ÜBER DIE VERSCHIEDENEN KETTENBRUCHENTWICKLUNGEN BELIEBIGER REELLER ZAHLEN UND DIE PERIODISCHEN KETTENBRUCHENTWICKLUNGEN QUADRATISCHER IRRATIONALITÄTEN*).

(UNTERSUCHUNGEN ZUR THEORIE DER HALBREGELMÄSSIGEN KETTENBRUCHENTWICKLUNGEN I.)

VON

FRITZ BLUMER (Basel).

EINLEITUNG.

Die vorliegende Abhandlung stellt den ersten Teil einer Untersuchung über allgemeine Kettenbrüche dar, deren weitere Teile in den Commentarii Mathematici Helvetici erscheinen werden.

Es handelt sich dabei um die sog. *halbregelmässigen* Kettenbrüche, d. h. um Kettenbrüche mit ganzzahligen Nennern, bei denen aber die Zähler nicht wie bei den gewöhnlichen (oder *regelmässigen*) Kettenbrüchen durchwegs $+1$, sondern nach Belieben $+1$ oder -1 sein können. Solche halbregelmässige Kettenbrüche haben also die Gestalt

$$a_0 \pm \cfrac{1}{a_1 \pm \cfrac{1}{a_2 \pm \cfrac{1}{a_3 \pm \cdots}}}$$

Die Ausdrücke

$$\xi_n = a_n \pm \cfrac{1}{a_{n+1} \pm \cdots}$$

sind dabei die sog. *vollständigen Teilnenner* des obigen Kettenbruchs.

---

*) Diese Arbeit stellt den ersten Teil einer im Jahre 1937 von der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel angenommenen Dissertation dar.

Die Fragen nach der Güte der Approximation durch die Näherungsbrüche sowie nach dem Wachstum der Näherungsnenner werden im zweiten Teil behandelt werden. Die vorliegende Abhandlung ist dagegen vor allem nach zwei Fragestellungen orientiert:

1. Für welche Entwicklungsvorschriften ist die Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalität periodisch?

2. Für welche Entwicklungsvorschriften kommt die primitive Periode am kürzesten heraus?

Was die erste Fragestellung anbetrifft, so besagt unser Hauptergebnis, dass die Entwicklung einer quadratischen Irrationalität stets periodisch ist, wenn in jeder Relation $\xi_n = a_n \pm \frac{1}{\xi_{n+1}}$ der Wert von a_n und damit die Wahl des Vorzeichens einzig von der Grösse von ξ_n abhängt. Die Untersuchung der Frage, ob diese letzte Formulierung allgemein zutrifft oder nicht (Frage, die mir von Herrn Professor Ostrowski vorgelegt wurde), gab mir den ersten Anstoss zu den Untersuchungen, die in dieser und den folgenden Arbeiten niedergelegt sind. Das genannte Ergebnis nebst einigen naheliegenden Verallgemeinerungen enthält sämtliche bis jetzt behandelten Spezialfälle periodischer Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalitäten mit Ausnahme der Minkowskischen Diagonalkettenbrüche. Indessen lässt sich auch dieser Fall mit unsern Methoden einfach erledigen.

Was die zweite Fragestellung (auf die ich gleichfalls von Herrn Professor Ostrowski hingewiesen wurde) anbetrifft, so wird sie dahin beantwortet, dass die Periode der Kettenbruchentwicklungen einer quadratischen Irrationalität stets dann am kürzesten ist, wenn die Kettenbruchentwicklung *nach nächsten Ganzen* durchgeführt wird. Es kann aber in vielen Fällen eine Periode gleicher Kürze noch bei andern Entwicklungsvorschriften herauskommen, die wir sämtlich aufstellen werden.

Diese Ergebnisse werden im dritten Kapitel der vorliegenden Arbeit abgeleitet. Sie beruhen auf dem im zweiten Kapitel detailliert untersuchten Zusammenhang zwischen der Folge der vollständigen Teilnenner der gewöhnlichen (regelmässigen) Kettenbruchentwicklung einer reellen Zahl und den vollständigen Teilnennern in den verschiedenen halbregelmässigen Kettenbruchentwicklungen derselben Zahl. Die vollständigen Teilnenner ξ'_n einer halbregelmässigen Kettenbruchentwicklung von ξ_0 in ihrer natürlichen Reihenfolge können nämlich in Gruppen eingeteilt werden, so dass jede Gruppe zu einem bestimmten ξ_n der regelmässigen Entwicklung von ξ_0 gehört, das in einem bestimmten Zusammenhang zu den ξ_n' der Gruppe steht. Dabei sind die zugehörigen ξ_n nach wachsenden n geordnet, allerdings so, dass von zwei aufeinanderfolgenden ξ_n das eine übersprungen werden kann.

Was das erste Kapitel betrifft, so werden dort zunächst die wichtigsten Definitionen und einfachsten Eigenschaften der halbregelmässigen Kettenbruchentwicklungen und Kettenbrüche angegeben. Weiter findet man einen neuen Beweis für die Konvergenz der Näherungsbrüche und für die Tatsache, dass jeder halbregelmässige Kettenbruch die halbregelmässige Kettenbruchentwicklung des Grenzwertes $\lim \frac{P_n}{Q_n}$ der Näherungsbrüche, resp. des letzten Näherungsbruches ist, wobei allerdings die Tatsache, dass $Q_n \to \infty$ mit $n \to \infty$ gilt, benützt wird, obgleich diese Tatsache erst im dritten Teil unserer Untersuchung bewiesen wird.

Zur vorliegenden Arbeit wurde ich von Herrn Professor Ostrowski nicht bloss angeregt, sondern er unterstützte mich überdies sowohl bei ihrer Durchführung als auch bei ihrer endgültigen Darstellung in weitgehendem Masse. Es drängt mich deshalb, an dieser Stelle Herrn Professor Ostrowski für das starke Interesse, das er an der vorliegenden Arbeit im besondern wie an meinem Studium im allgemeinen nahm, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

LITERATUR.

Cahen, E. *Théorie des nombres*, 2. Bd., Paris 1924.

Charves, *Démonstration de la périodicité des fractions continues, engendrées par les racines d'une équation du deuxieme degré.* Bulletin des sciences mathématiques 1, première partie, 1877.

Humbert, G. *Sur la fraction continue de Stephen Smith.* Comptes Rendus Bd. 165, 1917.

Hurwitz, A. *Über eine besondere Art der Kettenbruchentwicklung reeller Grössen.* Acta mathematica 12, 1889 oder Mathematische Werke, 2. Bd.

Kronecker, L. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Leipzig 1901.

Lagrange, J. L. 1. *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques.* Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres (de Berlin) 24, 1770 oder Oeuvres, II.
2. *Additions aux éléments d'algèbre d'Euler,* 1798, Lagrange Oeuvres, VII, auch deutsch in Leonhardi Euleri opera omnia I sowie in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 103.

Mc. Kinney, Th. E., *Concerning a certain type of continued fractions depending on variable parameter.* American journal of mathematics, 29, 1907.

Minkowski, H. *Über die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen.* Mathematische Annalen 54, 1901 oder Gesammelte Abhandlungen 1. Bd.

Minnigerode, B. *Über eine neue Methode, die Pellsche Gleichung aufzulösen.* Nachr. Gött. Mathematisch-physikalische Klasse 1873.

Perron, O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen,* 2. Auflage Leipzig 1929.

Pipping, Nils. *Die Konvergenz der halbregelmässigen Kettenbrüche.* Acta Academiae Aboensis, Mathematica et Physica, 1922.

Smith, H. J. S. *Mémoire sur les équations modulaires.* R. Acad. dei Lincei 1877 und Collected Mathematical Papers II.

Tietze, H. *Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche.* Mathematische Annalen 70, 1911.

Vahlen, K. Th. *Über Näherungswerte und Kettenbrüche.* Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 115, 1875. (ausführlich referiert bei Bachmann, Niedere Zahlentheorie 1. Bd).

Die angeführten Bücher und Arbeiten zitieren wir später in der Regel einfach mit der Angabe des Namens des Verfassers.

I. ALLGEMEINES ZUR THEORIE DER HALBREGELMÄSSIGEN KETTENBRUCHENTWICKLUNGEN.

§ 1. DEFINITIONEN UND EINFACHSTE EIGENSCHAFTEN.

Unter einem *Kettenbruch* versteht man einen Ausdruck von der Form[1])

$$a_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{a_1 - \cfrac{\varepsilon_2}{a_2 - \cfrac{\varepsilon_3}{a_3 - \dots\dots,}}} \tag{1,0}$$

wo die $\varepsilon_n = \pm 1$ für $n = 1, 2, \dots$ sind. Wir wollen für einen solchen Kettenbruch eine von *Pringsheim*[2]) eingeführte bequemere Schreibweise benützen, nämlich

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \frac{\varepsilon_2 |}{| a_2} - \frac{\varepsilon_3 |}{| a_3} - \dots.$$

$\frac{\varepsilon_n}{a_n}$ heisst der *n-te Teilbruch* oder das *n-te Glied,* ferner ε_n der *n-te Teilzähler,* a_n der *n-te Teilnenner.* Ist die Anzahl der Glieder endlich, so haben wir einen *endlichen,* ist sie unendlich, so haben wir einen *unendlichen Kettenbruch* vor uns.

