dans certains cas, on a besoin de l'inégalité inverse, à savoir de

$$(3.2) \qquad \int_0^1 |X|\,dt \geqslant A\left(\int_0^1 X^2\,dt\right)^{1/2},$$

où A est une constante indépendante de n et des b_ν. Cette inégalité est vraie dans le cas où les x_ν sont de fonctions de Rademacher[2]) et dans certains autres cas[3]). Nous allons démontrer la proposition suivante:

*) Ce problème vient d'être résolu; cf. p. 66, renvoi[1]). (Remarque ajoutée pendant la correction des épreuves).

[1]) Hardy et Littlewood [1].

[2]) Cf. p. ex., Zygmund [1], 129 (5, 7, 8).

[3]) Cf. Kac et Steinhaus [1].

Théorème 2. *S'il existe une constante Δ telle que l'on ait pour tout ν*

$$\int_0^1 |x_\nu|\,dt \geqslant \Delta\Big(\int_0^1 x_\nu^2\,dt\Big)^{1/2} = \Delta, \tag{3.3}$$

il existe une constante $A=A(\Delta)$ indépendante de n et des b_ν, telle que l'on ait (3.2).

Remarquons en passant que la condition (3.3) est satisfaite, si toutes les fonctions $x_1, x_2, \ldots$ sont également intégrables. Il suffit même de supposer qu'il existe un δ, $0<\delta<1$, et un nombre $R>0$ tels que l'on ait $\int_{E_\nu} x_\nu^2\,dt<\delta$ pour $\nu=1,2,\ldots$, E_ν désignant l'ensemble des points où $|\varphi_\nu(t)|>R$.

En effet, on a alors

$$\int_0^1 |x_\nu|\,dt \geqslant \int_{CE_\nu} |x_\nu|\,dt \geqslant \frac{1}{R}\int_{CE_\nu} x_\nu^2\,dt \geqslant \frac{1-\delta}{R},$$

ce qui donne (3.3) avec $\Delta=(1-\delta)/R$. Ajoutons encore que (3.3) est non seulement une condition suffisante, mais aussi nécessaire pour la validité de (3.2). Pour s'en convaincre, il suffit de poser $b_\nu=1$ et $b_\mu=0$ pour $\mu\neq\nu$. Alors (3.2) se transforme en (3.3), avec $\Delta=A$.

La démonstration du théorème 2 sera basée sur le suivant

Lemme a [1]. *Soit $f(t)$, où $0\leqslant t\leqslant 1$, une fonction non négative de carré intégrable. Soit b^2 la valeur de l'intégrale de f^2. En supposant que*

$$\int_0^1 f\,dt \geqslant \Delta\Big(\int_0^1 f^2\,dt\Big)^{1/2}, \tag{3.4}$$

la mesure de l'ensemble $\underset{t}{\mathrm{E}}\{\frac{1}{2}\Delta b<f(t)\}$ est au moins égale à $\Delta^2/16$.

Pour le prouver, désignons par E_1, E_2, E_3 les ensembles des points où l'on a respectivement

$$f(t)\leqslant \tfrac{1}{2}b\Delta, \qquad \tfrac{1}{2}b\Delta<f(t)<4b/\Delta, \qquad f(t)\geqslant 4b/\Delta.$$

[1]) Cf. Paley et Zygmund [1_3], p. 192, ou Zygmund [2].

Alors

$$\int_{E_1} f\,dt \leqslant |E_1|\cdot\frac{1}{2}b\Delta \leqslant \frac{1}{2}b\Delta, \qquad |E_3|\cdot\frac{16b^2}{\Delta^2} \leqslant \int_{E_3} f^2\,dt \leqslant \int_0^1 f^2\,dt = b^2,$$

ce qui donne $|E_3|\leqslant\Delta^2/16$. Par conséquent

$$\int_{E_3} f\,dt \leqslant \Big(\int_{E_3} f^2\,dt\Big)^{1/2}|E_3|^{1/2} \leqslant \frac{\Delta b}{4}.$$

Des inégalités pour $\int_{E_1} f\,dt$, $\int_{E_3} f\,dt$ et de (3.4), on déduit que $\int_{E_2} f\,dt \geqslant \frac{\Delta b}{4}$, donc

$$|E_2|\cdot 4b/\Delta \geqslant \frac{\Delta b}{4},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Passons à la démonstration du th. 2. Soit λ un nombre positif qui sera fixé plus tard. Considérons l'ensemble

$$E=\underset{t}{\mathrm{E}}\{|X|>\lambda B\}, \qquad \text{où} \qquad B^2=\int_0^1 X^2\,dt=\sum_1^n b_\nu^2,$$

et remarquons qu'en tout cas $|E|\leqslant 1/\lambda^2$. Définissons le nombre λ_1 par l'equation $1/\lambda_1^2=\Delta^2/32$. Alors, pour $\lambda\geqslant\lambda_1$, on aura toujours $|E|\leqslant\Delta^2/32$. D'autre part:

$$\lambda B\int_0^1 |X|\,dt \geqslant \lambda B\int_{CE} |X|\,dt \geqslant \int_{CE} X^2\,dt, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\int_{CE} X^2\,dt &= \sum_{\nu=1}^n b_\nu^2\int_{CE} x_\nu^2\,dt + 2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} b_i b_k \int_{CE} x_i x_k\,dt \geqslant \\ &\geqslant \sum_{\nu=1}^n b_\nu^2\int_{CE} x_\nu^2\,dt - 2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\Big|b_i b_k\int_{CE} x_i x_k\,dt\Big| = P-Q.\end{aligned} \tag{3.6}$$

On voit de la relation (3.1) que les fonctions $x_i x_k$, où $i\neq k$, forment un système orthogonal et normal dans $(0,1)$. De plus, l'intégrale de $x_i x_k$, étendue sur $(0,1)$, est égale à 0 (cf. (1.7)). Donc, en appliquant les inégalités de Schwarz et de Bessel, il vient

$$\begin{aligned}Q &= 2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\Big|b_i b_k\int_E x_i x_k\,dt\Big| \leqslant 2\Big(\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} b_i^2 b_k^2\Big)^{1/2}\Big[\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\Big(\int_E x_i x_k\,dt\Big)^2\Big]^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant 2B^2|E|^{1/2} \leqslant 2B^2/\lambda.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Désignons par E_ν l'ensemble $\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x_\nu|\geqslant\frac{1}{2}\Delta\}$. En vertu du lemme α, on a $|E_\nu|\geqslant\Delta^2/16$. Par conséquent $|E_\nu\cdot \mathrm{C}E|\geqslant\Delta^2/32$, donc

$$\int\limits_{\mathrm{C}E} x_\nu^2\,dt\geqslant\int\limits_{E_\nu\cdot\mathrm{C}E} x_\nu^2\,dt\geqslant\frac{\Delta^2}{32}\cdot\frac{\Delta^2}{4}=\frac{\Delta^4}{128}. \tag{3.8}$$

De cette inégalité, ainsi que des inégalités (3.5), (3.6) et (3.7), on obtient

$$\int\limits_0^1|X|\,dt\geqslant\frac{1}{\lambda}B\left(\frac{\Delta^4}{128}-\frac{2}{\lambda}\right)=\frac{B}{\lambda}\frac{\Delta^4}{256}=AB,$$

en posant $\lambda=512/\Delta^4$ et $A=\Delta^8/512\cdot 256$.

Le nombre λ ainsi fixé satisfait à l'inégalité $\lambda>\lambda_1$. Le th. 2 est donc démontré.

