Sur la répartition modulo un.

Par

Ch. Pisot (Groningen).

Considérons une suite réelle $u_0(\alpha)$, $u_1(\alpha), \ldots, u_n(\alpha), \ldots$ dont chaque élément dépend d'un même paramètre réel α. Lorsque α varie dans un intervalle A, nous supposerons que les fonctions $u_n(\alpha)$ possèdent une dérivée continue $u_n'(\alpha)$ vérifiant les inégalités suivantes:

$$|u_0'(\alpha)| \geqslant k_0, \quad |u_n(\alpha)| \geqslant k_n |u'_{n-1}(\alpha)| \quad \text{pour } n \geqslant 1,$$

où $k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots$ désignent des constantes positives ne dépendant pas de α telles que le produit infini $\prod_{n=0}^{N} k_n$ croît avec N indéfiniment.

Ces conditions étant remplies, nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème I. *$\psi(n)$ étant une fonction donnée, positive, pouvant croître avec n aussi vite que l'on veut, il y a une infinité de valeurs de α partout denses dans A telle que l'inégalité*

$$|u_n(\alpha) - a_n| \leqq \frac{1}{\psi(n)}$$

soit vérifiée pour chaque infinité de valeurs n_ν de n, pourvu que

$$\prod_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} k_n \geqslant \psi(n_\nu),$$

et a_n désignant un entier rationnel convenable.

Remarquons d'abord que nous pouvons supposer $\psi(n) > 2$ pour n supérieur à un nombre fixe m_0. En effet dans le cas contraire on aurait $\psi(n) \leqslant 2$ pour une infinité de valeurs de n, et pour ces valeurs le théorème est vérifié.

D'autre part toute suite $v_0(\alpha)$, $v_1(\alpha), \ldots, v_\nu(\alpha), \ldots$ extraite de la suite considérée (c'est à dire où $v_\nu(\alpha) = u_{n_\nu}(\alpha)$), vérifie les mêmes conditions, les constantes k_n étant replacées par les constantes

$$c_0 = \prod_{n=0}^{n_0} k_n, \quad c_{\nu+1} = \prod_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} k_n \quad \text{pour } \nu \geqslant 1.$$

Nous allons déterminer de proche en proche des nombres $n_0, n_1, \ldots, n_\nu, \ldots$, et nous montrerons que ce sont précisement des valeurs pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

Détermination de n_0: Posons $\gamma_n = \prod_{h=0}^{n} k_h$ et soit A_n l'intervalle obtenu en retranchant de A à chaque extrémité un intervalle de longueur $\frac{1}{\gamma_n}$. Comme $\frac{1}{\gamma_n}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, A_n n'est pas vide pour $n > m_1$ et nous désignons par δ_n la longueur de A_n. La fonction $u_n(\alpha)$ transforme A_n en un intervalle U_n de longueur Δ_n. Or $|u_n'(\alpha)| \geqslant \gamma_n$, par suite on aura $\Delta_n \geqslant \delta_n \gamma_n \geqslant 1$ dès que $n > m_2 \geqslant m_1$. Pour $n > m_2$, U_n contient au moins un entier rationnel. Nous prendrons alors pour n_0 un entier supérieur à m_0 et à m_2.

Détermination des n_ν: Ayant n_ν (pour $\nu \geqslant 0$) nous prendrons arbitrairement $n_{\nu+1}$ de façon que

$$c_{\nu+1} = \prod_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} k_n \geqslant \psi(n_\nu).$$

Cela est toujours possible, car le produit $\prod_{n=0}^{N} k_n$ croît indéfiniment avec N.

Détermination du nombre α: Nous allons construire une suite d'entiers $b_0, b_1, \ldots, b_\nu, \ldots$ par le procédé récurrent suivant: b_0 sera un entier contenu dans U_{n_0}. Soit $\varphi_\nu(v_\nu)$ la fonction inverse de $v_\nu(\alpha) = u_{n_\nu}(\alpha)$. Pour $\nu \geqslant 0$, $b_{\nu+1}$ sera l'entier qui vérifie les inégalités:

$$(1) \qquad -\frac{1}{2} < v_{\nu+1}(\varphi_\nu(b_\nu)) - b_{\nu+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Cette construction est possible, en effet supposons que b_ν soit dans U_{n_ν}, le nombre $\beta_\nu = \varphi_\nu(b_\nu)$ correspondant étant donc dans A_{n_ν}, nous montrerons qu'il en est encore de même pour l'indice $\nu+1$. D'autre part cette propriété a bien lieu pour $\nu = 0$. Comme:

$$\frac{1}{\gamma_{n_\nu}} - \frac{1}{\gamma_{n_{\nu+1}}} = \frac{c_{\nu+1}-1}{\gamma_{n_{\nu+1}}} \geqslant \frac{\psi(n_\nu)-1}{\gamma_{n_{\nu+1}}} > \frac{1}{\gamma_{n_{\nu+1}}}$$

l'intervalle $\beta_\nu - \frac{1}{\gamma_{n_{\nu+1}}}$, $\beta_\nu + \frac{1}{\gamma_{n_{\nu+1}}}$ est contenu dans $A_{n_{\nu+1}}$ et comme $|v'_{\nu+1}(\alpha)| \geqslant \gamma_{n_{\nu+1}}$, l'intervalle $v_{\nu+1}(\beta_\nu)-1$, $v_{\nu+1}(\beta_\nu)+1$ est contenu dans $U_{n_{\nu+1}}$ et par suite aussi le nombre $b_{\nu+1}$, ce qui démontre notre assertion.