Zu einem solchen Kettenbruch können wir z. B. auf folgende Weise kommen. Gegeben sei eine reelle Zahl ξ. Wir setzen $\xi = \xi_0 = a_0 - \frac{\varepsilon_1}{\xi_1}$, $\xi_1 = a_1 - \frac{\varepsilon_2}{\xi_2}$, allgemein

$$\xi_n = a_n - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\xi_{n+1}}, \tag{1,1}$$

wo $n = 0, 1, 2, \dots$ und $\varepsilon_n = \pm 1$ ist. Dabei ist ε_n $(n \geqq 1)$ jedesmal so zu wählen, dass ξ_n positiv wird[3]). Dieses Verfahren denken wir uns unendlich oft fortgesetzt, wobei, falls $\xi_n = a_n$ wird, mit diesem a_n abgebrochen wird. Damit ist dann der Kettenbruch

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \frac{\varepsilon_2 |}{| a_2} - \dots$$

bzw. der abbrechende Kettenbruch

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \frac{\varepsilon_2 |}{| a_2} - \dots - \frac{\varepsilon_n |}{| a_n},$$

festgelegt, den wir als eine „Kettenbruchentwicklung" der Zahl ξ auffassen können. Wir werden ξ_n den *n-ten vollständigen Teilnenner,* $r_n = \frac{1}{\xi_n}$ den *n-ten Rest* der betreffenden Kettenbruchentwicklung nennen.

Um zu den sogenannten *halbregelmässigen Kettenbruchentwicklungen* zu gelangen, müssen wir die a_n den folgenden Einschränkungen unterwerfen: es seien die a_n $(n \geqq 0)$ ganze Zahlen und die $\xi_n = \frac{1}{r_n} \geqq 1$ $(n \geqq 1)$. Es läuft dies darauf hinaus, dass man bei nichtganzzahligem ξ_n für a_n eine

1) Üblicher ist die Schreibweise mit durchgehenden Pluszeichen. Man erhält unsere Schreibweise, indem man in allen wie gewöhnlich geschriebenen Kettenbrüchen alle ε_n mit -1 multipliziert. Unsere Schreibweise dürfte für die detaillierte Untersuchung bequemer sein.

2) Nach Perron, S. 4.

3) Dadurch ist offenbar die Folge der ε_n eindeutig bestimmt, sobald die Folge der a_n gegeben ist.

der beiden ganzen Zahlen nimmt, zwischen denen ξ_n enthalten ist, bei ganzzahligem aber $a_n = \xi_n$ setzt.

Für eine halbregelmässige Kettenbruchentwicklung ergeben sich nun die folgenden Eigenschaften aus der oben angegebenen Definition:

A) a_n *ganz*, $\varepsilon_n = \pm 1$;

B) *für* $n \geqq 1$ $a_n \geqq 1$ *und* $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 1$;

C) *falls die Kettenbruchentwicklung endlich ist und ausser* a_0 *noch mindestens einen Teilnenner hat, so ist der letzte Teilnenner grösser als* 1; *falls die Kettenbruchentwicklung unendlich ist, ist unendlich oft* $a_n - \varepsilon_{n+1} \geqq 2$.

Die Eigenschaften A) und B) ergeben sich unmittelbar aus der Definition der halbregelmässigen Kettenbruchentwicklungen. Was die Eigenschaft C) betrifft, so sieht man sie folgendermassen ein: wenn die Kettenbruchentwicklung endlich ist, muss der letzte Teilnenner > 1 sein, weil sonst der letzte vollständige Teilnenner gleich 1 wäre; wenn die Kettenbruchentwicklung unendlich ist, kann nicht von einem Index an immer $a_n = 2$, $\varepsilon_{n+1} = +1$ sein, denn sonst müssten gleichzeitig die beiden sich widersprechenden Tatsachen gelten: für $n > N$ wäre erstens $\xi_n = 2 - \dfrac{1}{\xi_{n+1}} = 1 + \dfrac{\xi_{n+1} - 1}{\xi_{n+1}} < 1 + \xi_{n+1} - 1 = \xi_{n+1}$, also $\xi_{n+1} \uparrow$*) Ξ, wo $1 < \xi_n < \Xi \leqq 2$ ist, und zweitens wäre $\Xi = 2 - \dfrac{1}{\Xi}$, also $\Xi = 1$.

Wir wollen nun ganz allgemein einen (endlichen oder unendlichen) Kettenbruch, der die drei Eigenschaften A), B) und C) besitzt, einen *halbregelmässigen Kettenbruch* nennen. Wir werden später (§ 3) beweisen, dass jeder halbregelmässige Kettenbruch eine halbregelmässige Kettenbruchentwicklung einer gewissen und zwar *eindeutig bestimmbaren* Zahl darstellt.

Gilt insbesondere in einem halbregelmässigen Kettenbruch, bzw. in einer halbregelmässigen Kettenbruchentwicklung, immer $\varepsilon_n = -1$, dann heisst der Kettenbruch, bzw. die Kettenbruchentwicklung *regelmässig*.

Ferner nennen wir einen Kettenbruch, bzw. eine Kettenbruchentwicklung *periodisch*, wenn für alle $n \geqq N$ und für ein festes $k \geqq 1$ $a_{n+k} = a_n$ $\varepsilon_{n+k} = \varepsilon_n$ gilt. k bezeichnen wir als die *Länge der Periode*. An sich kann mit k auch $2k$, $3k$, ... als die Länge einer Periode angesehen werden. Eine Periode, deren Länge *nicht* als ein Vielfaches der Länge einer kürzern

*) Die Zeichen $\uparrow$ bzw. $\downarrow$ bedeuten die mit monotonem Wachsen bzw. monotonem Fallen verbundene Konvergenz.

Periode angesehen werden kann, wollen wir als eine *primitive Periode* bezeichnen.

Für die halbregelmässigen Kettenbruchentwicklungen gelten die beiden folgenden Tatsachen:

a) ξ_n liegt zwischen a_n und $a_n - \varepsilon_{n+1}$.

Diese Tatsache a) folgt sofort aus (1,1).

b) Für $n \geqq 0$ und nicht ganzzahliges ξ_n ist

(1,10)
$$a_n - \frac{1 + \varepsilon_{n+1}}{2} = [\xi_n].$$

Denn entwickeln wir ξ_n, so ist entweder $a_n = [\xi_n]$ und $\varepsilon_{n+1} = -1$ oder $a_n = [\xi_n] + 1$ und $\varepsilon_{n+1} = +1$. In beiden Fällen ist $a_n - \dfrac{1 + \varepsilon_{n+1}}{2} = [\xi_n]$.

Weiter definieren wir

(1,2)
$$P_{-1} = 1,\ P_0 = a_0,\ Q_{-1} = 0,\ Q_0 = 1$$

und berechnen daraus der Reihe nach P_1, Q_1, P_2, Q_2, usw. nach den Formeln

(1,3)
$$P_n = a_n P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2}.$$

Dann heisst $N_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ *der n-te Näherungsbruch des Kettenbruchs*, P_n *der n-te Näherungszähler und* Q_n *der n-te Näherungsnenner*. Für diese P_n und Q_n gelten bekanntlich folgende Beziehungen:

(1,4)
$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \delta_n \text{ [4]} \qquad \text{oder}$$
$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\delta_n}{Q_n Q_{n-1}},$$

wo $\delta_n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = \pm 1$ ist;

(1,5)
$$P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n = a_n \delta_{n-1}. \text{ [5]}$$

[4]) Der einfache Beweis lautet unter Verwendung der Relationen (1,3) folgendermassen:
$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (a_n P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2}) Q_{n-1} - P_{n-1} (a_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2}) =$$
$$= a_n P_{n-1} Q_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2} Q_{n-1} - a_n P_{n-1} Q_{n-1} + \varepsilon_n P_{n-1} Q_{n-2} =$$
$$= \varepsilon_n (P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}) = \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \ldots \varepsilon_1.$$

[5]) Auch diese Tatsache lässt sich einfach unter Verwendung der Relationen (1,3) folgendermassen beweisen:
$$P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n = (a_n P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2}) Q_{n-2} - P_{n-2} (a_n Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2}) =$$
$$= a_n P_{n-1} Q_{n-2} - \varepsilon_n P_{n-2} Q_{n-2} - a_n P_{n-2} Q_{n-1} + \varepsilon_n P_{n-2} Q_{n-2} =$$
$$= a_n (P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}) = a_n \delta_{n-1}.$$

Schliesslich benötigen wir noch für $n \geqq 0$ die folgenden Grössen:

$$(1,6)\qquad P_n^* = (a_n - \varepsilon_{n+1})P_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2} = P_n - \varepsilon_{n+1} P_{n-1},$$

$$Q_n^* = (a_n - \varepsilon_{n+1})Q_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2} = Q_n - \varepsilon_{n+1} Q_{n-1}.$$

Endlich sei noch gezeigt, dass allgemein die Formel gilt

$$(1,7)\qquad P_n = a_0\, Q_n + R_n,$$

wo R_n ein ganzzahliges Polynom mit nicht negativen Koeffizienten in $a_1, \ldots, a_n$ ist, d. h. also a_0 *nicht* enthält. In der Tat genügt ja

$$R_n = P_n - a_0 Q_n$$

wegen (1,3) den Rekursionsformeln $R_n = a_n R_{n-1} - \varepsilon_n R_{n-2}$ für $n = 1, 2, \ldots$ und besitzt wegen (1,2) die Anfangswerte $R_{-1} = 1$ und $R_0 = 0$.

