un corps dénombrable d'ensembles satisfaisant aux conditions 1⁰ et 2⁰. Or, la famille Φ ne jouit pas de la propriété 3⁰, puisque, comme on voit sans peine, la somme H_0 de tous les intervalles de la famille Δ appartient évidemment à la famille Φ_σ et, quel que soit l'ensemble E de la famille Φ_δ, l'ensemble H_0-E, en tant que contenant une infinité d'intervalles, est indénombrable.

D'autre part, comme l'a remarqué M. A. Tarski, on montre sans peine que *tout corps d'ensembles Φ qui jouit de la propriété* 3⁰ *jouit également de la propriété* 2⁰.

En effet, si $E \epsilon \Phi_\delta$, on a $E=E_1E_2\ldots$ où $E_n \epsilon \Phi$ pour $n=1,2,\ldots$. Φ étant un corps d'ensembles, on a donc $E_1-E_n \epsilon \Phi$ pour $n=1,2,\ldots$. et $E=E_1E_2E_3\ldots=E_1-[(E_1-E_2)+(E_1-E_3)+\ldots]=E_1-S$ où $S \epsilon \Phi_\sigma$. Selon la propriété 3⁰ de la famille Φ, on en conclut que $S=(H-D_1)+D_2$ où $H \epsilon \Phi_\delta$ et où D_1 et D_2 sont au plus dénombrables. On a donc $H=H_1H_2H_3\ldots$ où $H_n \epsilon \Phi$, donc aussi $E_1-H_n \epsilon \Phi$ pour $n=1,2,3,\ldots$, de sorte que

$$E=E_1-S=[(E_1-H)+E_1D_1]-D_2=$$
$$=[(E_1-H_1)+(E_1-H_2)+\ldots+E_1D_1]-D_2=(T+E_1D_1)-D_2$$

où $T \epsilon \Phi_\sigma$, c. q. f. d.

Quelques relations entre la situation des ensembles et la rétraction dans les espaces euclidiens.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

1. Soit A un sous-ensemble d'un espace M. Un ensemble $B\subset M-A$ sera dit *transverse à A dans M*, lorsque A est un rétracte de $M-B$.

Je me propose d'étudier dans ce travail quelques propriétés des ensembles transverses à un ensemble donné dans l'espace euclidien à n dimensions R_n ou — ce qui revient au même — dans la surface sphérique n-dimensionnelle S_n.

2. ***Exemple 1.*** Soit A un ensemble ne contenant que deux points a_1 et a_2 d'un espace M. Pour qu'un ensemble $B\subset M-A$ soit transverse à A dans M, il faut et il suffit que B divise M entre a_1 et a_2 [1]).

En effet, lorsqu'il existe une rétraction $r(x)$ de $M-B$ en A, les ensembles $C_i=r^{-1}(a_i)$ sont disjoints et fermés dans $M-B$ et leur somme est égale à $M-B$. D'autre part, lorsqu'il existe une décomposition de $M-B$ en deux ensembles C_1 et C_2 disjoints et fermés dans $M-B$, tels que $a_i \epsilon C_i$ où $i=1,2$, on obtient une rétraction $r(x)$ de $M-B$ en A, en posant $r(x)=a_i$ pour tout $x \epsilon C_i$.

3. ***Exemple 2.*** Soit A un sous-ensemble de S_n homéomorphe à S_{n-1}. Pour qu'un ensemble $B\subset S_n-A$ soit transverse à A dans S_n, il faut et il suffit que toute composante de S_n-A contienne au moins un point de B.

[1]) c. à d. que $M-B$ se laisse décomposer en deux ensembles C_1 et C_2 disjoints, fermés dans $M-B$ et tels que $a_1 \epsilon C_1$ et $a_2 \epsilon C_2$.

En effet, la nécessité de la condition est une conséquence facile [2]) du „*Fixpunktsatz*" de M. L. E. J. Brouwer. Sa suffisance est une conséquence immédiate du théorème [3]) d'après lequel toute fonction transformant la surface sphérique A en elle-même admet un prolongement continu (n'ayant pour valeurs que des points de A) sur l'espace S_n dont on a supprimé un point arbitraire dans chacune des composantes de S_n-A.

4. Nous allons démontrer à présent, en nous appuyant sur le théorème de dualité de M. Alexander, généralisé par M. Pontrjagin, que dans le cas où A et B sont des sous-ensembles fermés de S_n, l'existence d'une rétraction de S_n-B en A entraîne pour l'ensemble B certaines propriétés d'homologie qui justifient l'introduction du terme d'ensemble transverse.

Théorème 1. *Soient A et B deux sous-ensembles fermés de S_n dont B y est transverse à A. Pour tout cycle γ_0 [4]) situé dans S_n-A, il existe alors un cycle convergent [5]) de B, homologue à γ_0 dans S_n-A.*

---

[2]) K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. 17 (1931), p. 161, Lemme 20.

[3]) K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. 20 (1933), p. 182.

[4]) J'entends ici par *cycles* les cycles algébriques dont les coefficients appartiennent à un certain groupe abelien $\mathfrak{G}$, supposé dans ce travail soit discret et au plus dénombrable, soit topologique compact et satisfaisant au II axiome de séparabilité de M. Hausdorff. La somme des coefficients d'un cycle 0-dimensionnel sera toujours supposée égale à 0. Le cycle γ est dit *situé dans un ensemble E*, lorsque sa réalisation géométrique est un sous-ensemble de E.

[5]) Une suite $\{\gamma_i\}$, où tous les γ_i sont des cycles k-dimensionnels avec des coefficients appartenant à $\mathfrak{G}$, est dit un *cycle k-dimensionnel de l'espace M mod $\mathfrak{G}$ convergent*, lorsqu'il existe un ensemble compact $E\subset M$ tel que:

1⁰ tous les sommets des cycles γ_i appartiennent à E,

2⁰ le plus grand diamètre des simplexes de γ_i tend vers 0 avec $1/i$,

3⁰ il existe une suite $\{\varkappa_i\}$ de complexes de E (c. à d. dont les sommets appartiennent à E) aux coefficients appartenant à $\mathfrak{G}$, dont les simplexes ont le diamètre (le plus grand) tendant vers 0 et dont les frontières $\dot{\varkappa}_i$ sont égales à $\gamma_i-\gamma_{i+1}$ pour $i=1,2,\dots$.