Théorème 3. *Les conditions* (3.1) *et* (3.3) *supposées satisfaites, soit:*

$$X(t)=\sum_{k=1}^n b_k x_k(t),\qquad X^*(t)=\operatorname*{Max}_{1\leqslant m\leqslant n}\Big|\sum_{k=1}^m b_k x_k(t)\Big|.$$

Alors

$$\int\limits_0^1 X^*\,dt\leqslant\bar{A}(\Delta)\int\limits_0^1|X|\,dt, \tag{3.9}$$

où $\bar{A}(\Delta)$ est une constante qui ne dépend que de Δ.

Ce théorème complète le Théorème 1 dans le cas $p=1$. Pour l'établir, il suffit de remarquer que

$$\int\limits_0^1 X^*\,dt\leqslant\Big(\int\limits_0^1 X^{*2}\,dt\Big)^{1/2}\leqslant\sqrt{8}\Big(\int\limits_0^1 X^2\,dt\Big)^{1/2}\leqslant\frac{\sqrt{8}}{A(\Delta)}\int\limits_0^1|X|\,dt,$$

où $A(\Delta)$ est la même constante que dans le th. 2. L'inégalité (3.9) subsiste, quand on y remplace X^* par X^{*p} et $|X|$ par $|X|^p$, pourvu que $1\leqslant p\leqslant 2$. La constante $\bar{A}$ ne dépend pas de p.

Théorème 4. *La suite $\{x_\nu(t)\}$ de fonctions indépendantes satisfaisant aux conditions* (3.1) *et* (3.3), *si la série $\sum\limits_{\nu=1}^\infty b_\nu x_\nu(t)$ converge presque partout, la série $\sum\limits_{\nu=1}^\infty b_\nu^2$ converge.*

Ce théorème est connu dans le cas où les x_ν sont uniformément bornées [1]) ou, plus généralement, les x_ν^2 également intégrables [2]). Rappelons encore que l'ensemble des points de convergence d'une série de fonctions indépendantes est soit de mesure 1, soit de mesure 0.

D'après le théorème de Egoroff, il existe un ensemble E de mesure aussi petite que l'on veut et tel que dans l'ensemble complémentaire $\mathrm{C}E$ les sommes partielles $s_n(t)=\sum\limits_1^n b_\nu x_\nu(t)$ convergent uniformément. En particulier $|s_n(t)|\leqslant M$ pour $t\in\mathrm{C}E$ et $n=1,2,\ldots$ Par conséquent

$$|\mathrm{C}E|\cdot M^2\geqslant\int\limits_{\mathrm{C}E} s_n^2\,dt\geqslant\sum_1^n b_\nu^2\int\limits_{\mathrm{C}E} x_\nu^2\,dt-2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\Big|b_i b_k\int\limits_E x_i x_k\,dt\Big|$$
$$\geqslant\sum_1^n b_\nu^2\int\limits_{\mathrm{C}E} x_\nu^2\,dt-2B_n^2|E|^{1/2},$$

où $B_n^2=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2$. En raisonnant comme dans (3.8), on voit que si $|E|\leqslant\Delta^2/32$, on a

$$\sum_1^n b_\nu^2\int\limits_{\mathrm{C}E} x_\nu^2\,dt\geqslant\frac{B_n^2}{128}\Delta^4,$$

donc

$$|\mathrm{C}E|\cdot M^2\geqslant B_n^2\Big(\frac{\Delta^4}{128}-2|E|^{1/2}\Big)\geqslant B_n^2\frac{\Delta^4}{256},$$

pourvu que $|E|$ soit suffisamment petit. Nous obtenons ainsi $B_n^2\leqslant 256\,|\mathrm{C}E|\cdot M^2/\Delta^4$ pour $n=1,2,\ldots$, ce qui prouve le théorème.

Il est facile de voir que *si la condition* (3.3) *est en défaut, c. à d. si $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1|x_\nu|\,dt=0$, alors on peut construire une suite $\{b_\nu\}$ telle que $\sum b_\nu^2=\infty$ et cependant $\sum b_\nu x_\nu(t)$ converge presque partout.* Car on peut choisir alors une suite d'indices $n_1<n_2<\ldots$ telle que la série $\sum\frac{1}{\sqrt{k}}\int\limits_0^1|x_{n_k}|\,dt$ soit finie. Cette dernière condition implique que $\sum\frac{1}{\sqrt{k}}x_{n_k}$ converge presque partout, bien que $\sum\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)^2=\infty$.

---

[1]) Khintchine et Kolmogoroff [1].

[2]) Kac et Steinhaus [1].

§ 4. Nous allons étudier dans ce § la convergence des séries de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu(t)}{\nu}, \tag{4.1}$$

où les x_ν sont des fonctions indépendantes à valeurs moyennes nulles. La convergence de telles séries est étroitement liée avec la loi forte des grands nombres. Car, d'après le théorème bien connu et utilisé à des occasions semblables, si une série numérique $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ converge, on a $\frac{1}{n}(u_1+2u_2+\ldots+n\,u_n)\to 0$. En appliquant ce théorème, on voit que, si la série (4.1) converge presque partout, on a pour presque tout t

$$\frac{1}{n}(x_1(t)+x_2(t)+\ldots+x_n(t))\to 0. \tag{4.2}$$

Théorème 5. *Soit $1\leqslant p\leqslant 2$ et admettons que les fonctions indépendantes $x_\nu(t)$ satisfont aux conditions:*

$$\int_0^1 x_\nu\,dt=0, \qquad \int_0^1 |x_\nu|^p\,dt=M_\nu^{(p)}. \tag{4.3}$$

Alors, si la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{M_\nu^{(p)}}{\nu^p}$ converge, la série (4.1) converge presque partout.

En particulier, on a presque partout la relation (4.2).

Inversement, si la série $\sum M_\nu^p \nu^{-p}$ diverge, on peut trouver une suite $\{x_\nu\}$ de fonctions indépendantes satisfaisant à (4.3) et telles que la série (4.1) diverge presque partout.

Pour $p=2$, ce théorème a été démontré par M. Kolmogoroff [1]). Les nombres $M_\nu^{(p)}$ sont les p-ièmes moments des variables aléatoires x_ν représentées par les fonctions $x_\nu(t)$. On voit en particulier que si les p-ièmes moments $(1<p\leqslant 2)$ des variables aléatoires indépendantes sont bornés, ces variables satisfont à la loi forte des grands nombres. Nous ferons souvent dans la suite l'usage de la proposition suivante:

[1]) Kolmogoroff [1].

Lemme β. *Soit $\{z_\nu(t)\}$ une suite de fonctions indépendantes, de carré intégrables et à valeurs moyennes nulles. Si $\sum_\nu \int_0^1 z_\nu^2(t)\,dt<\infty$, la série $\sum z_\nu(t)$ converge presque partout* [1]).