Die Formel (1,7) ist offenbar identisch mit der Behauptung

$$\frac{\partial P_n}{\partial a_0} = Q_n,$$

da ja Q_n wegen (1,2) von a_0 unabhängig ist.

Von nun an werden in der ganzen Arbeit nur halbregelmässige Kettenbrüche und halbregelmässige Kettenbruchentwicklungen untersucht.

§ 2. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN VOLLSTÄNDIGEN TEILNENNERN UND DEN NÄHERUNGSBRÜCHEN.

Bricht man den Kettenbruch (1,0) mit a_n ab, so erhält man den Ausdruck

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \frac{\varepsilon_2 |}{| a_2} - \cdots - \frac{\varepsilon_n |}{| a_n},$$

den wir in Beziehung zum n-ten Näherungsbruch setzen wollen. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst:

Satz I. Es sei $a_\nu \geqq 1$, $\varepsilon_\nu = \pm 1$ und $a_\nu - \varepsilon_{\nu+1} \geqq 1$ für $\nu \geqq 0$. Dann ist der Ausdruck

$$(2,1)\qquad a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \cdots - \frac{\varepsilon_{n-1} |}{| a_{n-1}} - \frac{\varepsilon_n |}{| x}$$

für jedes $x \geqq 1$ gleich

$$\frac{xP_{n-1} - \varepsilon_n P_{n-2}}{xQ_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2}}$$

und ist zugleich $\geqq 1$. Ferner ist der Nenner $xQ_{n-1} - \varepsilon_n Q_{n-2} \geqq 1$.

Erläuterung: Dabei ist unter dem Ausdruck (2,1) der Wert zu verstehen, den man erhält, wenn man (2,1) als einen „mehrstöckig geschriebenen" Bruch auffasst und diesen Bruch „von unten herauf" ausrechnet. Insbesondere ist im Satz zugleich die Behauptung enthalten, dass dieser „mehrstöckig geschriebene" Bruch wirklich „von unten herauf" gerechnet werden kann, d. h. dass die sich dabei ergebenden Nennerbrüche von Null verschieden sind.

Beweis: [6]) Wir wollen zunächst beweisen, dass in der Folge

$$x_1 = a_{n-1} - \frac{\varepsilon_n}{x},\quad x_2 = a_{n-2} - \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_1},\ \ldots,\ x_n = a_0 - \frac{\varepsilon_1}{x_{n-1}}$$

immer $x_i \geqq 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt. Da $x_0 = x \geqq 1$ ist, dürfen wir annehmen, es sei $x_{i-1} \geqq 1$. Dann ist aber $x_i = a_{n-i} - \frac{\varepsilon_{n-i+1}}{x_{i-1}} \geqq 1$, denn für $\varepsilon_{n-i+1} = -1$ ist dies sofort klar und für $\varepsilon_{n-i+1} = +1$ ergibt sich dies, wenn man berücksichtigt, dass in diesem Fall nach B) in § 1 $a_{n-i} \geqq 2$ ist. Damit ist gezeigt, dass (2,1) „von unten herauf" ausrechenbar ist und einen Wert $\geqq 1$ hat.

Was nun den Wert von (2,1) anbetrifft, so reduziert sich (2,1) für $n = 1$ auf $a_0 - \frac{\varepsilon_1}{x} = \frac{a_0 x - \varepsilon_1}{x} = \frac{xP_0 - \varepsilon_1 P_{-1}}{xQ_0 - \varepsilon_1 Q_{-1}}$, und hier ist der Nenner $xQ_0 - \varepsilon_1 Q_{-1} = x$ für $x \geqq 1$ offenbar $\geqq 1$. Nehmen wir nun an, die Behauptung sei für $n-1$ wahr. Dann ersetzen wir in

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \cdots - \frac{\varepsilon_{n-1} |}{| x} = \frac{x P_{n-2} - \varepsilon_{n-1} P_{n-3}}{x Q_{n-2} - \varepsilon_{n-1} Q_{n-3}}$$

x durch $y = a_{n-1} - \frac{\varepsilon_n}{x}$ und erhalten

$$a_0 - \frac{\varepsilon_1 |}{| a_1} - \cdots - \frac{\varepsilon_{n-1} |}{| a_{n-1}} - \frac{\varepsilon_n |}{| x} = \frac{\left(a_{n-1} - \frac{\varepsilon_n}{x}\right) P_{n-2} - \varepsilon_{n-1} P_{n-3}}{\left(a_{n-1} - \frac{\varepsilon_n}{x}\right) Q_{n-2} - \varepsilon_{n-1} Q_{n-3}};$$

dabei ist der Nenner immer noch $\geqq 1$, da ja nach dem vorhin Ausgeführten $y = a_{n-1} - \frac{\varepsilon_n}{x} \geqq 1$ für $x \geqq 1$ ist. Erweitern wir den Bruch mit x, was erlaubt ist, da $x \geqq 1$ ist, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (1,3)

[6]) Es sei insbesondere hervorgehoben, dass wir in diesem Paragraphen keinen Gebrauch von der Ganzzahligkeit der a_n machen werden.

$$\frac{(a_{n-1}x-\varepsilon_n)\,P_{n-2}-\varepsilon_{n-1}\,x\,P_{n-3}}{(a_{n-1}x-\varepsilon_n)\,Q_{n-2}-\varepsilon_{n-1}\,x\,Q_{n-3}}=\frac{x\,(a_{n-1}P_{n-2}-\varepsilon_{n-1}P_{n-3})-\varepsilon_n P_{n-2}}{x\,(a_{n-1}Q_{n-2}-\varepsilon_{n-1}Q_{n-3})-\varepsilon_n Q_{n-2}}$$
$$=\frac{x\,P_{n-1}-\varepsilon_n P_{n-2}}{x\,Q_{n-1}-\varepsilon_n Q_{n-2}},$$

wo also der Nenner erst recht $\geqq 1$ ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Da während der Ausrechnung von (2,1) a_0 für die Berechnung der einzelnen Nenner nicht herangezogen zu werden braucht, folgt aus Satz I offenbar, dass unter den allgemeinen Annahmen A), B) und C) des § 1 jeder Teilbruch $a_0-\frac{\varepsilon_1\,|}{|\,a_1}-\dots-\frac{\varepsilon_n\,|}{|\,a_n}$ „von unten herauf" ausgerechnet werden kann und wegen (1,7) den (jetzt auch ev. verschwindenden) Wert $\frac{a_n P_{n-1}-\varepsilon_n P_{n-2}}{a_n Q_{n-1}-\varepsilon_n Q_{n-2}}=\frac{P_n}{Q_n}$ hat und dass

a) $Q_n=a_n Q_{n-1}-\varepsilon_n Q_{n-2}\geqq 1$ für $n\geqq 1$ gilt.

Nun hängt aber Q_{n-1} und Q_{n-2} nur von $a_0, \dots, a_{n-1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ ab. Wendet man daher die Relation a) auf den halbregelmässigen Kettenbruch

$$a_0-\frac{\varepsilon_1\,|}{|\,a_1}-\dots-\frac{\varepsilon_{n-1}\,|}{|\,a_{n-1}}-\frac{\varepsilon_n\,|}{|\,1}-\frac{-1\,|}{|\,2}$$

an, so hat man $a_n=1$ und es ergibt sich ganz allgemein

b) $Q^*_{n-1}=Q_{n-1}-\varepsilon_n Q_{n-2}\geqq 1$ für $n\geqq 1$.

Ist $a_{n-1}\geqq 2$, dann muss die Ungleichung in b) auch für $\varepsilon_n=+1$ richtig bleiben, weil dann auch der Kettenbruch

$$a_0-\frac{\varepsilon_1\,|}{|\,a_1}-\dots-\frac{\varepsilon_{n-1}\,|}{|\,a_{n-1}}-\frac{1\,|}{|\,1}-\frac{-1\,|}{|\,2}$$

ein halbregelmässiger ist. Wir erhalten dann aus b):

c) Ist $a_{n-1}\geqq 2$, dann gilt $Q_{n-1}>Q_{n-2}$ für $n\geqq 2$.