Les cycles k-dimensionnels de M mod $\mathfrak{G}$ convergents constituent un groupe abelien $Z^k_{\mathfrak{G}}(M)$. Deux cycles convergents $\Gamma_1=\{\gamma_i^{(1)}\}$ et $\Gamma_2=\{\gamma_i^{(2)}\}$, éléments de $Z^k_{\mathfrak{G}}(M)$, sont dits *homologues dans M*, lorsque la suite $\{\gamma_i\}$, où $\gamma_{2i-1}=\gamma_i^{(1)}$ et $\gamma_{2i}=\gamma_i^{(2)}$, est un cycle de M convergent. Les cycles convergents homologues dans M à 0 constituent un sous-groupe $H^k_{\mathfrak{G}}(M)$ de $Z^k_{\mathfrak{G}}(M)$. Le groupe-quotient $B^k_{\mathfrak{G}}(M)$ de $Z^k_{\mathfrak{G}}(M)$ par rapport à $H^k_{\mathfrak{G}}(M)$ s'appelle *groupe k-dimensionnel de Betti de M mod $\mathfrak{G}$*.

Dans le cas où $\mathfrak{G}$ est un groupe topologique et M est un espace compact, on considère $B^k_{\mathfrak{G}}(M)$ comme groupe topologique; à ce but, on définit, pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout entourage U dans $\mathfrak{G}$ de l'élément 0, le (ε, U)-entourage de l'élément 0 du groupe $B^k_{\mathfrak{G}}(M)$ comme l'ensemble de toutes les classes appartenant à $B^k_{\mathfrak{G}}(M)$ et ayant, parmi leurs éléments, des cycles convergents $\{\gamma_i\}$ où les diamètres de tous les simplexes de γ_i et $\varkappa_i$ sont $<\varepsilon$ et toutes les combinaisons linéaires aux coefficients entiers $\leqslant 1$ formées des coefficients du cycle γ_1 appartiennent à U. Voir L. Pontrjagin, *The general topological theorem of duality for closed sets* Annals of Math. 35 (1934), p. 909.

Dans le cas special où P est un polyèdre (ou un sous-ensemble ouvert d'un polyèdre) et $M=P$, la notion de cycle de P convergent constitue une généralisation de celle de cycle situé dans P. On peut notamment identifier chaque cycle γ situé dans P avec le cycle convergent obtenu par la suite des subdivisions barycentriques de γ. Cela permet de parler des homologies entre les cycles situés dans P et les cycles convergents de P.

Démonstration [6]). Soient: $r(x)$ une fonction rétractant S_n-B en A et γ_0 un cycle k-dimensionnel situé dans S_n-A, aux coefficients appartenant à un groupe $\mathfrak{G}$ [4]). Il existe un polyèdre $W\subset S_n-B$ étant un entourage de l'ensemble A et tel que γ_0 est situé dans S_n-W. Comme la fonction $r(x)$ transforme A par identité, il existe un polyèdre V étant un entourage de A et tel que, pour tout $x\in V$, le segment $\overline{xr(x)}$ est situé dans W. Il en résulte [7]) que chaque cycle γ de V est homologue dans W à son transformé obtenu par la rétraction r [8]).

---

[6]) Il est à remarquer que la validité de cette démonstration subsiste, en remplaçant l'hypothèse que B est transverse à A par la suivante, qui est moins restrictive (et purement homologique): il existe une homomorphie (continue) r transformant le groupe $B^{n-k-1}_{\mathfrak{G}}(S_n-B)$ en groupe $B^{n-k-1}_{\mathfrak{G}}(A)$ de façon que tout entourage $W\subset S_n-B$ de A contienne un entourage V de A tel qu'à toute classe des cycles convergents $[\Gamma]\in B^{n-k-1}_{\mathfrak{G}}(V)$ corresponde une classe de cycles convergents $[\Gamma]_r\in B^{n-k-1}_{\mathfrak{G}}(A)$ homologues dans W aux cycles de $[\Gamma]$. Cf. la notion de rétracte homologique de M. S. Lefschetz, *On locally-connected and related sets*, Duke Math. Journal 2 (1936), p. 436.

Dans la démonstration, on peut remplacer en outre la surface sphérique S_n par une h-multiplicité dont les propriétés homologiques coïncident avec celles d'une surface sphérique (espace de Poincaré).

[7]) Voir p. ex. le livre: P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935, p. 198.

[8]) Une transformation continue $\varphi(x)$ d'un espace M en N fait correspondre à tout cycle $\Gamma=\{\gamma_i\}$ de M convergent un cycle $\Gamma_\varphi=\{\gamma_{i\varphi}\}$ de N convergent. Cette correspondance étant additive et l'image d'un cycle convergent homologue dans M à 0 étant un cycle convergent homologue dans N à 0, on obtient ainsi une transformation homomorphe du groupe $B^k_{\mathfrak{G}}(M)$ en groupe $B^k_{\mathfrak{G}}(N)$. Dans le cas où $\mathfrak{G}$, et par suite $B^k_{\mathfrak{G}}(M)$ et $B^k_{\mathfrak{G}}(N)$, sont des groupes topologiques, cette homomorphie est continue. C'est une conséquence immédiate de la définition des entourages dans les groupes de Betti et du fait qu'aux cycles γ_i et aux complexes $\varkappa_i$ avec

Désignons maintenant par $\overset{*}{\mathfrak{G}}$ le groupe orthogonal à $\mathfrak{G}$ [9]) ou — ce qui revient au même [10]) — le groupe de toutes les transformations homomorphes (et continues, lorsque $\mathfrak{G}$ est un groupe topologique) en groupe $\mathfrak{Z}_1$ de tous les nombres réels réduits mod 1. La rétraction r fait correspondre à tout cycle $\overset{*}{\gamma}\in Z^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-B)$ un cycle convergent $\overset{*}{\Gamma}_r\in Z^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(A)$. Posons

$$(1) \qquad \chi_{\gamma_0}(\overset{*}{\gamma})=v(\gamma_0,\overset{*}{\Gamma}_r),$$

où $v(\gamma_0,\overset{*}{\Gamma}_r)$ désigne le coefficient d'enlacement du cycle γ_0 avec le cycle convergent $\overset{*}{\Gamma}_r$ [11]). Etant donné un autre cycle $\overset{*}{\gamma}'\in Z^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-B)$ homologue à $\overset{*}{\gamma}$ dans S_n-B, son image $\overset{*}{\Gamma}'_r$ est homologue à $\overset{*}{\Gamma}_r$ dans A. Par conséquent $v(\gamma_0,\overset{*}{\Gamma}_r)=v(\gamma_0,\overset{*}{\Gamma}'_r)$, ou — ce qui est la même chose — $\chi_{\gamma_0}(\overset{*}{\gamma}')=\chi_{\gamma_0}(\overset{*}{\gamma})$. L'opération χ_{γ_0} peut donc être considerée comme une opération sur les classes des cycles convergents, homologues