En admettant ce lemme, posons:

$$\begin{aligned} E_i^\nu &= \underset{t}{\mathrm{E}}(i\leqslant|x_\nu|<i+1), & e_i^\nu &= |E_i^\nu|, \\ \bar{E}_i^\nu &= \underset{t}{\mathrm{E}}\Big(\frac{1}{i+1}\leqslant|x_\nu|<\frac{1}{i}\Big), & \bar{e}_i^\nu &= |\bar{E}_i^\nu|; \end{aligned} \qquad i=1,2,\ldots,$$

$$y_\nu(t)=x_\nu(t), \quad \text{si} \quad |x_\nu(t)|\leqslant\nu, \qquad y_\nu(t)=0 \quad \text{ailleurs};$$

$$\lambda_\nu=\int_0^1 y_\nu(t)dt, \qquad z_\nu(t)=y_\nu(t)-\lambda_\nu.$$

On vérifie aisément que les fonctions $y_\nu(t)$ sont indépendantes, Les $z_\nu(t)$ sont donc des fonctions indépendantes à valeurs moyennes nulles. Nous allons établir la convergence presque partout de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu(t)/\nu. \tag{4.4}$$

Observons à ce but que $0\leqslant\int_0^1 z_\nu^2\,dt=\int_0^1 y_\nu^2\,dt-\lambda_\nu^2\leqslant\int_0^1 y_\nu^2\,dt$ et que

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\int_0^1 y_\nu^2\,dt &\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu-1}(i+1)^2 e_i^\nu+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\bar{e}_i^\nu \\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^p}\sum_{i=1}^{\nu-1}(i+1)^p e_i^\nu+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^p}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^p}\bar{e}_i^\nu \\ &\leqslant 2^p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^p}\sum_{i=1}^{\nu-1} i^p e_i^\nu+2^p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^p}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^p}\bar{e}_i^\nu\leqslant 2^p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{M_\nu^{(p)}}{\nu^p}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

L'application du lemme β nous donne ainsi la convergence presque partout de la série (4.4). Nous allons prouver maintenant que $\sum|\lambda_\nu|/\nu<\infty$, ce qui entraînera la convergence presque partout de $\sum y_\nu(t)/\nu$.

[1]) Khintchine et Kolmogoroff [1].

Comme $\int_0^1 y_\nu(t)\,dt = \int_{|x_\nu|\leqslant\nu} x_\nu(t)\,dt = -\int_{|x_\nu|>\nu} x_\nu\,dt$, nous avons

$$(4.6)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\lambda_\nu|}{\nu}\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\int_{|x_\nu|>\nu}|x_\nu|\,dt\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{j=\nu}^{\infty}(j+1)e_j^\nu$$

$$\leqslant 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{j=\nu}^{\infty}j\,e_j^\nu\leqslant 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^p}\sum_{j=\nu}^{\infty}j^p\,e_j^\nu\leqslant 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{M_\nu^{(p)}}{\nu^p}.$$

La convergence presque partout de $\sum y_\nu(t)/\nu$ entraîne celle de $\sum x_\nu(t)/\nu$, pourvu que la série à termes $\mu_n = |\underset{t}{E}\{x_\nu(t)\neq y_\nu(t)\}|$ soit finie. Or, $\mu_\nu\leqslant\sum_{j=\nu}^{\infty}e_j^\nu\leqslant\frac{1}{\nu}\sum_{j=\nu}^{\infty}(j+1)e_j^\nu$ et, d'après (4.6), $\sum\mu_\nu$ est finie. Ceci achève la démonstration de la première partie du th. 5.

La seconde partie se démontre exactement comme dans le cas de $p=2$ [1]). Soit $M_1^{(p)}, M_2^{(p)}, \ldots$ une suite de nombres tels que $\sum M_\nu^{(p)}\nu^{-p}=\infty$. Soit $x_1(t), x_2(t), \ldots$ une suite de fonctions indépendantes satisfaisant aux conditions:

Si $M_\nu^{(p)}/\nu^p\leqslant 1$, la fonction $x_\nu(t)$ admet trois valeurs, à savoir ν, $-\nu$ et 0 respectivement dans des ensembles de mesure $M_\nu^{(p)}/2\nu^p$, $M_\nu^{(p)}/2\nu^p$ et $1-M_\nu^{(p)}/\nu^p$.

Si $M_\nu^{(p)}/\nu^p>1$, la fonction $x_\nu(t)$ admet chacune des valeurs $\pm(M_\nu^{(p)})^{1/p}$ dans des ensembles de mesure 1/2.

Remarquons que dans ce dernier cas on a $(M_\nu^p)^{1/p}>\nu$.

Or, dans les deux cas la valeur moyenne de x_ν est égale à 0 et l'intégrale de $|x_\nu(t)|^p$ est égale à $M_\nu^{(p)}$. Soit E_ν l'ensemble des points où $|x_\nu(t)|\geqslant\nu$. Soit $e_\nu=|E_\nu|$. La série $\sum e_\nu$ étant divergente, le produit $\prod_{\nu=n}^{\infty}(1-e_\nu)$ diverge vers 0, quel que soit n. Les fonctions $x_\nu(t)$ étant indépendantes, il en résulte que $\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,x_\nu(t)/\nu\geqslant 1$ pour presque tout t. Par conséquent, la série (4.4) diverge presque partout, c. q. f. d.

Nous avons considéré dans le th. 5 les séries de la forme $\sum x_\nu(t)/\nu$, cette forme étant la plus commode pour les applications à la loi des grands nombres. Il est cependant évident que le th. 5 peut être formulé aussi pour les séries $\sum x_\nu(t)$, ce qui donne le résultat suivant (cf. lemme β):

[1]) Kolmogoroff [2].

Théorème 5'. *Si les fonctions indépendantes x_ν satisfont aux conditions (4.3) et si $\sum M_\nu^{(p)}<\infty$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$, la série $\sum x_\nu(t)$ converge presque partout.*

Nous allons considérer maintenant des cas spéciaux où toutes les fonctions $x_\nu(t)$ ont la même fonction distribuante $\varphi(y)$.

Théorème 6. *Soient $x_1(t), x_2(t), \ldots$ des fonctions indépendantes à valeurs moyennes nulles et ayant la même fonction distribuante; désignons par $x(t)$ l'une quelconque des fonctions $x_\nu(t)$. Alors:*

(a) *la série (4.1) converge presque partout, pourvu que l'on ait $\int_0^1|x|\log^+|x|\,dt<\infty$;*

(b) *si la distribution des valeurs de $x(t)$ est symétrique, c. à d. que $|\underset{t}{E}\{x(t)\geqslant y\}|=|\underset{t}{E}\{x(t)\leqslant -y\}|$ pour tout $y>0$, et si, de plus, $\int_0^1|x(t)|\,dt<\infty$, la série (4.1) converge presque partout;*

(c) *si $\int_0^1|x(t)|\,dt<\infty$, on a (4.2) pour presque tout t.* [1])

Conservons les notations précédentes, en supprimant l'indice ν dans les symboles e_i^ν. Pour démontrer la convergence de la série $\sum\nu^{-2}\int_0^1 z_\nu^2\,dt$, ce qui nous donnera la convergence presque partout de la série (4.4), observons que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\int_0^1 y_\nu^2\,dt\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\sum_{i=0}^{\nu-1}(i+1)^2e_i\leqslant$$

$$\leqslant e_0\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}+\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)^2e_i\sum_{\nu=i+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}<2e_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i+1)^2}{i}e_i<2+4\int_0^1|x(t)|\,dt.$$

Pour démontrer l'inégalité $\sum|\lambda_\nu|/\nu<\infty$, remarquons que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\lambda_\nu|}{\nu}\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{j=\nu}^{\infty}(j+1)e_j=\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)e_j\sum_{\nu=1}^{j}\frac{1}{\nu}\leqslant\text{Const.}\sum_{j=1}^{\infty}e_j(j+1)\log(j+1)$$

[1]) La partie (c) du théorème 6 n'est pas nouvelle. Elle se trouve énoncée, sans démonstration, chez Kolmogoroff [3], p. 59, et démontrée dans le livre récent de Fréchet [1], p. 257. (Remarque ajoutée pendant la correction des épreuves).

et que la convergence de la dernière série équivaut à l'intégrabilité de la fonction $|x(t)|\log^+|x(t)|$. Enfin, dans notre cas,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=\nu}^{\infty} e_j = \sum_{j=1}^{\infty} e_j j \leqslant \int_0^1 |x(t)|\,dt < \infty.$$

La partie (a) du théorème est ainsi démontrée.