Ist nun (1,0) eine halbregelmässige Kettenbruchentwicklung einer Zahl $\xi=\xi_0$ und gibt man in (2,1) x den Wert ξ_n, so erhalten wir

$$\xi_0=\frac{\xi_n P_{n-1}-\varepsilon_n P_{n-2}}{\xi_n Q_{n-1}-\varepsilon_n Q_{n-2}},\quad \xi_n Q_{n-1}-\varepsilon_n Q_{n-2}\geqq 1. \tag{2,2}$$

Aus (2,2) wollen wir noch ξ_n explizit ausrechnen, da wir diesen Ausdruck später gebrauchen werden. Es ist

$$\xi_0\,\xi_n\,Q_{n-1}-\varepsilon_n\,\xi_0\,Q_{n-2}=\xi_n P_{n-1}-\varepsilon_n P_{n-2}\quad\text{oder}$$
$$\xi_n\,(Q_{n-1}\,\xi_0-P_{n-1})=\varepsilon_n\,(Q_{n-2}\,\xi_0-P_{n-2}).$$

Nun ist $Q_{n-1}\xi_0-P_{n-1}\neq 0$, weil aus $Q_{n-1}\xi_0-P_{n-1}=0$ auch $Q_{n-2}\xi_0-P_{n-2}=0$ folgen würde und dann $Q_{n-1}P_{n-2}-Q_{n-2}P_{n-1}=0$ sein müsste, was (1,4) widerspricht. Also erhält man

$$\xi_n=\varepsilon_n\,\frac{\xi_0\,Q_{n-2}-P_{n-2}}{\xi_0\,Q_{n-1}-P_{n-1}}. \tag{2,3}$$

Aus (2,3) folgt, da $\xi_n>1$ ist, die von Lagrange herrührende Relation

$$|\,\xi_0\,Q_{n-1}-P_{n-1}|>|\,\xi_0\,Q_n-P_n\,|\quad\text{für } n\geqq 1. \tag{2,4}$$

§ 3. KONVERGENZ DER HALBREGELMÄSSIGEN KETTENBRÜCHE.[7]

Wir wollen in diesem Paragraphen nicht nur die Konvergenz der halbregelmässigen Kettenbrüche beweisen, sondern auch, dass *jeder endliche halbregelmässige Kettenbruch die halbregelmässige Kettenbruchentwicklung des letzten Näherungsbruches* $\frac{P_n}{Q_n}$ *und jeder unendliche halbregelmässige Kettenbruch die halbregelmässige Kettenbruchentwicklung von* $\xi_0=\lim\frac{P_n}{Q_n}$ *ist.* Dass dieser Grenzwert vorhanden ist, wird sich dabei aus der Tatsache ergeben, dass $Q_n\to\infty$ gilt, die zwar erst in Kapitel I des dritten Teiles, aber ohne Benützung des Inhalts der vorangehenden Paragraphen, bewiesen wird.

Ist der unendliche halbregelmässige Kettenbruch dadurch entstanden, dass man eine Zahl ξ_0 halbregelmässig entwickelt hat, dann ist der Beweis der Konvergenz der Näherungsbrüche besonders einfach zu erbringen. Er folgt nämlich sofort aus (2,4) und aus der Tatsache, dass $Q_n\to\infty$ gilt. Übrigens werden wir für diesen Fall in § 2 des zweiten Teils einen zweiten Beweis der Konvergenz erbringen, der die Tatsache, dass $Q_n\to\infty$ gilt, nicht benötigt.

Haben wir dagegen einen a priori gegebenen unendlichen Kettenbruch vor uns, so ist die Konvergenz der Näherungsbrüche nicht so einfach zu zeigen. Um die Konvergenz in diesem Fall zu beweisen, leiten wir zunächst den folgenden Satz her:

[7]) Auch in diesem Paragraphen machen wir keinen Gebrauch von der Ganzzahligkeit der a_n. Da wir später in Kapitel I des dritten Teiles die Tatsache, dass $Q_n\to\infty$ mit $n\to\infty$ gilt, für beliebige reelle $a_n\geqq 1$ beweisen, so folgt also aus den Überlegungen dieses Paragraphen auch die Konvergenz der sog. *T*-Kettenbrüche (siehe Kapitel I des dritten Teils). Die Konvergenz der *T*-Kettenbrüche wurde schon früher auf anderem Wege von Tietze und von Perron (S. 149) bewiesen.

Satz II: Betrachtet man die Intervalle I_n, die jeweils begrenzt sind durch $\frac{P_n}{Q_n}$ und $\frac{P_n^*}{Q_n^*}$, so ist das Intervall I_n für jedes $n > 0$ im Intervall I_{n-1} enthalten und für einen unendlichen Kettenbruch konvergiert die Länge der Intervalle I_n gegen o.

Beweis: Wir beweisen den Satz II, indem wir zeigen, dass erstens $\frac{P_n^*}{Q_n^*}$, $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ und $\frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*}$ auf der gleichen Seite von $\frac{P_n}{Q_n}$ und zweitens $\frac{P_n}{Q_n}$, $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ und $\frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*}$ auf der gleiche Seite von $\frac{P_n^*}{Q_n^*}$ liegen, wobei $\frac{P_n^*}{Q_n^*}$ mit $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ oder mit $\frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*}$ zusammenfallen kann. Durch eine einfache Rechnung findet man unter Berücksichtigung von (1,3), (1,4), (1,5) und (1,6)

$$(3,1) \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{-\delta_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}$$

$$(3,2) \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n^*}{Q_n^*} = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n - \varepsilon_{n+1} P_{n-1}}{Q_n - \varepsilon_{n+1} Q_{n-1}} =$$

$$= \frac{P_n Q_n - \varepsilon_{n+1} P_n Q_{n-1} - P_n Q_n + \varepsilon_{n+1} P_{n-1} Q_n}{Q_n Q_n^*} = \frac{-\delta_{n+1}}{Q_n Q_n^*}$$

$$(3,3) \qquad \frac{P_n^*}{Q_n^*} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n - \varepsilon_{n+1} P_{n-1}}{Q_n - \varepsilon_{n+1} Q_{n-1}} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} =$$

$$= \frac{P_n Q_{n+1} - \varepsilon_{n+1} P_{n-1} Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n + \varepsilon_{n+1} P_{n+1} Q_{n-1}}{Q_n^* Q_{n+1}} =$$

$$= \frac{\delta_{n+1}(a_{n+1} - 1)}{Q_n^* Q_{n+1}}.$$

Da nun $\frac{P_n}{Q_n}$ und $\frac{P_n^*}{Q_n^*}$ nicht von a_{n+1} abhängen, so erhält man den Wert für $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*}$ einfach aus (3,1) und den Wert für $\frac{P_n^*}{Q_n^*} - \frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*}$ aus (3,3), indem man in diesen Ausdrücken überall an Stelle von a_{n+1} $a_{n+1} - \varepsilon_{n+2}$ setzt. Damit finden wir

$$(3,4) \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*} = \frac{-\delta_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}^*}$$

$$(3,5) \qquad \frac{P_n^*}{Q_n^*} - \frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*} = \frac{\delta_{n+1}(a_{n+1} - \varepsilon_{n+2} - 1)}{Q_n^* Q_{n+1}^*}.$$

Da nun nach § 2a), (1,2) und § 2b) für $\nu \geqq o$ sowohl $Q_\nu \geqq 1$ wie $Q_\nu^* \geqq 1$ und nach B) in § 1 für $\nu \geqq 1$ $a_\nu \geqq 1$ und $a_\nu - \varepsilon_{\nu+1} \geqq 1$ ist, so gilt also

$$\text{sign}\left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n^*}{Q_n^*}\right) = \text{sign}\left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right) = \text{sign}\left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*}\right) = -\delta_{n+1} \text{ und}$$

$$\text{sign}\left(\frac{P_n^*}{Q_n^*} - \frac{P_n}{Q_n}\right) = \text{sign}\left(\frac{P_n^*}{Q_n^*} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right) = \text{sign}\left(\frac{P_n^*}{Q_n^*} - \frac{P_{n+1}^*}{Q_{n+1}^*}\right) = \delta_{n+1}, \text{ wobei}$$

die beiden letzten Klammerausdrücke auch verschwinden können. Aus diesen Tatsachen folgt, dass das Intervall I_{n+1} innerhalb des Intervalles I_n liegt, allerdings unter Umständen so, dass die beiden Intervalle I_n und I_{n+1} den einen Endpunkt $\left(\frac{P_n^*}{Q_n^*}\right)$ gemeinsam haben.

Nun müssen wir noch zeigen, dass für einen unendlichen Kettenbruch die Länge der Intervalle I_n gegen Null konvergiert. Das folgt aber sofort aus (3,2), § 2b) und der noch zu beweisenden Tatsache, dass $Q_n \to \infty$ gilt, denn danach ist

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n^*}{Q_n^*}\right| = \frac{1}{Q_n Q_n^*} < \frac{1}{Q_n} \to 0.$$

Damit ist also Satz II bewiesen.

Wir beweisen nun den

Satz III: Die Näherungsbrüche eines *a priori* gegebenen unendlichen halbregelmässigen Kettenbruchs konvergieren gegen einen Wert η und der Kettenbruch stellt eine halbregelmässige Kettenbruchentwicklung dieser Zahl η dar. Ist der a priori gegebene Kettenbruch endlich, so stellt er eine halbregelmässige Kettenbruchentwicklung des letzten Näherungsbruches $\frac{P_N}{Q_N}$ dar.[8])

Beweis: Aus Satz II folgt sofort, dass die Näherungsbrüche $\frac{P_n}{Q_n}$ eines

[8]) Diesen Satz hat schon Tietze geometrisch und Perron (S. 149 ff) analytisch, indessen auf andere Weise als wir, bewiesen. Nur die Konvergenz der Näherungsbrüche hat schon Lagrange (2), allerdings nicht ganz lückenlos, und später Pipping bewiesen.

unendlichen Kettenbruches gegen eine Zahl η konvergieren, wobei η durch die in Satz II angegebene Intervallschachtelung definiert werden kann.