$\varkappa_i=\gamma_i-\gamma_{i+1}$ (cf. le renvoi [5])) formés de simplexes suffisamment petits viennent correspondre les cycles $\gamma_{i\varphi}$ et les complexes $\varkappa_{i\varphi}$ dont les simplexes sont arbitrairement petits. Les cofficients de γ_i et de $\varkappa_i$ coïncident avec ceux de $\gamma_{i\varphi}$ et de $\varkappa_{i\varphi}$.

Dans le cas où $M=P$ est un sous-ensemble ouvert d'un polyèdre, le cycle γ situé dans M peut être identifié avec la suite $\{\gamma_i\}$ de ses subdivisions barycentriques. Cela permet de considérer le cycle convergent $\{\gamma_{i\varphi}\}$ comme l'image du cycle γ donnée par la transformation φ.

[9]) Les groupes abeliens $\mathfrak{G}$ et $\overset{*}{\mathfrak{G}}$, dont l'un est discret et l'autre topologique, s'appellent (d'après M. Pontrjagin) *orthogonaux*, lorsque à chaque couple $(a,\overset{*}{a})$, où $a\in\mathfrak{G}$ et $\overset{*}{a}\in\overset{*}{\mathfrak{G}}$, correspond le „produit" $a\cdot\overset{*}{a}$ appartenant au groupe $\mathfrak{Z}_1$ de tous les nombres réels réduits mod 1, de manière que:

1° $a\cdot(\overset{*}{a}_1+\overset{*}{a}_2)=a\cdot\overset{*}{a}_1+a\cdot\overset{*}{a}_2$,
2° $(a_1+a_2)\cdot\overset{*}{a}=a_1\cdot\overset{*}{a}+a_2\cdot\overset{*}{a}$,
3° $a\neq0$ entraîne l'existence d'un $\overset{*}{a}$ tel que $a\cdot\overset{*}{a}\neq0$,
4° $\overset{*}{a}\neq0$ entraîne l'existence d'un a tel que $a\cdot\overset{*}{a}\neq0$,
5° le produit $a\cdot\overset{*}{a}$ dépend d'une manière continue de son facteur parcourant le groupe topologique.

[10]) L. Pontrjagin, *The Theory of topological commutative Groups*, Annals of Math. 35 (1934), p. 272.

[11]) D'après la définition des cycles convergents, les cycles $\overset{*}{\gamma}_i$ qui constituent un cycle convergent $\overset{*}{\Gamma}=\{\overset{*}{\gamma}_i\}\in Z^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(A)$ sont, à partir d'un index suffisamment grand, homologues deux à deux dans un entourage arbitrairement donné de A. Il en résulte que, pour un cycle arbitraire $\gamma\in Z^k_{\mathfrak{G}}(S_n-A)$, il existe un index i_0 tel que les coefficients d'enlacement $v(\gamma,\gamma_i)$ (éléments du groupe $\mathfrak{Z}_1$) sont, à partir de $i=i_0$, bien définis et ne dépendent pas de i. La valeur commune de $v(\gamma,\gamma_i)$ pour $i\geq i_0$ s'appelle le *coefficient d'enlacement $v(\gamma,\Gamma)$ du cycle γ avec le cycle convergent Γ.*

dans S_n-B, c. à d. sur les éléments du groupe $B^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-B)$. L'additivité de χ_{γ_0} étant une conséquence immédiate de la définition du coefficient d'enlacement, cette opération constitue une transformation homomorphe du groupe $B^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-B)$ en $\mathfrak{Z}_1$. Si, en outre, $\overset{*}{\mathfrak{G}}$ est un groupe topologique, l'opération χ_{γ_0} est continue, car le coefficient d'enlacement avec un cycle constant γ_0 dépend d'une manière continue de la classe du cycle convergent $\overset{*}{\Gamma}_r$ [12]), qui dépend à son tour d'une manière continue de la classe d'homologie du cycle $\overset{*}{\gamma}\in Z^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-B)$ [8]). Par conséquent, l'opération χ_{γ_0} constitue une transformation homomorphe et continue du groupe $B^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-B)$ en $\mathfrak{Z}_1$. Or, pour un polyèdre arbitrairement donné $U\subset S_n-W$ qui est un entourage de l'ensemble B, l'opération χ_{γ_0}, définie par la formule (1), peut être considerée aussi comme une homomorphie continue de $B^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-U)$ en $\mathfrak{Z}_1$. Il en résulte [13]) l'existence dans U d'un cycle k-dimensionnel γ_U mod $\mathfrak{G}$ tel que

$$(2) \qquad v(\gamma_U,\overset{*}{\gamma})=\chi_{\gamma_0}(\overset{*}{\gamma})$$

pour tout cycle $\overset{*}{\gamma}\in Z^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-U)$. On en conclut selon (1) que

$$v(\gamma_U,\overset{*}{\gamma})=v(\gamma_0,\Gamma_r),$$

où $\overset{*}{\Gamma}_r$ désigne le transformé du cycle $\overset{*}{\gamma}$ donné par la rétraction r. Si, en particulier, le cycle $\overset{*}{\gamma}$ est situé dans V, on a $\overset{*}{\gamma}\sim\overset{*}{\Gamma}_r$ dans W, ce qui entraîne $v(\gamma_0,\overset{*}{\gamma})=v(\gamma_0,\overset{*}{\Gamma}_r)$, d'où enfin $v(\gamma_U,\overset{*}{\gamma})=v(\gamma_0,\overset{*}{\gamma})$ pour tout cycle $\overset{*}{\gamma}\in Z^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(V)$. On en conclut [13]) que les cycles γ_U et γ_0 sont homologues dans S_n-V et par conséquent aussi dans S_n-A.