Dans cette démonstration, nous n'avons fait l'usage de l'intégrabilité de $|x|\log^+|x|$ que pour établir la convergence de la série $\sum \lambda_\nu/\nu$. Si la distribution des valeurs de $x(t)$ est symétrique, on a $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=0$ et la dernière série converge. Ceci prouve la partie (b).

Enfin, remarquons que sous les hypothèses de la partie (c), la série (4.4) est sûrement presque partout convergente. En particulier $\frac{1}{n}\sum_1^n (y_\nu-\lambda_\nu)\to 0$ presque partout. Mais comme $\lambda_\nu\to 0$, on obtient $\frac{1}{n}\sum_1^n y_\nu\to 0$ presque partout. Comme la série à termes $|\mathop{\mathrm{E}}_t\{x_\nu\neq y_\nu\}|$ converge, nous obtenons (4.2) pour presque tout t, ce qui achève la démonstration du théorème.

On peut aussi se demander à quel degré l'intégrabilité de la fonction $|x|\log^+|x|$ est indispensable pour que la série (4.1) converge presque partout. Supposons que $|x(t)|$ soit intégrable. Alors, si la série $\sum x_\nu(t)/\nu$ converge presque partout, il en est de même de la série $\sum y_\nu(t)/\nu$. D'autre part, l'inégalité $\int_0^1 |x|\,dt<\infty$ implique que la série $\sum z_\nu(t)/\nu=\sum[y_\nu(t)-\lambda_\nu]/\nu$ converge presque partout. En comparant ces deux résultats, on voit que, sous la condition $\int_0^1 |x|\,dt<\infty$, la convergence presque partout de (4.1) implique la convergence de la série $\sum \lambda_\nu/\nu$.

Soit $f(t)$ une fonction positive et intégrable sur $(0,1)$. Admettons, pour fixer les idées, que la valeur de l'intégrale de f est égale à 1 et que toutes les fonctions $x_\nu(t)$ ont la même fonction distribuante que la fonction $f(t)-1$. Il n'est pas difficile de voir que la convergence de la série $\sum \lambda_\nu/\nu$ équivaut à celle de la série $\sum_2^\infty e_i\, i\log i$, donc à l'intégrabilité de $|f|\log^+|f|$. Il en résulte que le th. 6 (b) ne peut pas être amélioré.

§ 5. ***Théorème 7.*** *Soit $1\leqslant p\leqslant 2$ et supposons que les fonctions indépendantes x_ν satisfassent à (4.3). Posons*

$$X^*(t)=\operatorname*{Max}_n\left|\sum_1^n \frac{x_\nu(t)}{\nu}\right|.$$

Alors si $\sum M_\nu^{(p)}/\nu^p<\infty$, on a $X^*\in L^p$ et, en outre,

$$\int_0^1 X^{*p}\,dt \leqslant C\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{M_\nu^{(p)}}{\nu^p}, \tag{5.1}$$

où C est une constante absolue. En particulier

$$\int_0^1\left(\operatorname*{Max}_n \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n x_\nu(t)\right)^p dt \leqslant 2^p C\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{M_\nu^{(p)}}{\nu^p}.\ ^{1)} \tag{5.2}$$

Si les sommes partielles d'une série $u_1+u_2+\ldots$ ne dépassent pas M en valeur absolue, on montre, en appliquant p. ex. la transformation d'Abel, que les expressions $u_1+2u_2+\ldots+nu_n$ ne dépassent pas $2M$. Par conséquent, l'inégalité (5.2) résulte de (5.1).

Posons $x_\nu(t)=y_\nu(t)+w_\nu(t)$, où $y_\nu(t)=x_\nu(t)$, si $|x_\nu(t)|\leqslant\nu$, et $y_\nu(t)=0$ ailleurs. Par conséquent, $w_\nu(t)=0$, si $|x_\nu(t)|\leqslant\nu$, et $w_\nu(t)=x_\nu(t)$ ailleurs. Les fonctions $y_\nu(t)$ sont indépendantes et il en est de même des fonctions $w_\nu(t)$. Soient $Y^*(t)$ et $W^*(t)$ les fonctions analogues à $X^*(t)$, formées respectivement pour les suites $\{y_\nu\}$ et $\{w_\nu\}$. Alors $X^*(t)\leqslant Y^*(t)+W^*(t)$, et il suffit de démontrer (5.1) avec X^* remplacé par Y^* et par W^*. Les y_ν définis tout à l'heure sont identiques aux fonctions y_ν employées dans la démonstration du th. 5. Désignons la somme de la série $\sum M_\nu^{(p)}/\nu^p$ par ω, en assignant à λ_ν et z_ν la même signification qu'au § 4. Alors $y_\nu=z_\nu+\lambda_\nu$ et

$$\int_0^1 Y^{*p}\,dt \leqslant 2^{p-1}\int_0^1\left(\operatorname*{Max}_n\left|\sum_1^n\frac{z_\nu(t)}{\nu}\right|\right)^p dt+2^{p-1}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\lambda_\nu|}{\nu}\right)^p$$

$$\leqslant 2^{p-1}\left[\int_0^1\left(\operatorname*{Max}_n\left|\sum_1^n\frac{z_\nu(t)}{\nu}\right|\right)^2 dt\right]^{p/2}+2^{p-1}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\lambda_\nu|}{\nu}\right)^p.$$

Appliquons à la dernière intégrale le th. 1 et les inégalités (4.5); appliquons (4.6) à la dernière somme. Nous obtiendrons

[1]) Les th. 5 et 7 subsistent pour $0<p<1$ (cf. p. ex. les démonstrations des th. 9 et 10).

$$(5.3)\qquad \int_0^1 Y^{*p}\,dt \leqslant 2^{p-1}\left(8\int_0^1\left(\sum\frac{z_\nu}{\nu}\right)^2 dt\right)^{p/2}+2^{2p-1}\omega^p$$
$$=2^{p-1}\left(8\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\int_0^1 z_\nu^2\,dt\right)^{p/2}+2^{2p-1}\omega^p\leqslant 64(\omega^{p/2}+\omega^p).$$

D'autre part, si $p=1+\delta$, où $0\leqslant\delta\leqslant 1$, on a

$$(5.4)\qquad \int_0^1 W^{*p}\,dt\leqslant\int_0^1\sum_1^\infty\left(\frac{|w_\nu|}{\nu}\right)^p dt=\int_0^1\left(\sum_{\nu=1}^\infty\frac{|w_\nu|}{\nu}\right)\left(\sum_{\nu=1}^\infty\frac{|w_\nu|}{\nu}\right)^\delta dt$$
$$\leqslant\int_0^1\left(\sum_{\nu=1}^\infty\frac{|w_\nu|}{\nu}\right)\left(\sum_{\nu=1}^\infty\left|\frac{w_\nu}{\nu}\right|^\delta\right)dt.$$

Les fonctions $|w_\nu|$ et $|w_\mu|^\delta$ sont indépendantes pour $\mu\neq\nu$. La dernière intégrale ne dépasse donc pas

$$\int_0^1\left(\sum_{\nu=1}^\infty\left|\frac{w_\nu}{\nu}\right|^p\right)dt+\int_0^1\left(\sum_{\nu=1}^\infty\frac{|w_\nu|}{\nu}\right)dt\cdot\int_0^1\left(\sum_{\nu=1}^\infty\left|\frac{w_\nu}{\nu}\right|^\delta\right)dt=P+QR.$$