Nun zeigen wir, dass unser gegebener Kettenbruch $a_0 - \frac{\varepsilon_1|}{|a_1} - \frac{\varepsilon_2|}{|a_2} - \ldots$, wenn er *unendlich* ist, eine halbregelmässige Entwicklung der Zahl η, wenn er *endlich* ist, diejenige des letzten Näherungsbruches $\frac{P_N}{Q_N}$ darstellt. Zu diesem Zweck wählen wir $\xi_0 = \eta$, bzw. $\xi_0 = \frac{P_N}{Q_N}$ und entwickeln dieses ξ_0 derart in einen halbregelmässigen Kettenbruch $a_0' - \frac{\varepsilon_1'|}{|a_1'} - \frac{\varepsilon_2'|}{|a_2'} - \ldots$, dass für $\nu > 0$ $\varepsilon_\nu' = \varepsilon_\nu$ ist. Wir weisen nun nach, dass dann für $\nu \geqq 0$ auch $a_\nu' = a_\nu$ gilt. Für $n = 0$ gilt diese Behauptung, da nach Satz II sowohl η, wie $\frac{P_N}{Q_N}$ zwischen $\frac{P_0}{Q_0} = a_0$ und $\frac{P_0^*}{Q_0^*} = a_0 - \varepsilon_1$ liegen. Wenn wir also $\varepsilon_1' = \varepsilon_1$ wählen, so ist $a_0' = a_0$. Wir nehmen nun an, unsere Behauptung sei für $0 \leqq \nu \leqq n-1$ richtig, d. h. für $0 \leqq \nu \leqq n-1$ gelte $a_\nu' = a_\nu$. Bezeichnen wir die Näherungsbrüche der Entwicklung $a_0' - \frac{\varepsilon_1'|}{|a_1'} - \ldots$ mit $\frac{P_\nu'}{Q_\nu'}$ und die vollständigen Teilnenner mit ξ_ν', dann gilt also für $\nu \leqq n-1$ $P_\nu' = P_\nu$ und $Q_\nu' = Q_\nu$. Nach (2,3) ist nun $\xi_n' = \varepsilon_n' \frac{\xi_0 Q'_{n-2} - P'_{n-2}}{\xi_0 Q'_{n-1} - P'_{n-1}}$ oder also $\xi_n' = \varepsilon_n \frac{\xi_0 Q_{n-2} - P_{n-2}}{\xi_0 Q_{n-1} - P_{n-1}}$, wobei die rechte Seite, als Funktion von ξ_0 betrachtet, in jedem ξ_0—Intervall, das $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ nicht in seinem Innern enthält, monoton ist. Da nun aber nach Satz II η, bzw. $\frac{P_N}{Q_N}$ gleich einer Zahl aus dem in jenem Satz definierten abgeschlossenen Intervall I_n ist und da wiederum nach Satz II das Intervall I_n den Wert $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ nicht in seinem Innern enthalten kann, so ist ξ_n' gleich einer Zahl aus dem abgeschlossenen, endlichen Intervall, das begrenzt ist durch

$$A = \varepsilon_n \frac{\frac{P_n}{Q_n} Q_{n-2} - P_{n-2}}{\frac{P_n}{Q_n} Q_{n-1} - P_{n-1}} \quad \text{und} \quad A^* = \varepsilon_n \frac{\frac{P_n^*}{Q_n^*} Q_{n-2} - P_{n-2}}{\frac{P_n^*}{Q_n^*} Q_{n-1} - P_{n-1}}.$$

Nun ist $A = \varepsilon_n \frac{P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n}{P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n}$, also nach (1,4) und (1,5) $A = \frac{\varepsilon_n a_n \delta_{n-1}}{\delta_n} = a_n$ und entsprechend $A^* = \varepsilon_n \frac{P_n^* Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n^*}{P_n^* Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n^*} = a_n - \varepsilon_{n+1}$, da man A^* einfach aus A erhält, wenn man a_n durch $a_n - \varepsilon_{n+1}$ ersetzt. Also liegt wirklich ξ_n' wie ξ_n zwischen a_n und $a_n - \varepsilon_{n+1}$. Wählt man also $\varepsilon'_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$, so ist $a_n' = a_n$, womit wir den Satz III bewiesen haben.

Wir bezeichnen nun bei einem endlichen Kettenbruch den letzten Näherungsbruch $\frac{P_N}{Q_N}$ und bei einem unendlichen Kettenbruch den Grenzwert η der Näherungsbrüche als den *Wert des betreffenden Kettenbruchs.*

II. ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN VERSCHIEDENEN KETTENBRUCHENTWICKLUNGEN EINER ZAHL ξ_0.

§ 4. DEFINITIONEN.

Es sei $\xi > 1$. Ist nun ξ *nicht ganzzahlig*, so bilden wir mit diesem ξ die folgenden Werte: $\xi + 1, \xi, \xi - 1, \ldots, \xi - [\xi] + 1, \frac{\xi}{\xi - 1}, \frac{\xi - 1}{\xi - 2}, \ldots, \frac{\xi - [\xi] + 2}{\xi - [\xi] + 1}$, und bezeichnen die Gesamtheit dieser Werte als *die Klasse* A_ξ *der aus* ξ *abgeleiteten Werte.* Ist aber ξ *ganzzahlig*, so enthalte die zu einem solchen ξ gehörige Klasse A_ξ die entsprechend gebildeten Werte wie im Fall eines nicht ganzzahligen ξ mit Ausnahme des Wertes $\xi - [\xi] + 1 = 1$. Die Werte $\xi - a$ für $a = -1, 0, 1, \ldots, [\xi] - 1$, resp. für $a = -1, 0, 1, \ldots, \xi - 2$ nennen wir die *formal ganzen Werte von* A_ξ und die Werte $\frac{\xi - b}{\xi - b - 1}$ für $b = 0, 1, \ldots, [\xi] - 2$ *die formal gebrochenen Werte von* A_ξ. Die Werte $\xi, \xi + 1$ und $\frac{\xi}{\xi - 1}$ wollen wir *als die Hauptwerte von* A_ξ bezeichnen und zwar ξ und $\frac{\xi}{\xi - 1}$ speziell als *die Hauptwerte erster Art* und $\xi + 1$ als *den Hauptwert zweiter Art.* Man beachte, dass A_ξ nur für $\xi \geqq 2$ formal gebrochene Werte enthält. Da die Werte $\xi - a$, resp. $\frac{\xi - b}{\xi - b - 1}$ in unserer Aufzählung der Werte von A_ξ nach a, resp. nach b

geordnet sind, so wollen wir $\xi-a$ als *den a-ten formal ganzen* und $\dfrac{\xi-b}{\xi-b-1}$ als *den b-ten formal gebrochenen Wert von* A_ξ bezeichnen.

Nun sind aber in der Aufzählung der Werte von A_ξ sowohl die formal ganzen wie auch die formal gebrochenen nicht nur nach a, resp. nach b geordnet, sondern gleichzeitig auch der Grösse nach; denn es gilt, wie man sofort einsieht:

a) Wächst a von -1 bis $[\xi]-1$, resp. bis $\xi-2$, so nimmt $\xi-a$ monoton von $\xi+1$ bis $\xi-[\xi]+1>1$, resp. bis $\xi-\xi+2=2$ ab; wächst b von o bis $[\xi]-2$, so wächst $\dfrac{\xi-b}{\xi-b-1}=1+\dfrac{1}{\xi-b-1}$ monoton von $\dfrac{\xi}{\xi-1}>1$ bis $\dfrac{\xi-[\xi]+2}{\xi-[\xi]+1}\leqq 2$. Insbesondere sei noch betont, dass unter den formal gebrochenen Werten nur der grösste ganzzahlig sein kann und zwar nur für ein ganzzahliges ξ. Für ein nicht ganzzahliges ξ enthält also A_ξ keine ganzzahligen Werte.

Aus der Definition der Klasse A_ξ ergibt sich weiter sofort:

b) Die Klasse A_ξ enthält höchstens $2[\xi]$ numerisch verschiedene Werte.

Damit ist schon angedeutet, dass nicht alle formalen Werte einer Klasse A_ξ von einander verschieden zu sein brauchen. In der Tat gilt:

c) In gewissen Klassen A_ξ sind formale Werte einander gleich, doch ist das nur möglich, indem der kleinste formal ganze Wert gleich einem formal gebrochenen Wert ist. Ist ξ *ganzzahlig*, dann ist immer der kleinste ($(\xi-2)$-te) formal ganze Wert gleich dem grössten ($(\xi-1)$-ten) formal gebrochenen Wert ($=2$). Ist ξ *nicht ganzzahlig*, so ist dann und nur dann ein formal ganzer gleich einem formal gebrochenen Wert, wenn $\xi-[\xi]=x$ eine (zwischen 0 und 1 liegende) Wurzel der Gleichung

$$x^2+gx-1=0 \tag{4,1}$$

ist, wo $[\xi]-1\geqq g\geqq 1$ ist. In diesem Fall ist der $([\xi]-1)$-te (kleinste) formal ganze Wert gleich dem $([\xi]-g-1)$-ten formal gebrochenen Wert.