Nous avons ainsi démontré qu'il existe pour tout entourage polyédrique $U\subset S_n-W$ de B un cycle $\gamma_U\in Z^k_{\mathfrak{G}}(U)$ homologue à γ_0 dans S_n-A et satisfaisant à la condition (2). Remarquons, en outre, que U' étant un entourage polyédrique de B contenu dans U, le cycle $\gamma_{U'}$ ainsi défini est homologue à γ_U dans U. C'est une conséquence [13]) de la formule (2), qui entraîne l'identité des coefficients d'enlacement des cycles γ_U et $\gamma_{U'}$ avec tous les cycles $\overset{*}{\gamma}\in Z^{n-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{G}}}(S_n-U)$.

[12]) L. Pontrjagin, *The general topological Theorem of Duality for closed Sets*, Annals of Math. 35 (1934), p. 913.

[13]) D'après la forme générale du théorème de dualité de M. Alexander, due à M. L. Pontrjagin, l. c., p. 911.

Ceci établi, envisageons une suite décroissante $\{U_i\}$ d'entourages polyédriques de B tels que $\prod_{i=1}^{\infty} U_i = B$. Les cycles correspondant γ_{U_i} constituent une suite satisfaisant aux conditions:

(3) $\gamma_{U_i} \sim \gamma_{U_{i+1}}$ dans U_i,

(4) $\gamma_{U_i} \sim \gamma_0$ dans $S_n - A$.

Nous pouvons admettre de plus que le diamètre de tous les simplexes du cycle γ_{U_i} est $<1/i$. En vertu de la condition (3), les cycles γ_{U_i} constituent un cycle convergent $\{\gamma_{U_i}\}$ de $S_n - A$ qui est, selon (4), homologue à γ_0 dans $S_n - A$. Les entourages U_i convergeant vers B, la suite $\{\gamma_i\}$ se laisse transformer par une „modification infiniment petite" [14]) de ses sommets en un cycle de B, convergent et homologue à γ_0 dans $S_n - A$, c. q. f. d.

5. Notons la conséquence suivante du théorème 1.

Soit B un sous-ensemble fermé de S_n contenant un cycle faiblement convergent [15]) $\{\gamma_i\}$ de dimension $n-2$ et qui n'est pas homologue à 0 dans B. Il existe alors une transformation essentielle de $S_n - B$ en circonférence S_1 [16]). Il en résulte l'existence [17]) d'une rétraction $r(x)$ de $S_n - B$ en une courbe simple fermée $A \subset S_n - B$. Or, d'après le théorème de dualité [13]), il existe un cycle $(n-2)$-dimensionnel γ aux coefficients entiers, situé dans $S_n - A$ et non homologue à 0 dans $S_n - A$. D'après le théorème 1, il existe dans B un cycle convergent Γ homologue à γ dans $S_n - A$ et par conséquent non homologue à 0 dans B. On obtient ainsi le suivant

Corollaire. *B étant un sous-ensemble fermé de S_n dans lequel il existe des cycles faiblement convergents $(n-2)$-dimensionnels non homologues à 0, le groupe de Betti $(n-2)$-dimensionnel de B ne disparaît pas.*

[14]) c. à d. en remplaçant tout sommet de chaque cycle γ_i par un point dont la distance du sommet primitif est $<\varepsilon_i$, où $\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0$. Voir P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 180.

[15]) c. à d. une suite $\{\gamma_i\}$ de cycles aux coefficients entiers et qui, considérés comme des cycles aux coefficients rationnels, constituent un cycle convergent. Les homologies pour les cycles faiblement convergents seront entendues toujours comme celles dans le champ des coefficients rationnels (homologies avec division). Cf. K. Borsuk et S. Eilenberg, *Über stetige Abbildungen der Teilmengen euklidischer Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. 26 (1936), p. 208, renvoi [6]).

[16]) ibid., p. 212, théorème 1.

[17]) K. Borsuk, *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. 17 (1931), p. 184 et 190.

6. L'exemple suivant montre que les propriétés d'homologie formulées dans la thèse du théorème 1 ne sont pas suffisantes (même dans le domaine des polyèdres) pour que B soit transverse à A.

Soient: A le sous-ensemble de S_3 formé de deux circonférences tangentes C_1 et C_2 et B la somme de deux circonférences C_1' et C_2' situées dans $S_3 - A$. On constate sans peine que dans le cas où le coefficient absolu d'enlacement [18]) de C_i et C_j' est égal à 1 pour $i=j$ et à 0 pour $i \neq j$, tout cycle $\gamma \in Z_{\mathfrak{G}}(S_3 - A)$ est homologue dans $S_3 - A$ à une combinaison linéaire (avec des coefficients appartenant à $\mathfrak{G}$) des cycles aux coefficients entiers qui s'obtiennent par une orientation des circonférences C_1' et C_2'. La propriété formulée dans la thèse du théorème 1 est par conséquent remplie. Néanmoins, la situation des circonférences C_1' et C_2' peut être telle que A n'est pas un rétracte de $S_3 - B$. Ainsi p. ex., lorsque $C_1' \cdot C_2' = 0$ et le coefficient absolu d'enlacement de C_1' et C_2' est égal à 1, le groupe fondamental $\pi_1(S_3 - B)$ de $S_3 - B$ — comme on le vérifie aisément — est abelien, tandis que le groupe fondamental $\pi_1(A)$ de A est non abelien. Par conséquent $\pi_1(A)$ n'est pas une image homomorphe de $\pi_1(S_3 - B)$, ce qui aurait lieu, si A était un rétracte de $S_3 - B$.

7. Il est ainsi démontré que la propriété de B formulée dans la thèse du théorème 1 n'est pas, en général, suffisante pour qu'un ensemble B soit transverse dans S_n à un ensemble donné A. Il existe cependant quelques cas importants dans lesquels la propriété en question se montre suffisante. Il en est p. ex. ainsi dans le cas où A est homéomorphe à une surface sphérique de dimension 0, 1 ou $n-1$, comme cela résulte d'un théorème plus précis que nous allons démontrer dans **9** (théorème 2). Un autre cas où la condition en question se montre suffisante sera traité dans **11** (théorème 3).