Les nombres $\beta_\nu = \varphi_\nu(b_\nu)$ ainsi déterminés ont une limite α. En effet nous venons de voir que $\beta_{\nu+1}$ était dans l'intervalle $\beta_\nu - \frac{1}{\gamma_{n_{\nu+1}}}$, $\beta_\nu + \frac{1}{\gamma_{n_{\nu+1}}}$, donc

$$|\beta_{\nu+1} - \beta_\nu| \leqslant \frac{1}{\gamma_{n_{\nu+1}}} < \frac{1}{\gamma_{n_\nu}} - \frac{1}{\gamma_{n_{\nu+1}}}$$

et la dernière expression est le terme général d'une série convergente.

Cherchons enfin une borne supérieure de $|v_\nu(\alpha) - b_\nu|$. Comme $\lim\limits_{\mu=\infty} \beta_\mu = \alpha$ et que $v_\nu(\alpha)$ est continu, $\lim\limits_{\mu=\infty} v_\nu(\beta_\mu) = v_\nu(\alpha)$ et on peut écrire:

$$|v_\nu(\alpha) - b_\nu| = \left|\sum_{\mu=\nu}^{\infty} v_\nu(\beta_{\mu+1}) - v_\nu(\beta_\mu)\right| \leqslant \sum_{\mu=\nu}^{\infty} |v_\nu(\beta_{\mu+1}) - v_\nu(\beta_\mu)|.$$

Or si on pose $v_{\mu+1}(\beta_\mu) = b_{\mu+1} + \omega_{\mu+1}$, on a $|\omega_{\mu+1}| \leqslant \frac{1}{2}$ en vertu de la définition (1) de $b_{\mu+1}$ et par suite

$$|v_\nu(\beta_{\mu+1}) - v_\nu(\beta_\mu)| = |v_\nu(\varphi_{\mu+1}(b_{\mu+1})) - v_\nu(\varphi_{\mu+1}(b_{\mu+1}+\omega_{\mu+1}))| =$$
$$= |\omega_{\mu+1}|\,|v_\nu'|\,|\varphi'_{\mu+1}(\bar{b}_{\mu+1})|.$$

où $\bar{b}_{\mu+1}$ est compris entre $b_{\mu+1}$ et $b_{\mu+1}+\omega_{\mu+1}$ et où $v_\nu' = v_\nu'(\varphi_{\mu+1}(\bar{b}_{\mu+1}))$. Si $\bar{\beta}_{\mu+1} = \varphi_{\mu+1}(\bar{b}_{\mu+1})$, $\bar{\beta}_{\mu+1}$ sera compris entre β_μ et $\beta_{\mu+1}$ et on a:

$$|v_\nu(\beta_{\mu+1}) - v_\nu(\beta_\mu)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{|v_\nu'(\bar{\beta}_{\mu+1})|}{|v'_{\mu+1}(\bar{\beta}_{\mu+1})|} \leqslant \frac{1}{2\, c_{\nu+1}\, c_{\nu+2} \cdots c_{\mu+1}}.$$

Par suite

$$|v_\nu(\alpha) - b_\nu| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{c_{\nu+1}\, c_{\nu+2} \cdots c_\mu} \leqslant \frac{1}{c_{\nu+1}} \leqslant \frac{1}{\psi(n_\nu)},$$

car $c_\mu > 2$ et $c_{\nu+1} \geqslant \psi(n_\nu)$.

Les nombres α sont partout denses dans A car on peut prendre un intervalle arbitrairement petit dans A et lui faire jouer le rôle de A. Le théorème est démontré.

Application: Considérons la suite $u_n(\alpha) = \alpha\Theta^n$ où Θ est un nombre fixe supérieur à 1, l'intervalle A étant quelconque. Les conditions de l'énoncé sont vérifiées par les fonctions $u_n(\alpha)$, car $u_n'(\alpha) = \Theta^n$, donc $k_0 = 1$ et $k_n = \Theta$ si $n \geqslant 1$.