Beweis: Aus der in a) bewiesenen Monotonie der formal ganzen und

der formal gebrochenen Werte folgt sofort, dass weder 2 formal ganze noch 2 formal gebrochene Werte der gleichen Klasse A_ξ einander gleich sein können. Wir müssen also bloss untersuchen, ob es möglich ist, dass ein formal ganzer gleich einem formal gebrochenen Wert ist, dass also $\xi-a=$ $=\dfrac{\xi-b}{\xi-b-1}$ ist. Nach a) sind nun alle formal gebrochenen Werte $\leqq 2$, also muss auch $\xi-a\leqq 2$ sein, d. h. aber, wenn ξ nicht ganzzahlig ist, so muss $a=[\xi]-1$ sein, und wenn ξ ganzzahlig ist, so muss $a=\xi-2$ sein (da ja für ganzzahliges ξ der Wert $\xi-[\xi]+1=1$ nicht mehr in die Klasse A_ξ gehört).

In beiden Fällen ist $\xi-a-1\neq 0$. Rechnen wir aus $\xi-a=\dfrac{\xi-b}{\xi-b-1}$ b explizit aus, so erhalten wir

$$b=\xi-1-\frac{1}{\xi-a-1}. \tag{4,2}$$

Ist ξ ganzzahlig und $a=\xi-2$, dann ergibt sich aus (4,2) $b=\xi-2$, womit unsere Behauptung für ganzzahliges ξ bewiesen ist.

Ist nun aber ξ nicht ganzzahlig und $a=[\xi]-1$, so erhalten wir aus (4,2)

$$b+1-[\xi]=\xi-[\xi]-\frac{1}{\xi-[\xi]}. \tag{4,3}$$

Die linke Seite unserer Gleichung ist gleich einer ganzen Zahl $-g$, für die $1\leqq g\leqq[\xi]-1$ gilt. Schreiben wir $\xi-[\xi]=x$, so erhalten wir aus (4,3) $-g=x-\dfrac{1}{x}$, und daraus, da $x\neq 0$ ist, $x^2+gx-1=0$.

Umgekehrt, ist g eine beliebige ganze Zahl $\geqq 1$, k eine beliebige ganze Zahl $\geqq g+1$ und x die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel der Gleichung (4,1), so gilt für $\xi=k+x$ ($[\xi]=k$), dass der $([\xi]-1)$-te formal ganze gleich dem $([\xi]-g-1)$-ten formal gebrochenen Wert von A_ξ ist, womit unsere Behauptung auch für nicht ganzzahliges ξ bewiesen ist.

In diesem Kapitel müssen wir fortwährend die vollständigen Teilnenner der regelmässigen Entwicklung einer Zahl ξ_0 mit den vollständigen Teilnennern einer halbregelmässigen Entwicklung der gleichen Zahl ξ_0 vergleichen. Wir wollen nun im ganzen Kapitel die regelmässige Entwicklung von ξ_0 mit $a_0+\dfrac{1|}{|a_1}+\dfrac{1|}{|a_2}+\dots+\dfrac{1|}{|a_n}+\dots$ bezeichnen und die vollständigen Teilnenner dieser Entwicklung mit ξ_n. Eine halbregelmässige

Entwicklung von ξ_0 heisse $a_0' - \frac{\varepsilon_1' |}{| a_1'} - \frac{\varepsilon_2' |}{| a_2'} - \ldots - \frac{\varepsilon_n' |}{| a_n'} - \ldots$ und die vollständigen Teilnenner dieser Entwicklung nennen wir ξ_n'.

Die Gesamtheit der Werte aller A_{ξ_n} für $n \geqq 1$ wollen wir *den Vorrat* V_{ξ_0} *der zu* ξ_0 *gehörigen vollständigen Teilnenner* nennen.

Weiter wollen wir in einer halbregelmässigen Entwicklung diejenigen Indizes $n \geqq 2$ als *Hauptindizes der Entwicklung* bezeichnen, für die entweder $\varepsilon'_{n-1} = -1$ oder $\varepsilon'_{n-1} = +1$ und $\xi'_{n-1} > 2$ oder $\varepsilon_n' = +1$ und $\xi_n' > 2$ gilt. $n = 1$ sei immer ein Hauptindex und zwar der erste. Den ν-ten Hauptindex bezeichnen wir mit h_ν. Unter h_0 sei immer o verstanden. Gilt für einen Hauptindex h_ν mit $\nu \geqq 1$ $\varepsilon'_{h_\nu} = +1$ und $\xi'_{h_\nu} > 2$, so nennen wir dieses h_ν *einen Hauptindex zweiter Art*, sonst aber *einen Hauptindex erster Art*. Aus der Definition der Hauptindizes ergibt sich, dass der auf einen Hauptindex zweiter Art folgende Index wiederum ein Hauptindex (wenn auch nicht notwendig ein Hauptindex zweiter Art) ist. Da nach C) in § 1 in einem unendlichen Kettenbruch unendlich oft $a_n' - \varepsilon'_{n+1} \geqq 2$ ist, so ist in einem unendlichen Kettenbruch die Folge der Hauptindizes immer unendlich. Die Hauptindizes teilen die Folge aller Indizes in Gruppen ein, und zwar sollen die Indizes $h_\nu, h_\nu + 1, \ldots, h_{\nu+1} - 1$ *die Gruppe* G_ν bilden. Jede Gruppe G_ν enthält nach Definition mindestens einen Index, nämlich den Hauptindex h_ν, der aber auch der einzige Hauptindex von G_ν ist.

Um nun in einem a priori gegebenen Kettenbruch die Hauptindizes und ihre Art bequem feststellen zu können, ist es zweckmässig, in unserer Definition der Hauptindizes die Bedingung $\xi_m' > 2$ in einer andern Form zu schreiben, und zwar, wenn der Kettenbruch nicht mit dem Index m abbricht, nach § 1 b) als $a_m' - \frac{1 + \varepsilon'_{m+1}}{2} \geqq 2$ und, wenn der Kettenbruch mit m abbricht, als $a_m' \geqq 3$.

Weiter wollen wir ein ξ_ν mit $\nu \geqq 1$ der regelmässigen Entwicklung einer Zahl ξ_0, für das $\xi_\nu < 2$ gilt, als einen *minimalen VT-Wert* und eine Folge von solchen minimalen *VT*-Werten $\xi_\nu : \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+\mu_0}$, wo $\xi_{n+\mu_0+1} \geqq 2$ und für $n \geqq 2$ $\xi_{n-1} \geqq 2$ gilt, eine *Sequenz minimaler VT-Werte* nennen. Die Anzahl der Werte in einer Sequenz bezeichnen wir als die *Länge dieser Sequenz.*

§ 5. ÜBER DIE ENTWICKLUNGSMÖGLICHKEITEN VON ξ_n.

Zunächst soll betont werden, dass wenn man bei der Entwicklung einer Zahl ξ_0 zu einem ganzzahligen ξ_n' kommt, dann die Entwicklung mit diesem

ξ_n' abbricht. Überhaupt ist ein vollständiger Teilnenner dann und nur dann ganzzahlig, wenn er der letzte vollständige Teilnenner in einer endlichen Entwicklung ist.

Greifen wir nun irgend einen nicht ganzzahligen vollständigen Teilnenner ξ_n der regelmässigen Entwicklung von ξ_0 heraus, so kann man dieses ξ_n oder allgemein $\xi_n - a$ für $a = -1, 0, 1, \ldots, [\xi_n] - 1$ auf zwei verschiedene Arten halbregelmässig entwickeln, je nachdem man die eine oder die andere benachbarte ganze Zahl zu $\xi_n - a$ als Teilnenner nimmt. Nach Definition ist $\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}$, so dass $\xi_n - a$ zwischen $a_n - a$ und $a_n - a + 1$ liegt. Also findet man:

a) Die halbregelmässigen Entwicklungen von $\xi_n - a$, wo ξ_n nicht ganzzahlig, $a = -1, 0, 1, \ldots, [\xi_n] - 1$ und $n \geqq 0$ ist, beginnen entweder mit

(5,1) $$\xi_n - a = a_n - a + \frac{1}{\xi_{n+1}}$$

oder mit

(5,2) $$\xi_n - a = a_n - a + 1 - \cfrac{1}{\cfrac{\xi_{n+1}}{\xi_{n+1} - 1}},$$

wo für $[\xi_{n+1}] = 1$ $\quad \frac{\xi_{n+1}}{\xi_{n+1} - 1} = \xi_{n+2} + 1$ ist.

Ist nämlich $[\xi_{n+1}] = 1$, d. h. ist $\xi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\xi_{n+2}}$, so ist

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_{n+1} - 1} = \cfrac{1 + \cfrac{1}{\xi_{n+2}}}{\cfrac{1}{\xi_{n+2}}} = \xi_{n+2} + 1.$$

Aus a) und den Definitionen der Hauptindizes können wir sofort entnehmen:

Lemma 1. Entwickelt man den formal ganzen, aber nicht ganzzahligen Wert $\xi_n - a$ von A_ξ für $n \geqq 1$ halbregelmässig, so ist der nächste vollständige Teilnenner:

α) wenn der nächste Teilzähler -1 ist, gleich dem formal ganzen Hauptwert erster Art ξ_{n+1} von $A_{\xi_{n+1}}$,

β) wenn der nächste Teilzähler $+1$ und $\xi_{n+1} \geqq 2$ ist, gleich dem formal gebrochenen Hauptwert erster Art $\frac{\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}-1}(\leqq 2)$ von $A_{\xi_{n+1}}$,

γ) wenn der nächste Teilzähler $+1$ und $\xi_{n+1}<2$ ist, gleich dem Hauptwert zweiter Art $\xi_{n+2}+1$ (>2) von $A_{\xi_{n+2}}$.