8. Commençons par la démonstration du suivant

Lemme 1. *Soient A et B deux sous-ensembles de S_n fermés, disjoints et tels que, pour tout cycle $(n-1)$-dimensionnel γ aux coefficients entiers situé dans $S_n - A$* [19]) *et pour tout entourage U de B, il existe un cycle γ' situé dans U et homologue à γ dans $S_n - A$.*

Alors l'ensemble B coupe S_n entre tout couple de points appartenant à des différentes composantes de A.

[18]) K. Borsuk et S. Eilenberg, l. c., p. 215.

[19]) Il est à remarquer que dans le cas où A et B sont des sous-ensembles de S_n, fermés dans S_n et disjoints, tout cycle γ situé dans $S_n - A$ est homologue

Démonstration. Supposons par contre qu'il existe une composante H de $S_n - B$ qui contienne deux points a_1 et a_2 de deux composantes différentes de A. Il existe dans H une ligne simple polygonale L aux extrémités a_1 et a_2. Par une orientation cohérente de ses segments on en obtient un complexe λ aux coefficients entiers, situé dans H et ayant $a_1 - a_2$ pour frontière. Il existe, en outre, un complexe géométrique $K \subset H$ dont la frontière (ensembliste) $F = K \cdot \overline{H - K}$ est disjointe de A et qui remplit les conditions: $a_1 \epsilon K$ et $a_2 \epsilon H - K$. On peut admettre, de plus, que a_1 est un point intérieur à un des simplexes n-dimensionnels de K. Désignons par $\varkappa$ le complexe algébrique aux coefficients entiers qui s'obtient de K par l'orientation cohérente de tous ses simplexes n-dimensionnels. La frontière (algébrique) $\dot{\varkappa}$ de $\varkappa$ constitue un cycle aux coefficients entiers situé dans $F \subset H - A \subset S_n - A$. Le point a_1 étant couvert par un seul simplexe de $\varkappa$ et le point a_2 appartenant à $H - K$, le nombre d'intersection du cycle $a_1 - a_2$ avec le complexe $\varkappa$ est égal à ± 1; par conséquent le coefficient d'enlacement du cycle $\dot{\varkappa}$ avec le cycle $a_1 - a_2$ est égal à ± 1. Or, d'après notre hypothèse, il existe dans un entourage U de B arbitrairement donné un cycle γ_U homologue à $\dot{\varkappa}$ dans $M - A \subset M - (a_1) - (a_2)$. Le coefficient d'enlacement du cycle γ_U avec le cycle $a_1 - a_2$ serait donc égal à ± 1. Par conséquent, la réalisation géométrique du complexe γ empièterait sur L. Ainsi la ligne L contiendrait des points de l'entourage arbitrairement donné U de B, ce qui contredit l'inclusion $L \subset H \subset S_n - B$.

9. *Théorème 2.* *Soit $A \subset S_n$ un ensemble de dimension $k = 0, 1$ ou $n-1$, homéomorphe à la surface sphérique S_k. Alors, pour qu'un ensemble fermé $B \subset S_n - A$ soit transverse à A, il faut et il suffit que tout cycle de dimension $n-k-1$, aux coefficients entiers, situé dans $S_n - A$*[19]*), y soit homologue à un certain cycle de B faiblement convergent.*

dans $S_n - A$ à un cycle situé dans un entourage arbitrairement donné de A. Par conséquent, il existe un cycle homologue à γ dans $S_n - A$, situé dans $S_n - A - B$. Il en résulte que la condition

(C) *tout cycle situé dans $S_n - A$ (aux coefficients appartenant à un groupe abelien arbitraire) est homologue à un cycle de B convergent*

est équivalente à la condition (C') (moins restrictive en apparence) qui s'obtient de (C) en y remplaçant $S_n - A$ par $S_n - A - B$.

Démonstration. La nécessité de la condition étant une conséquence immédiate du théorème 1, il n'en reste qu'à prouver la suffisance.

Dans le cas où $k = 0$, l'ensemble A ne contient que deux points a_1 et a_2. Il résulte du lemme 1 que B constitue une coupure de S_n entre a_1 et a_2, ce qui montre — comme nous l'avons déjà remarqué dans **2** — que B est transverse à A.

Dans le cas où $k = 1$, c. à d. où A est une courbe simple fermée, le théorème de dualité de M. Alexander entraîne l'existence dans $S_n - A$ d'un cycle $(n-2)$-dimensionnel γ avec des coefficients entiers et tel que le coefficient d'enlacement avec γ du cycle γ_0 qui s'obtient par une orientation de la courbe A est égal à 1. Or, il existe un cycle Γ de B faiblement convergent et homologue à γ dans $S_n - A$. Il en résulte que $v(\gamma_0, \Gamma) = v(\gamma_0, \gamma) = 1$, ce qui entraîne[20]) que A est un rétracte de $S_n - B$.

Dans le cas où $k = n-1$, l'ensemble $S_n - A$ se décompose en deux composantes G_1 et G_2. Le cycle $a_1 - a_2$, où $a_i \epsilon G_i$, étant par hypothèse homologue dans $S_n - A$ à un cycle de B faiblement convergent, on en conclut qu'aucun des ensembles $G_i \cdot B$ n'est vide. Or, ceci entraîne — comme nous l'avons montré dans **3** — que B est transverse à A, c. q. f. d.

11. L'exemple A de **6**, montrant l'insuffisance de la thèse du théorème 1 pour qu'un ensemble B soit transverse à A, était une somme de deux circonférences situées dans S_3 et ayant un point commun. Le premier nombre de Betti de cet ensemble était donc égal à 2. Or, on a le suivant

Théorème 3. *$A \subset S_3$ étant un polyèdre dont le premier nombre de Betti ne surpasse pas 1, chaque ensemble $B \subset S_3 - A$ tel que tout cycle situé dans $S_3 - A$ est homologue dans $S_3 - A$ à un cycle convergent de B est transverse à A dans S_3.*

Remarquons au préalable que, pour toute composante A_0 de A, on a $p_1(A_0) \leqslant p_1(A)$[21]). Or, en vertu du théorème de dualité de M. Alexander, il en résulte que $p_1(S_3 - A_0) = p_1(A_0) \leqslant p_1(A)$ et par conséquent que l'on a $p_1(G) \leqslant p_1(S_3 - A_0) \leqslant p_1(A)$ pour toute composante G de $S_3 - A_0$. Le théorème 3 est ainsi une conséquence du théorème plus précis que nous allons démontrer à présent.