Les valeurs non nulles de la fonction $|w_\nu|$ dépassent ν. On en déduit que

$$P=\sum\nu^{-p}\int_0^1|w_\nu|^p\,dt\leqslant\sum\nu^{-p}\int_0^1|x_\nu|^p\,dt=\omega,$$
$$Q=\sum\nu^{-1}\int_0^1|w_\nu|\,dt\leqslant\sum\nu^{-p}\int_0^1|w_\nu|^p\,dt=\omega,$$
$$R=\sum\nu^{-\delta}\int_0^1|w_\nu|^\delta\,dt\leqslant\sum\nu^{-p}\int_0^1|w_\nu|^p\,dt=\omega.$$

En combinant les résultats obtenus, il vient

$$\int_0^1 X^{*p}\,dt\leqslant 2^{p-1}\int_0^1 Y^{*p}\,dt+2^{p-1}\int_0^1 W^{*p}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 128(\omega^{p/2}+\omega^p)+2(\omega^2+\omega)\leqslant A\omega^2+A,$$

où A est une constante absolue. En appliquant cette inégalité aux fonctions μx_ν au lieu de x_ν, où $\mu>0$ est un facteur numérique quelconque, nous obtenons $\int_0^1 X^{*p}\,dt\leqslant A\omega^2\mu^p+A\mu^{-p}$. En posant $\mu^p=\omega^{-1}$, la dernière inégalité se transforme en (5.1) avec $C=2A$ et le th. 7 est ainsi démontré.

Ce théorème peut aussi être enoncé sous la forme analogue au théorème 5'.

Dans le cas où toutes les fonctions x_ν ont la même fonction distribuante, on a le suivant

Théorème 8. *Dans les hypothèses du théorème* 5(a), *on a*

$$\int_0^1 X^*\,dt\leqslant A\int_0^1|x|\log^+|x|\,dt+A.$$

La démonstration consiste à combiner celles des th. 5(a) et 7.

§ 6. ***Théorème 9.*** *Soit* $x_1(t), x_2(t), \ldots$ *une suite de fonctions indépendantes ayant la même fonction distribuante* $\varphi(y)$ *telle que*

$$(6.1)\qquad \int_{-\omega}^{\omega} y\,d\varphi(y)\to 0\ \textit{pour}\ \omega\to\infty,\qquad \int_0^1|x|^p\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|y|^p\,d\varphi(y)<\infty,$$

où p *satisfait à l'inégalité* $0<2<p$. *Alors pour presque tout* t *et pour tout* $p\neq 1$ *la série*

$$(6.2)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x_n(t)}{\nu^{1/p}}$$

converge et, en particulier,

$$(6.3)\qquad \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu(t)\to 0.$$

Cette dernière relation subsiste pour $p=1$.

Si $p\geqslant 1$, la première des conditions (6.1) équivaut à celle que les valeurs moyennes des $x_\nu(t)$ soient nulles. Pour $p=1$, le théorème se réduit au th. 5(c). Pour $p\geqslant 2$ il est en défaut en vertu du théorème de Laplace-Liapounoff.

Nous pouvons nous restreindre à établir la convergence de la série (6.2), car la relation (6.3) en est une conséquence immédiate. Posons:

$$y_\nu(t)=x_\nu(t),\quad \text{si}\quad |x_\nu(t)|\leqslant\nu^{1/p},\qquad y_\nu(t)=0\quad\text{ailleurs}$$
$$x_\nu(t)=y_\nu(t)+w_\nu(t),\qquad z_\nu(t)=y_\nu(t)-\int_0^1 y_\nu(t)\,dt=y_\nu(t)-\lambda_\nu.$$

Nous démontrerons d'abord que la série $\sum \nu^{-1/p} z_\nu(t)$ converge presque partout. Il suffit à ce but de prouver que la somme S de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2/p} \int_0^1 z_\nu^2(t)\,dt$ est finie. En employant la même notation qu'au § 4, nous pouvons écrire

$$S \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2/p} \int_0^1 y_\nu^2\,dt \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2/p} \left(\sum_{i=1}^{[\nu^{1/p}]} (i+1)^2 e_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \bar{e}_i \right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^2 e_i \sum_{\nu \geqslant i^p} \nu^{-2/p} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2/p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} \bar{e}_i;$$

on montre facilement que $S \leqslant C_p \int_0^1 |x|^p\,dt$, où C_p ne dépend que de p (plus précisement, $(2-p)\,C_p$ ne dépasse pas une constante absolue). Supposons maintenant que $1<p<2$. Alors

$$|\lambda_\nu| \leqslant \int_{-\infty}^{-\nu^{1/p}} |y|\,d\varphi(y) + \int_{\nu^{1/p}}^{\infty} y\,d\varphi(y),$$

et, en raisonnant comme dans (4.6), on montre que la somme $\sum |\lambda_\nu| \nu^{-1/p}$ ne dépasse pas $C_p \int_0^1 |x|^p\,dt$. Si $0<p<1$, alors, en observant que $|\lambda_\nu| \leqslant \int_{-\nu^{1/p}}^{\nu^{1/p}} |y|\,d\varphi(y)$, on prouve comme tout à l'heure que

$$\sum |\lambda_\nu| / \nu^{1/p} \leqslant C_p \int_0^1 |x|^p\,dt.$$

La convergence presque partout de la série $\sum z_\nu(t)/\nu^{1/p}$ est ainsi établie.

Soit $\mu_\nu = |\underset{t}{\mathrm{E}}\{w_\nu(t) \neq 0\}|$. On voit aisément que $\sum \mu_\nu \leqslant C \int_0^1 |x|^p\,dt$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème 10. *Si les fonctions indépendantes $x_1, x_2, \ldots$ ont la même fonction de répartition et satisfont à (6.3) pour presque tout t, avec $0<p<2$, alors ces fonctions appartiennent à L^p* [1].

[1]) Pour le cas $p=1$ cf. Kolmogoroff [3].

En effet, on déduit de (6.3) que pour presque tout t et pour $\nu \geqslant \nu_0(t)$ on a $|x_\nu(t)| \leqslant \nu^{1/p}$. Les fonctions x_ν étant indépendantes, on en conclut que la série à termes $\mu_\nu = |\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x_\nu(t)| > \nu^{1/p}\}|$ converge, ce qui revient à dire que la série $\sum_\nu |\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x(t)| > \nu^{1/p}\}|$ converge. Ce dernier fait équivaut à l'intégrabilité de la fonction $|x(t)|^p$, c. q. f. d.

Le th. 9 peut être étendu au cas de fonctions non nécessairement équimesurables:

Théorème 9'. *Si les fonctions indépendantes $x_1(t), x_2(t), \ldots$ satisfont à la première des relations (6.1) et si on a pour tout $A>0$*

$$|\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x_\nu(t)| \geqslant A\}| \leqslant |\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x(t)| \geqslant A\}|, \tag{6.4}$$

où $x(t)$ est une fonction appartenant à L^p $(0<p<2)$, alors ces fonctions remplissent la relation (6.3) pour presque tout t.

Si $p \neq 1$, la série (6.2) converge presque partout.

La condition (6.4) revient à dire que si $x^*(t), x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots$ sont des fonctions non croissantes et équimesurables respectivement avec $|x(t)|, |x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots$, alors on a $x^*(t) \geqslant x_\nu^*(t)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots$

Supposons d'abord que les fonctions distribuantes de toutes les fonctions $x_\nu(t)$ soient continues et désignons par u_ν le plus petit nombre satisfaisant à l'égalité

$$|\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x_\nu| \geqslant u_\nu\}| = |\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x| \geqslant \nu^{1/p}\}|.$$

Posons $y_\nu(t) = x_\nu(t)$, si $|x_\nu(t)| \leqslant u_\nu$, et $y_\nu(t) = 0$ ailleurs.