Im Fall γ) ist der nächste Index ein Hauptindex zweiter Art, in den Fällen α) und β) dagegen sicher kein Hauptindex zweiter Art.

Im Fall (5,1) liegen nun für ξ_{n+1} die gleichen Entwicklungsmöglichkeiten vor wie für ξ_n. Anders liegt die Sache im Fall (5,2). Wir wollen aber statt die Entwicklungsmöglichkeiten eines Wertes von der Form $\frac{\xi_n}{\xi_n-1}$ näher zu studieren, einen allgemeinern Ausdruck untersuchen.

b) Es sei $\xi'=\frac{\xi_n-b}{\xi_n-b-1}$, wo $\xi_n\geqq 2$, $0\leqq b\leqq[\xi_n]-2$ und $n\geqq 1$ ist.

α) Ist ξ_n nicht ganzzahlig, dann kommen für die halbregelmässigen Entwicklungen von ξ' nur die beiden Ausdrücke

$$\xi'=1+\frac{1}{\xi_n-b-1} \quad \text{und} \quad \xi'=2-\frac{1}{\frac{\xi_n-b-1}{\xi_n-b-2}}$$

in Betracht.

Für $b=[\xi_n]-2$ können wir auch schreiben

$$\xi'=1+\frac{1}{\xi_n-[\xi_n]+1} \quad \text{und} \quad \xi'=2-\frac{1}{\xi_{n+1}+1}.$$

β) Ist ξ_n ganzzahlig, dann gelten für $0\leqq b\leqq\xi_n-3$ die gleichen Behauptungen wie in α). Für $b=\xi_n-2$ dagegen ist ξ' eine ganze Zahl $(=2)$ und kann also nicht weiter entwikkelt werden.

Beweis: Nach Annahme ist $\xi'=\frac{\xi_n-b}{\xi_n-b-1}=1+\frac{1}{\xi_n-b-1}$. Da nun $0\leqq b\leqq[\xi_n]-2$ ist, so ist $\xi_n-b-1>1$, d. h. $\xi'=1+\frac{1}{\xi_n-b-1}$ ist eine halbregelmässige Entwicklung von ξ'. Dann ist aber auch

$$\xi'=2-\left(1-\frac{1}{\xi_n-b-1}\right)=2-\frac{1}{\frac{\xi_n-b-1}{\xi_n-b-2}}$$

eine halbregelmässige Entwicklung von ξ', womit die erste Teilbehauptung von α bewiesen ist.

Ist nun $b=[\xi_n]-2$, dann findet man sofort $\xi_n-b-1=\xi_n-[\xi_n]+1$ und

$$\frac{\xi_n-b-1}{\xi_n-b-2}=\frac{\xi_n-[\xi_n]+1}{\xi_n-[\xi_n]}=\frac{\frac{1}{\xi_{n+1}}+1}{\frac{1}{\xi_{n+1}}}=1+\xi_{n+1},$$

womit wir auch die zweite Teilbehauptung von α) bewiesen haben.

Im Fall β) gelten für $0\leqq b\leqq[\xi_n]-3=\xi_n-3$ die Behauptungen von α), weil für solche b $1<\xi'=\frac{\xi_n-b}{\xi_n-b-1}=1+\frac{1}{\xi_n-b-1}\leqq 1+\frac{1}{2}$ ist, d. h. also ξ' nicht ganzzahlig ist. Für $b=\xi_n-2$ dagegen gilt $\xi'=2$, womit auch β) erledigt ist.

Aus b) und den Definitionen der Hauptindizes können wir nun weiter entnehmen:

Lemma 2. Entwickelt man den b-ten formal gebrochenen und nicht ganzzahligen Wert $\frac{\xi_n-b}{\xi_n-b-1}$ von A_{ξ_n} halbregelmässig, so ist der nächste vollständige Teilnenner,

α) wenn der nächste Teilzähler -1 ist, gleich dem $(b+1)$-ten formal ganzen Wert ξ_n-b-1 aus A_{ξ_n},

β) wenn der nächste Teilzähler $+1$ und gleichzeitig $\xi_n-b\geqq 3$ ist, gleich dem $(b+1)$-ten formal gebrochenen Wert $\frac{\xi_n-b-1}{\xi_n-b-2}$ $(\leqq 2)$ aus A_{ξ_n},

γ) wenn der nächste Teilzähler $+1$ und gleichzeitig $2<\xi_n-b<3$ ist ($\frac{\xi_n-b}{\xi_n-b-1}$ ist dann gleich dem grössten formal gebrochenen Wert von A_{ξ_n}), gleich dem formal ganzen Hauptwert zweiter Art $\xi_{n+1}+1(>2)$ aus $A_{\xi_{n+1}}$.

Im Fall γ) ist der nächste Index ein Hauptindex zweiter Art, in den Fällen α) und β) dagegen sicher kein Hauptindex zweiter Art.

Aus den Lemmata 1 und 2 folgt, dass, wenn wir einen nicht ganzzahligen Wert aus V_{ξ_0} halbregelmässig entwickeln, der nächste vollständige Teilnenner wiederum ein Wert aus V_{ξ_0} ist. Nun ist aber nach a) schon der erste vollständige Teilnenner in jeder halbregelmässigen Entwicklung von ξ_0 gleich einem Wert aus V_{ξ_0} (nämlich entweder gleich ξ_1 oder gleich $\frac{\xi_1}{\xi_1 - 1}$ ($\xi_1 \geqq 2$) oder gleich $\xi_2 + 1$). Also gilt:

Satz IV. Jeder vollständige Teilnenner ξ_n' jeder halbregelmässigen Entwicklung von ξ_0 ist gleich einem Wert aus dem Vorrat V_{ξ_0} [9]).

§ 6. DIE VERTEILUNG DER VOLLSTÄNDIGEN TEILNENNER INNERHALB VON V_{ξ_0}.

Ein vollständiger Teilnenner ξ_n' aus einer halbregelmässigen Entwicklung von ξ_0 könnte an sich seinem numerischen Werte nach in verschiedenen Klassen A_{ξ_n} enthalten sein und sogar in einer und derselben Klasse sowohl einem formal ganzen als einem formal gebrochenen Wert gleich sein. Wir werden nun mit Hilfe der folgenden Zuordnungsvorschrift die Stellung der ξ_n' in den einzelnen Klassen aus V_{ξ_0} festlegen.

Zuordnungsvorschrift:

A) Den Indizes einer bestimmten Gruppe G_ν werden Werte aus ein und derselben Klasse A_{ξ_n}, $n = N_\nu$, zugeordnet. Zu G_1 gehört, wenn $h_1 = 1$ ein Hauptindex zweiter Art ist, die Klasse A_{ξ_2}, sonst aber die Klasse A_{ξ_1}. Allgemein, wenn zur Gruppe G_ν für $\nu \geqq 1$ die Klasse A_{ξ_n} gehört, so gehört zur Gruppe $G_{\nu+1}$, wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und gleichzeitig $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$ ist, die Klasse $A_{\xi_{n+2}}$, sonst aber die Klasse $A_{\xi_{n+1}}$. Wir wollen im folgenden die auf diese Weise der Gruppe G_ν umkehrbar eindeutig zugeordnete Klasse $A_{\xi_n} = A_{\xi_{N_\nu}}$ mit $A^{(\nu)}$ bezeichnen. Unter N_0 sei immer 0 verstanden.

B) Dem Hauptindex h_ν wird ein Hauptwert von $A^{(\nu)}$ zugeordnet und zwar, wenn h_ν ein Hauptindex zweiter Art ist, der Hauptwert zweiter Art $\xi_{N_\nu} + 1$, dagegen wenn h_ν ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu} = -1$ ist, der formal ganze Hauptwert erster Art ξ_{N_ν}, und wenn h_ν ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu} = +1$ ist, der formal gebrochene Hauptwert erster Art $\frac{\xi_{N_\nu}}{\xi_{N_\nu} - 1}$.

C) Den übrigen Indizes der Gruppe G_ν ordnen wir folgende Werte von $A^{(\nu)}$ zu, wobei wir, wenn die Entwicklung von ξ_0 mit einem Index von G_ν überhaupt abbricht, unter $h_{\nu+1}$ den ersten in der Entwicklung nicht mehr vorkommenden Index verstehen wollen:

Zu $h_\nu + \mu$ für $1 \leqq \mu \leqq h_{\nu+1} - h_\nu - 2$ gehört der μ-te formal gebrochene Wert $\frac{\xi_{N_\nu} - \mu}{\xi_{N_\nu} - \mu - 1}$ von $A^{(\nu)}$ und zu $h_\nu + \mu_0$ für $\mu_0 = h_{\nu+1} - h_\nu - 1$ gehört, wenn $\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0} = -1$ der μ_0-te formal ganze Wert $\xi_{N_\nu} - \mu_0$ und, wenn $\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0} = +1$ ist, der μ_0-te formal gebrochene Wert $\frac{\xi_{N_\nu} - \mu_0}{\xi_{N_\nu} - \mu_0 - 1}$ aus $A^{(\nu)}$.

Erläuterung: Aus dem Beweis des Satzes V wird sich ergeben, dass diese Zuordnungsvorschrift eindeutig und immer durchführbar ist.