[20]) S. Eilenberg, *Sur les courbes sans noeuds*, Fund. Math. 28 (1937), p. 241, (T').

[21]) où $p_i(A)$ désigne le nombre i-dimensionnel de Betti de l'ensemble A.

Théorème 3'. Soit $A \subset S_3$ un polyèdre tel que, pour chaque composante A_0 de A, le premier nombre de Betti de chaque composante de $S_3 - A_0$ est $\leqslant 1$.

Alors, pour qu'un ensemble fermé $B \subset S_3 - A$ soit transverse à A, il faut et il suffit que tout cycle aux coefficients entiers situé dans $S_3 - A$[19]) *soit homologue dans $S_3 - A$ à un cycle de B faiblement convergent.*

12. ***Lemme 2.*** *Soient: A et B deux sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace M et G une composante de $M - A$.*

Alors, chaque cycle $\Gamma = \{\gamma_i\}$ de G qui est faiblement convergent et homologue dans $M - A$ à un cycle $\bar{\Gamma} = \{\bar{\gamma}_i\}$ de B faiblement convergent est homologue dans G à un cycle de $B \cdot G$ faiblement convergent.

D é m o n s t r a t i o n. Il existe d'après l'hypothèse un ensemble compact $E \subset M - A$ et deux suites $\{\varkappa_i\}$ et $\{\lambda_i\}$ de complexes aux coefficients rationnels, tels que le plus grand diamètre de leurs simplexes tend vers 0 avec $1/i$ et que pour $i = 1, 2, \ldots$:

1^0 tous les sommets de $\varkappa_i$ appartiennent à $B \cdot E$ et $\dot{\varkappa}_i = \bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_{i+1}$,
2^0 tous les sommets de λ_i appartiennent à E et $\dot{\lambda}_i = \gamma_i - \bar{\gamma}_i$.

Les ensembles $E' = E \cdot G$ et $E'' = E - E'$ étant disjoints et fermés dans E, chaque complexe $\varkappa_i$ se décompose, à partir d'un i suffisamment grand, en deux complexes: $\varkappa_i'$ de $B \cdot E'$ et $\varkappa_i''$ de $B \cdot E''$. Pareillement, le complexe λ_i se décompose, pour i suffisamment grand, en complexes: λ_i' de E' et λ_i'' de E'', et le cycle $\bar{\gamma}_i$ en cycles $\bar{\gamma}_i'$ de $B \cdot E'$ et $\bar{\gamma}_i''$ de $B \cdot E''$. On a en outre:

$$\dot{\varkappa}' = \bar{\gamma}_i' - \bar{\gamma}_{i+1}' \qquad \text{et} \qquad \dot{\lambda}_i' = \gamma_i - \bar{\gamma}_i';$$

les cycles $\bar{\gamma}_i'$ constituent par conséquent un cycle de $B \cdot E' \subset B \cdot G$ faiblement convergent et homologue dans $E' \subset G$ au cycle $\Gamma = \{\gamma_i\}$, c. q. f. d.

12. Afin d'établir à présent le théorème 3', remarquons d'abord que la nécessité de la condition est une conséquence immédiate du théorème 1. On n'a donc qu'à démontrer sa suffisance. Nous allons la démontrer par une réduction successive au cas de polyèdres A de plus en plus simples.

13. ***Réduction au cas de polyèdre A connexe.*** Soit a un point arbitraire de A. Pour montrer que B est transverse à A, il suffit de prouver que, pour toute composante H de $S_3 - B$ qui n'est pas disjointe à A, il existe une fonction r_H rétractant H en $A \cdot H$; en effet, la fonction r définie par les formules:

$$r(x) = \begin{cases} r_H(x) \text{ pour } x \in H, \text{ où } H \text{ est une composante de } S_3 - B \text{ et } H \cdot A \neq 0, \\ a \quad \text{ pour } x \in H, \text{ où } H \text{ est une composante de } S_3 - B \text{ et } H \cdot A = 0, \end{cases}$$

effectue une rétraction de $S_3 - B$ en A.

D'après le lemme 1, l'ensemble $A' = A \cdot H$ est connexe. Pour arriver à la réduction en question, il ne reste donc qu'à démontrer que les ensembles A' et $B' = S_3 - H$ satisfont à l'hypothèse analogue à celle qui a été admise pour A et B, à savoir que tout cycle γ aux coefficients entiers situé dans $S_3 - A'$ est homologue dans $S_3 - A'$ à un cycle de B' faiblement convergent. Nous pouvons évidemment nous borner au cas où γ est situé dans $S_3 - A' - B'$ [19]); or, l'homologie en question est dans ce cas une conséquence immédiate des hypothèses concernant A et B et des inclusions

$$S_3 - A' - B' \subset S_3 - A - B, \qquad S_3 - A \subset S_3 - A' \text{ et } B \subset B'.$$

14. ***Réduction au cas où la frontière de chaque composante de $S_3 - A$ est homéomorphe soit à la surface de la sphère, soit à celle du tore.*** D'après un théorème élémentaire[22]), il existe un polyèdre $A' \subset S_3 - B$ étant un entourage de A et tel que: 1) la frontière $A' \cdot \overline{S_3 - A'}$ de A' se décompose en multiplicités disjointes à 2 dimensions, 2) il existe une fonction $\varphi(x, t)$ rétractant par déformation[23]) le polyèdre A' en A et satisfaisant à la condition

$$\varphi(x, t) = x \qquad \text{pour tout} \quad x \in A \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5}$$

A étant un rétracte de A' (donné par la fonction $\varphi(x, 1)$), il ne reste qu'à établir l'existence d'une rétraction de $S_3 - B$ en A'. Pour parvenir à la réduction cherchée, il suffit donc de montrer que:

1^0 les ensembles A' et B satisfont à l'hypothèse analogue à celle admise pour A et B, à savoir que tout cycle aux coefficients entiers situé dans $S_3 - A'$ est homologue dans $S_3 - A'$ à un certain cycle de B faiblement convergent;

2^0 la frontière de toute composante G' de $S_3 - A'$ est homéomorphe soit à la surface de la sphère, soit à celle du tore.