Prenons alors $\psi(n) = \Theta^{\varepsilon n}$, ε étant une constante positive arbitraire. Le théorème nous apprend qu'il y a une infinité partout dense de valeurs de α pour lesquelles

(2) $$|\alpha\Theta^n - a_n| \leqslant \Theta^{-\varepsilon n}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs n_ν de n. Ces valeurs n_ν vérifient la condition $\prod\limits_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} \Theta = \Theta^{n_{\nu+1}-n_\nu} \geqslant \Theta^{\varepsilon n_\nu}$ c'est à dire

$$n_{\nu+1} \geqq (1+\varepsilon)\, n_\nu.$$

En particulier nous avons une infinité partout dense de valeurs de α pour lesquelles

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} \quad \text{est bornée.}$$

Un récent théorème de M. Mahler[1]) nous apprend que si $\alpha \neq 0$ est algébrique et si $\frac{u}{v} > 1$ est une fraction irréductible avec $v \neq 1$, l'inégalité

(3) $$\left|\alpha\left(\frac{u}{v}\right)^n - a_n\right| \leqq u^{-\varepsilon n}$$

ne peut avoir une infinité de solutions n_ν que si $\limsup\limits_{\nu=\infty} \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} = \infty$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

[1]) Acta arithmetica T. 3 p. 89.

Or par la méthode précédente nous pouvons construire une infinité partout dense de valeurs de α pour lesquelles les nombres n_ν qui vérifient l'inégalité (3) sont tels que $\limsup_{\nu=\infty} \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}$ est bornée. Ces nombres α sont donc tous *transcendants.*

On peut traiter de façon analogue la suite $u_n(\alpha) = \lambda\alpha^{n+1}$, où λ est fixe et où $\alpha \geqq \Theta > 1$, Θ étant un nombre fixe. Les conditions du théorème I sont encore remplies avec $k_0 = 1$, $k_n = \Theta$ pour $n \geqq 1$. Il y a donc une infinité partout dense de nombres $\alpha \geqq \Theta > 1$ pour lesquels l'inégalité

$$|\lambda\alpha^n - a_n| \leqq \Theta^{-\varepsilon n}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs n_ν de n, avec $n_{\nu+1} \geqq (1+\varepsilon)\, n_\nu$.

En particulier nous aurons une infinité de valeurs partout denses de $\alpha \geqq \Theta > 1$ pour lesquelles $\limsup_{\nu=\infty} \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}$ est bornée. Si λ est un nombre algébrique non nul, le même théorème de Mahler démontre que α est ou bien entier rationnel, ou est irrationnel.

Généralisation: La méthode employée dans ce cas particulier peut être généralisée de la manière suivante: Au lieu de nous borner à une suite unique $u_n(\alpha)$ on peut considérer simultanément r suites $u_{n,i}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, dépendant chacune des mêmes r paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Les conditions à imposer à ces r suites sont alors les suivantes:

Les fonctions $u_{n,i}$ possèdent des dérivées partielles continues par rapport aux paramètres quand ces derniers se trouvent dans une région A de l'espace R^r à r coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ et définissent une application topologique de A sur une région U_n.

Soient $f_{n,i}(u_{n,1}; u_{n,2}; \ldots; u_{n,r})$, $i = 1, 2, \ldots, r$ le système des r fonctions définissant l'application topologique de U_n sur U_{n+1} et considérons le système récurrent suivant:

$$x_{n,i} = \sum_{j=1}^{r} x_{n+1,j} \frac{\partial f_{n,j}(u_{n,1}; u_{n,2}; \ldots; u_{n,r})}{\partial u_{n,i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

où les $u_{n,1}; u_{n,2}; \ldots; u_{n,r}$, quel que soit n, sont les transformés d'un même point $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ de A. Posons

$$\xi_{n,j}(m) = |x_{n,1}| + |x_{n,2}| + \ldots + |x_{n,r}|$$

quand les valeurs initiales du système (4) sont $x_{m,i} = 1$ si $i = j$ et $x_{m,i} = 0$ si $i \neq j$. Nous supposerons alors qu'il existe r séries de constantes positives $k_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, indépendantes du point α de A, avec

$$\lim_{N=\infty} \prod_{n=0}^{N} k_{n,j} = \infty$$

telles que

$$\xi_{n+1,j}(m) \geqq k_{n+1,j}\, \xi_{n,j}(m)$$

pour toute valeur de $m < n$.

Soient $\Psi_j(n)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, un système de r fonctions positives arbitrairement données. En commençant par un nombre n_0 convenable assez grand, nous déterminons de proche en proche n_ν, $\nu \geqq 1$ en exigeant que

$$\prod_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} k_{n,j} \geqq \Psi_j(n_\nu)$$

soit verifié simultanément pour $j = 1, 2, \ldots, r$.

Toutes ces conditions étant remplies, la méthode précédente généralisée convenablement[2]) permet de démontrer le théorème suivant:

Théorème II: *Il y a dans A une infinité partout dense de valeurs des r paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ telle que les r inégalités*

$$|u_{n,j}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) - a_{n,j}| \leqq \frac{1}{\Psi_j(n)} \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

soient simultanément vérifiées pour une infinité de valeurs n_ν de n.

(Reçu le 2 février 1939.)

[2]) On pourra se reporter à mon mémoire: La répartition modulo un et les nombres algébriques: Annali d. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa: Sér. II Vol. VII p. 209—217.