Soit $\lambda_\nu = \int_0^1 y_\nu\,dt$ $\quad z_\nu = y_\nu - \lambda_\nu$. On voit facilement que

$$\int_0^1 z_\nu^2\,dt \leqslant \int_0^1 y_\nu^2\,dt \leqslant \int_{|x| \leqslant \nu^{1/p}} x^2\,dt.$$

Par conséquent, $\sum \nu^{-2/p} \int_0^1 z_\nu^2\,dt \leqslant \sum \nu^{-2/p} \int_{|x| \leqslant \nu^{1/p}} x^2\,dt$, ce qui prouve que la série $\sum z_\nu(t)/\nu^{1/p}$ converge presque partout. De plus, des inégalités

$$|\lambda_\nu| = \left| \int_0^1 y_\nu\,dt \right| = \left| \int_{|x_\nu| \leqslant u_\nu} x_\nu\,dt \right| = \left| \int_{|x_\nu| > u_\nu} x_\nu\,dt \right| \leqslant \int_{|x| \geqslant \nu^{1/p}} |x|\,dt \qquad (1<p<2),$$

$$|\lambda_\nu| \leqslant \left| \int_{|x_\nu| \leqslant u_\nu} x_\nu\,dt \right| \leqslant \int_{|x| \leqslant \nu^{1/p}} |x|\,dt \qquad (0<p<1),$$

on déduit que la série $\sum|\lambda_\nu|/\nu^{1/p}$ converge pour $0<p<1$ et $1<p<2$. Nous avons donc démontré la convergence presque partout de la série $\sum y_\nu/\nu^{1/p}=\sum(z_\nu+\lambda_\nu)/\nu^{1/p}$. Il suffit maintenant d'utiliser le fait que la série à termes

$$\mu_\nu=|\underset{t}{\mathrm{E}}\{x_\nu\mp y_\nu\}|=|\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x_\nu|>u_\nu\}|=|\underset{t}{\mathrm{E}}\{|x|>\nu^{1/p}\}|$$

converge. La seconde partie du théorème est ainsi établie, dans l'hypothèse que les fonctions distribuantes des x_ν soient continues. Pour démontrer la première partie, il suffit de se borner au cas $p=1$. On vérifie alors que la série $\sum z_\nu/\nu$ converge presque partout, donc que $\frac{1}{n}\sum_1^n z_\nu(t)\to 0$ presque partout. Comme $\lambda_\nu\to 0$, on voit que $\frac{1}{n}\sum_1^n y_\nu(t)\to 0$ presque partout. De plus, $\sum\mu_\nu<\infty$.

Pour nous débarasser de l'hypothèse superflue concernant la continuité des fonctions de distribution, nous pouvons appliquer l'artifice bien connu suivant. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions indépendantes dont l'une au moins admet la fonction distribuante continue, la distribution des valeurs de la somme $x(t)+y(t)$ est aussi continue. Cela résulte de la formule (1.6). Soit maintenant $x(t)$ une fonction bornée, à valeur moyenne nulle et à distribuante continue. Soit $x_1'(t), x_1''(t), x_2'(t), x_2''(t), \ldots$ une suite de fonctions indépendantes, équimesurables respectivement avec $x_1(t), x(t), x_2(t), x(t), \ldots$. Les sommes $x_i'+x_i''$ sont donc indépendantes et leur fonctions distribuantes sont continues. Supposons que $0<p<2$ et $p\neq 1$. D'après le cas déjà envisagé, la série $\sum(x_i'+x_i'')/\nu^{1/p}$ converge presque partout. D'après le th. 9, la série $\sum x_i''/\nu^{1/p}$ converge presque partout. Il en est donc de même de la série $\sum x_i'/\nu^{1/p}$. Par conséquent la série $\sum x_i/\nu^{1/p}$ converge presque partout [1]).

La démonstration de la relation (6.3) dans le cas général est analogue.

Ajoutons encore, sans démonstration, que dans les hypothèses du th. 9, si $0<p<2$ et $p\neq 1$, l'expression $X^*=\operatorname{Max}_n\left|\sum_1^n\frac{x_\nu(t)}{\nu}\right|$ appartient à $L^{p-\varepsilon}$, quel que soit $\varepsilon>0$. Si $|x_n|^p\log^+|x_n|\in L$, alors $X^*\in L^p$. Si, enfin, $x_n\in L$, alors $\operatorname{Max}_n\frac{1}{n}\sum_1^n x_\nu(t)\in L^{1-\varepsilon}$.

[1]) Cf. p. 64.

§ 7. Nous allons déduire maintenant un résultat sur la loi ordinaire des grands nombres, qui a été obtenu par M. Plessner par la méthode des fonctions caractéristiques [1]).

Théorème 11. *Soit $x_1(t), x_2(t), \ldots$ une suite de fonctions indépendantes à valeurs moyennes nulles. Soit:*

$$\varrho_\nu(u)=\int_{|x_\nu|>u}|x_\nu(t)|\,dt,\qquad P_n(u)=\varrho_1(u)+\varrho_2(u)+\ldots+\varrho_n(u).$$

Si

$$\frac{1}{n^2}\int_0^n P_n(t)\,dt\to 0, \tag{7.1}$$

la suite $\frac{1}{n}\{x_1(t)+x_2(t)+\ldots+x_n(t)\}$ converge en mesure vers 0 sur $(0,1)$.

Posons:

$$y_{\nu,n}(t)=x_\nu(t),\quad \text{si}\quad |x_\nu(t)|\leqslant n,\qquad y_{\nu,n}(t)=0\quad \text{ailleurs};$$

$$\lambda_{\nu,n}=\int_0^1 y_{\nu,n}\,dt,\qquad z_{\nu,n}=y_{\nu,n}-\lambda_{\nu,n}.$$

Alors $\int_0^1\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n z_{\nu,n}\right)^2dt=\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^n\int_0^1 z_{\nu,n}^2\,dt\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^n\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2e_i^\nu$, où $e_i^\nu=|\underset{t}{\mathrm{E}}\{i<|x_\nu|\leqslant i+1\}|$. Si la dernière somme tend vers 0 avec $1/n$, la suite $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n z_{\nu,n}$ tend en mesure vers 0. D'autre part,

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^n\lambda_{\nu,n}\right|=\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^n\int_{|x_\nu|>n}x_\nu\,dt\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n\int_{|x_\nu|>n}|x_\nu|\,dt\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n\sum_{i=n}^\infty(i+1)\,e_i^\nu. \tag{7.2}$$

Si cette dernière somme tend aussi vers 0, la suite $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n y_{\nu,n}$ tend en mesure vers 0 en vertu de l'égalité $y_{\nu,n}=z_{\nu,n}+\lambda_{\nu,n}$. La

[1]) Plessner [1]; voir aussi Khintchine [1]. M. Plessner remplace la condition (7.1) par la suivante: $n^{-2}\int_0^{nu}P_n(t)\,dt\to 0$ pour tout $u>0$; cf. aussi le travail récent de Kolmogoroff [4]. (Remarque ajoutée pendant la correction des épreuves).

mesure de l'ensemble des points où $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} y_{\nu,n} + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$ ne dépasse pas $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=n}^{\infty} e_i^\nu \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=n}^{\infty}(i+1)e_i^\nu$. Il est ainsi démontré que si

$$(7.3)\qquad A_n = \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2 e_i^\nu \to 0, \qquad B_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\nu=n}^{\infty}(i+1)e_i^\nu \to 0,$$

la suite $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_\nu$ tend en mesure vers 0; il suffit maintenant de montrer que ces deux conditions sont équivalentes à (7.1). A cet effet, désignons par $\psi_\nu(y)$ la fonction distribuante de $|x_\nu(t)|$. Alors

$$\frac{1}{n^2}\int_0^n P_n(u)\,du = \frac{1}{n^2}\int_0^n \Big(\sum_{\nu=1}^{n}\int_u^\infty y\,d\psi_\nu(y)\Big)du$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^n du\Big(\int_u^n y\,d\psi_\nu(y)\Big) + \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^n du\Big(\int_n^\infty y\,d\psi_\nu(y)\Big)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^n y^2\,d\psi_\nu(y) + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\int_n^\infty y\,d\psi_\nu(y) = A_n' + B_n'.$$

Les expressions A_n' et B_n' étant non-négatives, la relation (7.1) équivaut à $A_n' \to 0$, $B_n' \to 0$. On voit aisément que ces deux conditions sont, à leur tour, équivalentes à $A_n \to 0$, $B_n \to 0$ (en se basant sur le fait que les fonctions $\psi_\nu(y)$ sont continues à droite). Le théorème est ainsi établi.