---

[22]) K. B o r s u k, *Über die Fundamentalgruppe der Polyeder im euklidischen dreidimensionalen Raume*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 41 (1934), p. 69 et 70.

[23]) Une fonction $\varphi(x, t)$ s'appelle *rétraction par déformation* de l'espace M en son sous-ensemble E, lorsqu'elle est continue par rapport au couple de variables $x \in M$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ et remplit les conditions:

$$\varphi(x, 0) = x, \qquad \varphi(x, 1) \begin{cases} \in E & \text{pour tout } x \in M \\ = x & \text{pour tout } x \in E. \end{cases}$$

Ad 1⁰. Désignons par $\mathfrak{R}$ le groupe (discret) des nombres rationnels et par $\overset{*}{\mathfrak{R}}$ le groupe (topologique compact) orthogonal à $\mathfrak{R}$. Il existe pour chaque cycle $\gamma \in Z^k_{\mathfrak{R}}(S_3-A')$ un cycle faiblement convergent $\Gamma \in Z^k_{\mathfrak{R}}(B)$ homologue à γ dans S_n-A. La fonction φ rétractant A' en A par déformation fait correspondre à tout cycle $\overset{*}{\gamma} \in Z^{3-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{R}}}(A')$ un cycle $\overset{*}{\gamma}{}' \in Z^{3-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{R}}}(A)$ homologue à $\overset{*}{\gamma}$ dans A'. Il en résulte que:

$$v(\overset{*}{\gamma},\Gamma)=v(\overset{*}{\gamma}{}',\Gamma), \qquad v(\overset{*}{\gamma}{}',\Gamma)=v(\overset{*}{\gamma}{}',\gamma) \qquad \text{et} \qquad v(\overset{*}{\gamma}{}',\gamma)=v(\overset{*}{\gamma},\gamma),$$

d'où $v(\overset{*}{\gamma},\Gamma)=v(\overset{*}{\gamma},\gamma)$ pour tout $\overset{*}{\gamma} \in Z^{3-k-1}_{\overset{*}{\mathfrak{R}}}(A')$. Par conséquent [13], le cycle γ est homologue dans S_3-A' au cycle faiblement convergent Γ.

Ad 2⁰. Soit G la composante de S_3-A contenant G'. En posant pour $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\varphi'(x,t)=\begin{cases} \varphi(x,t) & \text{pour} \quad x \in A' \cdot G, \\ x & \text{pour} \quad x \in S_3-G, \end{cases}$$

on obtient, selon (5), une fonction continue rétractant par déformation le polyèdre $A''=(S_3-G)+A'\cdot G$ en S_3-G. Le nombre de Betti i-dimensionnel étant un invariant des rétractions par déformation [24], il en résulte que $p_i(S_3-G)=p_i(A'')$, d'où selon le théorème de dualité de M. Alexander

$$p_i(G)=p_i(S_3-A'').$$

Ceci implique, en particulier, que l'ensemble $S_3-A''=(S_3-A')\cdot G$ est connexe et coïncide par conséquent avec la composante G' de S_3-A'. Comme G' est une composante du complémentaire du polyèdre connexe A', la frontière F' de G' est connexe [25]. En vertu de la définition de A', la frontière F' est donc une multiplicité et son complémentaire S_3-F' se décompose en deux régions G' et $G''=S_3-G'-F'$ telles que $p_1(G')=p_1(G'')$ [26]. En tenant compte du théorème de dualité de M. Alexander, on en conclut que

$$p_1(F')=p_1(S_3-F')=p_1(G'+G'')=2p_1(G')=2p_1(S_3-A'')=2p_1(G)\leqslant 2.$$

[24]) K. Borsuk, *Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte*, Fund. Math. 21 (1933), p. 92.

[25]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Sur les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer*, Fund. Math. 8, p. 148 et *Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'Analysis Situs*, Fund. Math. 14 (1929), p. 308.

[26]) R. L. Wilder, *Generalised closed manifolds in n-space*, Annals of Math. 35 (1934), p. 886.

Ainsi, la frontière F' d'une composante arbitraire G' de S_3-A' est une multiplicité à 2 dimensions dont le premier nombre de Betti ne dépasse pas 2. Il en résulte que F' est homéomorphe soit à la surface de la sphère, soit à celle du tore.

15. ***Démonstration du théorème 3' dans sa forme réduite.*** Soit A un polyèdre dans S_3 tel que la frontière F de chaque composante G de S_3-A est homéomorphe soit à la surface de la sphère soit à celle du tore. Il ne reste qu'à établir l'existence d'une rétraction de $A+G-B$ en A. Deux cas sont à distinguer:

1⁰ F est homéomorphe à la surface de la sphère. D'après **3**, il existe alors, pour un point arbitraire $p_0 \in G$, une rétraction $r(x)$ de $F+G-(p_0)$ en F. En posant en outre $r(x)=x$ pour tout $x \in A$, on obtient une rétraction de $A+G-(p_0)$ en A.

Si, $G \neq S_3-A$, il existe une composante $G' \neq G$ de S_3-A. Soient p et p' deux points arbitraires de G et G' respectivement. D'après l'hypothèse, il existe un cycle de B faiblement convergent et homologue dans S_3-A au cycle $p-p'$. Il en résulte que l'ensemble $G \cdot B$ n'est pas vide. Or, on peut admettre que le point p_0 appartient à B. Par conséquent, la fonction $r(x)$, considérée dans l'ensemble $A+G-B \subset A+G-(p_0)$, effectue une rétraction de $A+G-B$ en A.

Si, au contraire, $G=S_3-A$, la fonction $r(x)$ effectue une rétraction de $S_3-(p_0)$ en polyèdre A. Par conséquent, A est un rétracte absolu, ce qui entraîne l'existence d'une rétraction de $A+G-B$ en A.

2⁰. F est homéomorphe à la surface du tore. Il existe alors une homéomorphie h transformant F en produit cartésien $S^{(1)} \times S^{(-1)}$ de deux circonférences $S^{(1)}$ et $S^{(-1)}$ munies d'orientations quelconques. Soit a_i un point arbitraire de $S^{(i)}$. Les fonctions:

$$f_1(x)=h^{-1}(x,a_{-1}) \qquad \text{et} \qquad f_{-1}(x)=h^{-1}(a_1,x)$$

font correspondre aux courbes orientées $S^{(1)}$ et $S^{(-1)}$ les courbes orientées $f_1(S^{(1)})$ et $f_{-1}(S^{(-1)})$ situées dans F, qui — considerées comme des cycles γ_1 et γ_{-1} aux coefficients entiers — constituent une base d'homologie de dimension 1 [27]) de la surface F. En vertu du théorème de dualité de M. Alexander, il existe donc dans S_3-F deux cycles

[27]) Les cycles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ aux coefficients entiers constituent une base d'homologie de dimension i d'un polyèdre P (ou d'un sous-ensemble ouvert P d'un polyèdre), lorsque pour tout cycle γ de dimension i aux coefficients entiers situé dans P, il existe un système unique de nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tels que γ est homologue avec division au cycle $m_1\gamma_1+m_2\gamma_2+\ldots+m_k\gamma_k$.

$\overset{*}{\gamma}_1$ et $\overset{*}{\gamma}_{-1}$ tels que le coefficient d'enlacement de γ_i et $\overset{*}{\gamma}_j$ est égal à 1, si $i=j$, et à 0, si $i\neq j$. Les cycles $\overset{*}{\gamma}_1$ et $\overset{*}{\gamma}_{-1}$ constituent par conséquent une base d'homologie de dimension 1 de l'ensemble S_3-F.

Le cycle $\overset{*}{\gamma}_j$ se décompose en deux cycles: $\overset{*}{\gamma}'_j$ situé dans G et $\overset{*}{\gamma}''_j$ situé dans S_3-G-F. Le cycle $\overset{*}{\gamma}'_j$ étant par hypothèse homologue dans S_3-A à un cycle de B faiblement convergent, on conclut du lemme 2 qu'il existe un cycle $\overset{*}{\Gamma}'_j$ de B faiblement convergent et homologue dans G à $\overset{*}{\gamma}'_j$.

Soit maintenant C_j le polyèdre situé dans S_3-G-F et qui est une réalisation géométrique du cycle $\overset{*}{\gamma}''_j$. Posons $B'=B+C_1+C_{-1}$ et désignons par $\overset{*}{\Gamma}''_j$ le cycle de C_j convergent, formé par la suite des subdivisions barycentriques du cycle $\overset{*}{\gamma}''_j$. En posant $\overset{*}{\Gamma}_j=\overset{*}{\Gamma}'_j+\overset{*}{\Gamma}''_j$, on obtient un cycle de B' faiblement convergent et pour lequel

$$v(\gamma_i, \overset{*}{\Gamma}_j)=v(\gamma_i, \overset{*}{\Gamma}'_j)+v(\gamma_i, \overset{*}{\Gamma}''_j)=v(\gamma_i, \overset{*}{\gamma}'_j)+v(\gamma_i, \overset{*}{\gamma}''_j)=v(\gamma_i, \overset{*}{\gamma}_j).$$

Par conséquent, le coefficient d'enlacement de γ_i avec $\overset{*}{\Gamma}_j$ est égal à 1 pour $i=j$ et à 0 pour $i\neq j$. Or, d'après un théorème général [16]), il existe une transformation continue φ'_j de l'ensemble $S_3-B'\supset G+F-B$ en circonférence orientée $S^{(j)}$ par laquelle tout cycle γ de dimension 1 aux coefficients entiers situé dans S_3-B' se transforme en $S^{(j)}$ avec le degré („Abbildungsgrad") égal à $v(\gamma, \overset{*}{\Gamma}_j)$. En particulier, le cycle γ_j est transformé par φ'_j en $S^{(j)}$ avec le degré 1, si $i=j$, et 0, si $i\neq j$. Il en résulte [28]) que la transformation φ'_j, considérée dans la surface F, est du même type d'homotopie que la fonction φ''_j définie par la formule

$$\varphi''_j(x)=r_j h(x) \qquad \text{pour tout} \quad x\in F \tag{6}$$

où r_j désigne la transformation de $S^{(1)}\times S^{(-1)}$ en $S^{(1)}$ qui fait correspondre à tout $(x^{(1)}, x^{(-1)})\in S^{(1)}\times S^{(-1)}$ la coordonnée $x^{(j)}$. La fonction φ''_j définie par la formule (6) admet par conséquent [29]) un prolongement continu φ_j sur l'ensemble $S_3-B'\supset G+F-B$ tout entier. En posant donc $r(x)=h^{-1}(\varphi_1(x), \varphi_{-1}(x))$ pour tout $x\in G+F-B$, on obtient enfin une fonction continue transformant l'ensemble $G+F-B$ en F de façon que, pour tout $x\in F$, on ait $r(x)=h^{-1}(r_1h(x), r_{-1}h(x))=h^{-1}h(x)=x$. En conséquence, la fonction $r(x)=x$ où $x\in A$ effectue une rétraction de l'ensemble $A+G+F-B=A+G-B$ en A, c. q. f. d.

[28]) Voir p. ex. P. Alexandroff et H. Hopf, l. c., p. 517.

[29]) K. Borsuk, *Sur un espace de transformations continues et ses applications topologiques*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), p. 382.

16. Dans le cas où le polyèdre $A\subset S_3\neq A$ satisfait à la condition $p_0(A)-1=p_1(A)=p_2(A)=0$, les prémisses du théorème 3 sont remplies par l'ensemble $B=0$. Les rétractes de S_3, distincts de S_3, étant des rétractes absolus, on parvient du théorème 3 au

Corollaire [30]). *Chaque polyèdre $A\subset S_3$ tel que*

$$p_0(A)+p_1(A)+p_2(A)+p_3(A)=1$$

est un rétracte absolu.

La question suivante reste ouverte:

La thèse du théorème 3 reste-t elle vraie lorsqu'on remplace l'hypothèse que A soit un polyèdre par l'hypothèse moins restrictive que A soit un ensemble fermé localement contractile?

[30]) Une autre démonstration de ce corollaire se trouve p. 73 de mon travail cité au renvoi [22]).