Théorème 12. *Soit $x_1(t), x_2(t), \ldots$ une suite de fonctions indépendantes satisfaisant pour $\nu = 1, 2, \ldots$ aux conditions:*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\omega}^{\omega} y\,d\varphi_\nu(y) = 0, \qquad \int_0^1 |x_\nu|^p\,dt = M_\nu^{(p)}, \qquad \frac{1}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{(p)} \to 0,$$

où $0 < p \leqslant 2$ et φ_ν est la fonction distribuante de x_ν. Alors la suite $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_\nu(t)$ tend en mesure vers 0.

Ce théorème est bien connu pour $p = 2$.

Supposons d'abord que $1 \leqslant p \leqslant 2$. Pour les expressions A_n et B_n (cf. (7.3)), nous obtenons les inégalités:

$$A_n = o(1) + \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)^2 e_i^\nu \leqslant o(1) + \frac{1}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)^p e_i^\nu \leqslant o(1) + \frac{2^p}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{(p)} = o(1),$$

$$B_n \leqslant \frac{1}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\nu=n}^{\infty}(i+1)^p e_i^\nu \leqslant \frac{2^p}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{(p)} = o(1).$$

La démonstration pour $0 < p < 1$ est analogue; seulement, au lieu de (7.2), on appliquera les inégalités

$$\frac{1}{n}\Big|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_{\nu,n}\Big| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x_\nu|\leqslant n}|x_\nu|\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)e_i^\nu \leqslant \frac{1}{n^p}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^p e_i^\nu = o(1).$$

Ajoutons encore qu'en utilisant les fonctions $\varrho_\nu(u)$, on peut énoncer dans une forme un peu plus générale certains résultats demontrés plus haut. P. ex., au lieu du th. 5', on a ce

Théorème 5''. *Si les fonctions indépendantes x_ν satisfont à la première des conditions (4.3), la série $\sum x_\nu(t)$ converge presque partout, pourvu que $\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^1 \varrho_\nu(u)\,du < \infty$.*

§ 8. ***Théorème 13.*** *Soit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ une suite finie de fonctions indépendantes appartenant à L^p $(p>1)$* [1] *et à valeurs moyennes nulles. Alors*

$$(8.1)\qquad A_p\int_0^1\Big(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2\Big)^{p/2}dt \leqslant \int_0^1\Big|\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu(t)\Big|^p dt \leqslant B_p\int_0^1\Big(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2\Big)^{p/2}dt,$$

où les constantes positives A_p et B_p ne dépendent que de p.

Commençons par la cas le plus simple, à savoir où toutes les fonctions x_ν sont constantes par intervalles. Soit $w_1^\nu, w_2^\nu, \ldots$ la suite des valeurs que prend la fonction x_ν dans les intervalles de longueur $\delta_1^\nu, \delta_2^\nu, \ldots$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ respectivement. Admettons aussi que tous les nombres δ_μ^ν sont des multiples de 2^{-m} où m est un entier positif. En utilisant la construction de fonctions indépendantes constantes par intervalles (cf. § 1), nous pouvons remplacer la suite de fonctions $x_1, x_3, \ldots, x_n$ par une autre suite $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n$ de fonctions indépendantes. Nous pouvons notamment supposer que $\bar{x}_2$

[1]) Pour $p=1$ cf. le renvoi au th. 1, p. 66.

est semblable à x_2 dans tous les intervalles $k2^{-m}<t<(k+1)2^{-m}$ où $k=1,2,\ldots,2^m-1$. La fonction $\bar{x}_2$ étant donc constante dans les intervalles de la forme $k2^{-2m}<t<(k+1)2^{-2m}$, nous pouvons définir $\bar{x}_3$ comme semblable à x_3 dans ces intervalles, et ainsi de suite. Pour simplifier, nous allons désigner par $x_2, x_3, \ldots, x_n$ les fonctions $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n$.

Soit maintenant $\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots$ la suite des fonctions de Walsh [1]). Ces fonctions forment un système orthogonal et normal dans l'intervalle $(0,1)$ et peuvent aussi être définies de la manière suivante [2]). On pose $\omega_0(t)=1$ et, si $k=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots$ où $k_1>k_2>\ldots$ est un entier positif, on définit $\omega_k(t)$ par la formule $\omega_k(t)=r_{k_1}(t)\,r_{k_2}(t)\ldots$, où $r_0(t), r_1(t), \ldots$ est la suite des fonctions de Rademacher (de sorte que r_k coïncide avec la fonction g_{k+1} de (1.4)).

Considérons les développement $\sum_l a_l^\nu \omega_l(t)$ des fonctions $x_\nu(t)$ suivant les $\omega_l(t)$. La fonction $x_1(t)$ étant constante dans tous les intervalles $(k2^{-m}, (k+1)2^{-m})$, on voit facilement que $a_k^1=0$ pour $k\geqslant 2^m$. Les intervalles de constance de $x_2(t)$ sont de la forme $(k2^{-2m}, k'2^{-2m})$ et de longueur comprise entre 2^{-2m} et 2^{-m}. Par conséquent, en tenant compte du fait que la valeur moyenne de $x_2(t)$ est égale à 0, il vient $a_k^2=0$ pour $k\geqslant 2^{2m}$ et pour $k<2^m$. Pareillement, on a $a_k^3=0$ pour $k\geqslant 2^{3m}$ et pour $k<2^{2m}$, et ainsi de suite. On voit donc que les développements des fonctions x_ν n'ont pas de termes communs et l'on obtient le développement $\sum a_l\omega_l$ de la fonction $X=x_1+x_2+\ldots+x_n$, en écrivant formellement ceux des fonctions x_ν, l'un après l'autre. Nous nous appuyerons maintenant sur la proposition suivante:

Lemme γ. *Soit* $f(t)\sim\sum_0^\infty a_l w_l(t)$, $f\in L^p$. *Soient:* s_n *la n-ième somme partielle de la série* $\sum a_l\omega_l$, $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ *une suite d'entiers positifs tels que* $\lambda_{i+1}/\lambda_i\geqslant 2$ *et* $\delta_i=s_{\lambda_i}-s_{\lambda_{i-1}}$ $(\lambda_0=0)$. *Alors*

$$A_p\int_0^1\Big(\sum_i\delta_i^2\Big)^{p/2}dt\leqslant\int_0^1|f|^p\,dt\leqslant B_p\int_0^1\Big(\sum_i\delta_i^2\Big)^{p/2}dt \qquad (p>1), \tag{8.2}$$

où A_p *et* B_p *ne dépendent que de* p [3]).

[1]) Walsh [1].

[2]) Paley [1].

[3]) Paley [1], p. 259. Le lemme γ est un cas assez spécial du th. VIII du travail de M. Paley.

En posant $f=X$, $\lambda_l=2^{lm}-1$ et $x_l=\delta_l$, nous déduisons (8.1) de (8.2).

Maintenant, il est facile de compléter la démonstration du th.13. Supposons d'abord que les fonctions x_ν n'admettent qu'un nombre fini de valeurs mais sont d'ailleurs tout-à-fait arbitraires. Nous pouvons alors remplacer les x_ν par des fonctions indépendantes y_ν, constantes par intervalles et respectivement équimesurables avec x_ν. Soient $w_1^\nu, w_2^\nu, \ldots$ les valeurs que prend la fonction y_ν respectivement dans des ensembles $E_1^\nu, E_2^\nu, \ldots$ de longueur $\delta_1^\nu, \delta_2^\nu, \ldots$ Désignons par $\bar{\delta}_1^\nu, \bar{\delta}_2^\nu, \ldots$ des multiples positifs de 2^{-m} et dont la somme est égale à 1. Si l'entier m est suffisamment grand, les valeurs absolues de toutes les différences $\bar{\delta}_i^\nu-\delta_i^\nu$ peuvent être aussi petites que l'on veut.

Désignons par $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ les fonctions indépendantes, constantes par intervalles et telles que $\bar{y}_\nu$ admette la valeur w_i^ν dans un ensemble $\bar{E}_i^\nu$ de mesure $\bar{\delta}_i^\nu$ $(\nu=1,2,\ldots n;\ i=1,2,\ldots)$. Observons que l'ensemble des points où l'on a $y_1(t)=w_{i_1}^1$, $y_2(t)=w_{i_2}^2, \ldots, y_n(t)=w_{i_n}^n$ est de mesure $|E_{i_1}^1|\cdot|E_{i_2}^2|\cdot\ldots\cdot|E_{i_n}^n|$. Pareillement, l'ensemble des points où $\bar{y}_1(t)=\bar{w}_{i_1}^1$, $\bar{y}_2(t)=\bar{w}_{i_2}^2$, $\ldots$, $\bar{y}_n(t)=\bar{w}_{i_n}^n$ est de mesure $|\bar{E}_{i_1}^1|\cdot|\bar{E}_{i_2}^2|\cdot\ldots\cdot|\bar{E}_{i_n}^n|$. Si m est suffisamment grand, on a les inégalités approximatives $|E_{i_1}^1|\cdot|E_{i_2}^2|\cdot\ldots\cdot|E_{i_n}^n|=|\bar{E}_{i_1}^1|\cdot|\bar{E}_{i_2}^2|\cdot\ldots\cdot|\bar{E}_{i_n}^n|$ avec des erreurs aussi petites que l'on veut. L'égalité (8.1), comme vraie pour les fonctions $\bar{y}_\nu$, subsiste pour les y_ν, donc aussi pour les x_ν.

Si x_ν sont des fonctions arbitraires appartenant à L^p, elles peuvent être approchées par des fonctions x'_ν n'admettant qu'un nombre fini de valeurs et telles que les intégrales $\int_0^1|x_\nu-x'_\nu|^p\,dt$ soient très petites. Cela prouve que la relation (8.1) reste vraie dans le cas général.

Travaux cités.

M. Fréchet, [1], *Généralités sur les probabilités. Variables aléatoires*, Paris 1935.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood, [1] *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Mathematica, 54 (1930), 81—116.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, [1] *Inequalities*, Cambridge 1934.

M. Kac, [1] *Sur les fonctions indépendantes* (I), Studia Math. 6 (1936), 46—58, 59—66, 89—97.

M. Kac et H. Steinhaus, [1] *Sur les fonctions indépendantes*, (II—III), Studia Math. 6 (1936).

A. Khintchine, [1] *Sur la loi des grands nombres*, C. R. 188 (1929), 477—480.

J. Khintchine und A. Kolmogoroff, [1] *Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden*, Récueil de la Soc. Math. de Moscou, 32 (1925), 668—677.

A. Kolmogoroff, [1] *Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen*, Math. Annalen 99 (1928), 309—319.

— [2] *Sur la loi forte des grands nombres*, C. R. 191 (1930), 910—911.

— [3] *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933.

— [4] *Zur Plessnerschen Bedingung*, Recueil Math. 1 (1936), 847—848.

R. E. A. C. Paley, [1] *A remarkable system of orthogonal functions*, Proc. London Math. Soc. 34 (1932), 241—279.

R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, [1] *On some series of functions* (1), Proc. Cambridge Phil. Society, 26 (1930), 337—357; (2), ibid. 26 (1930), 458—474; (3), ibid. 28 (1932), 190—205.

A. Plessner, [1] *Über das Gesetz der Grossen Zahlen*, Récueil Mathématique, 1 (1936).

S. Saks, *Théorie de l'intégrale* (Monografie Matematyczne III) Warszawa, 1933.

H. Steinhaus, [1] *Sur la probabilité de la convergence de séries*, Studia Math. 2 (1930), 21—39.

— [2] *Courbe de Peano et les fonctions indépendantes*, C. R. 202 (1936), 1961—1963.

J. L. Walsh, [1] *A closed set of normal orthogonal functions*, American Journal of Math., 55 (1923), 5—24.

A. Zygmund, [1] *Trigonometrical Series* (Monografie Matematyczne V), Warszawa—Lwów 1935.

— [2] *Sur certaines séries de fonctions* (en polonais), Mathesis Polska, 8 (1933), 76—87.

Wilno, 15. II. 1937.

Sur le rapport de la propriété (C) à la théorie générale des ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Par une application de l'ensemble de M. Lusin (dont l'existence a été démontrée par lui à l'aide de l'hypothèse du continu), j'ai résolu [1]) un problème de M. E. Szpilrajn, en démontrant qu'il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu et qui jouit de la propriété (C) suivante:

(C) *Pour chaque suite infinie de nombres réels positifs* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *donnée d'avance, l'ensemble* N *peut être couvert par une suite infinie d'intervalles* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, *tels que la longueur de l'intervalle* δ_n *est égale à* a_n *pour* $n=1, 2, 3, \ldots$

Les ensembles jouissant de la propriété (C) coïncident avec ceux que M. E. Borel appelle „ensembles qui ont une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance" (Bull. Soc. Math. de France 47, 1919, p. 123) [2]).

---

[1]) Fund. Math. 11 (1928), p. 304.

[2]) La propriété (C) a été traitée en outre dans les travaux suivants:
A. S. Besicovitch, Acta Mathematica 62 (1934), p. 289.
S. Mazurkiewicz et E. Szpilrajn, Fund. Math. 28 (1937), p. 308.
W. Sierpiński, Fund. Math. 11 (1928), p. 302.
— C. R. Soc. Sc. Varsovie 27 (1934), p. 1.
— Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (2) 4 (1935), p. 43.
— C. R. Soc. Sc. Varsovie 28 (1935), p. 134.
— Fund. Math. 24 (1935), p. 48.
— Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935), p. 223.
E. Szpilrajn, Fund. Math. 15 (1930), p. 126.
— C. R. Soc. Sc. Varsovie 22 (1929), p. 179.
— Fund. Math. 22 (1934), p. 303.
— Fund. Math. 24 (1935), p. 17.
Cf. aussi:
C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem. III, Warszawa-Lwów 1933, p. 274.
W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monogr. Matem. IV, Warszawa-Lwów 1934, pp. 37—38, 49 et 68.