Damit kommen wir zum Hauptsatz dieses Kapitels:

Satz V A. Wird durch unsere Zuordnungsvorschrift dem Index m einer halbregelmässigen Entwicklung von ξ_0 der Wert ξ aus V_{ξ_0} zugeordnet, so gilt $\xi_m' = \xi$.

B. Für $\nu \geqq 0$ ist $N_{\nu+1} - N_\nu$ entweder gleich 1 oder gleich 2. $N_1 - N_0 = N_1 = 2$ gilt dann und nur dann, wenn h_1 ein Hauptindex zweiter Art ist. $N_{\nu+1} - N_\nu = 2$ für $\nu \geqq 1$ gilt dann und nur dann, wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und gleichzeitig $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$ ist. Wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art ist (es genügt schon: wenn $\varepsilon'_{h_{\nu+1}} = +1$ ist), so ist dann und nur dann $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$, wenn $\xi'_{h_{\nu+1}-1}$ ein formal ganzer Wert von $A^{(\nu)}$ ist. Ist $N_{\nu+1} - N_\nu = 2$ für $\nu \geqq 0$, so gilt für das übersprungene $\xi_{N_{\nu+1}} : \xi_{N_{\nu+1}} < 2.$ [10])

---

[9]) Mann kann sich leicht überzeugen, dass zu jedem Wert ξ von V_{ξ_0} mit Ausnahme von $\xi_1 + 1$ Entwicklungen angegeben werden können, in denen ein gewisses $\xi_\nu' = \xi$ ist.

[10]) Satz V A besagt einfach, dass unsere Zuordnungsvorschrift jedem Index den richtigen Wert als vollständigen Teilnenner zuordnet. Wir werden uns deshalb im Folgenden nicht erst auf Satz V A berufen, sondern direkt auf unsere Zuordnungsvorschrift.

Weiter ist in dem Satz V A ein Satz von Perron (S. 164) enthalten. Dieser Satz lautet in unsern Bezeichnungen: Es gelte für einem Index n einer halbregelmässigen Entwicklung von ξ_0

$$a_n' - \frac{1 + \varepsilon_n'}{2} - \frac{1 + \varepsilon'_{n+1}}{2} > 0.$$

Dann gilt α) für $\varepsilon_n = +1$ $\xi_n' - 1 = \xi_m$ und β) für $\varepsilon_n' = -1$ $\xi_n' + l - 1 = \xi_m$, wo l die kleinste positive Zahl ist, für die

$$a'_{n-l} - \frac{1 + \varepsilon'_{n-l}}{2} - \frac{1 + \varepsilon'_{n-l+1}}{2} > 0$$

gilt, und wo ξ_m ein vollständiger Teilnenner der regelmässigen Entwicklung von ξ_0 ist.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Satz V B. Die ersten 3 Teilbehauptungen können wir sofort aus unserem Zuordnungsprinzip entnehmen. Auf die vierte Teilbehauptung werden wir erst am Schluss des Beweises eingehen; dagegen die letzte Teilbehauptung wollen wir gleichzeitig mit dem Satz V A beweisen, indem wir zeigen, dass $\xi_1 < 2$ ist, wenn h_1 ein Hauptindex zweiter Art ist, und dass für $\nu \geqq 1$ $\xi_{N_\nu+1} < 2$ ist, wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und gleichzeitig $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} = 1$ ist.

Zunächst zeigen wir die Richtigkeit unseres Satzes V A für $\nu = h_1 = 1$. Nach § 5a) (§ 5a gilt ja auch für $n = 0$) muss man bei der Entwicklung von ξ_0 die 3 folgenden Fälle unterscheiden:

(6,1) $$\xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1}$$

(6,2) $\xi_1 \geqq 2$ $$\xi_0 = a_0 + 1 - \cfrac{1}{\cfrac{\xi_1}{\xi_1 - 1}}$$

(6,3) $\xi_1 < 2$ $$\xi_0 = a_0 + 1 - \frac{1}{\xi_2 + 1}.$$

Da im Fall (6,3) $\xi_2 + 1 > 2$ ist, so ist $n = 1$ ein Hauptindex zweiter Art und es ist, wie in B) angegeben ist, ξ_1' gleich einem Hauptwert zweiter Art und zwar wie A) verlangt, aus der Klasse A_{ξ_2}. In diesem Fall stimmt also auch

---

Wir wollen zeigen, wie der Satz von Perron aus Satz V A folgt. Der Ausdruck $a_\nu' - \frac{1+\varepsilon_\nu'}{2} - \frac{1+\varepsilon'_{\nu+1}}{2}$ ist entweder > 0 oder $= 0$, und zwar ist er nur gleich 0, wenn $\varepsilon_\nu' = +1$ und $a_\nu' - \frac{1+\varepsilon'_{\nu+1}}{2} = 1$ ist. Im Fall *a*) gilt nun $a_n' - \frac{1+\varepsilon_n'}{2} - \frac{1+\varepsilon'_{n+1}}{2} > 0$ und $\varepsilon_n' = +1$; also muss $a_n' - \frac{1+\varepsilon'_{n+1}}{2} \geqq 2$ oder nach (1,10) $\xi_n' > 2$ sein. Also ist im Fall α) n ein Hauptindex zweiter Art und also nach Satz V A $\xi_n' = \xi_N + 1$, womit im Fall α) die Perronsche Behauptung bewiesen ist.

Im Fall β) ist $\varepsilon_n' = -1$ und also nach Satz V A ξ_n' gleich einem bestimmten formal ganzen **W**ert aus einer bestimmten Klasse A_{ξ_N}. Weiter gilt im Fall β) für $\mu = 1, \ldots, l-1$ $a'_{n-\mu} - \frac{1+\varepsilon'_{n-\mu}}{2} - \frac{1+\varepsilon'_{n-\mu+1}}{2} = 0$ oder also $\varepsilon'_{n-\mu} = +1$ und $a'_{n-\mu} - \frac{1+\varepsilon'_{n-\mu+1}}{2} = 1$, was nach (1,10) gleichbedeutend ist mit $\varepsilon'_{n-\mu} = +1$ und $\xi'_{n-\mu} < 2$. Also sind die Indizes $n-\mu$ für $\mu = 1, \ldots, l-2$ keine Hauptindizes. Andrerseits ist $a'_{n-l} - \frac{1+\varepsilon'_{n-l}}{2} - \frac{1+\varepsilon'_{n-l+1}}{2} > 0$, also ist entweder $\varepsilon'_{n-l} = -1$ oder $\varepsilon'_{n-l} = +1$ und $a'_{n-l} - \frac{1+\varepsilon'_{n-l+1}}{2} \geqq 2$. In beiden Fällen ist $n-l+1$ ein Hauptindex. Die mit diesem Hauptindex beginnende Gruppe G_ν enthält also $n+1-(n-l+1) = l$ Indizes (denn, da $\varepsilon_n' = -1$ ist, ist n der letzte Index dieser Gruppe). Also ist nach Satz V A $\xi_n' = \xi_N - l + 1$ oder umgekehrt $\xi_n' + l - 1 = \xi_N$, womit auch die Behauptung β) aus Satz V A abgeleitet wurde.

die letzte Teilbehauptung von B. In den Fällen (6,1) und (6,2) ist $n = 1$ ein Hauptindex erster Art (im Fall (6,1), weil $\varepsilon_1' = -1$ ist, und im Fall (6,2), weil $\frac{\xi_1}{\xi_1 - 1} = 1 + \frac{1}{\xi_1 - 1} \leqq 2$ ist), und in diesen beiden Fällen ist ξ_1', wie in A) angegeben ist, gleich Hauptwerten erster Art aus A_{ξ_1} und zwar, wie B) verlangt, für $\varepsilon_1' = -1$ gleich dem formal ganzen und für $\varepsilon_1' = +1$ gleich dem formal gebrochenen. Damit haben wir die Richtigkeit unseres Satzes für $h_1 = 1$ bewiesen, d. h. wir haben bewiesen, dass in den 3 Fällen (6,1), (6,2) und (6,3) folgende Relationen gelten:

(6,1) Ist h_1 ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_1} = -1$, dann gilt $\xi'_{h_1} = \xi_1$.

(6,2) Ist h_1 ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_1} = +1$, dann gilt $\xi'_{h_1} = \frac{\xi_1}{\xi_1 - 1}$.

(6,3) Ist h_1 ein Hauptindex zweiter Art, dann gilt $\xi'_{h_1} = \xi_2 + 1$.

Auch haben wir gezeigt, dass die letzte Teilbehauptung von B für $h_1 = 1$ stimmt.

Wir nehmen nun an, dass h_ν für $\nu \geqq 1$ den folgenden 3 Beziehungen genügt:

(6,4) Ist h_ν ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu} = -1$, dann gilt $\xi'_{h_\nu} = \xi_{N_\nu}$.

(6,5) Ist h_ν ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu} = +1$, dann gilt
$$\xi'_{h_\nu} = \frac{\xi_{N_\nu}}{\xi_{N_\nu} - 1}.$$

(6,6) Ist h_ν ein Hauptindex zweiter Art, dann gilt $\xi'_{h_\nu} = \xi_{N_\nu} + 1$.

Dann beweisen wir, dass unser Satz auch für die übrigen Indizes von G_ν und für $h_{\nu+1}$ richtig ist, womit wir dann die Richtigkeit des Satzes V für alle Indizes bewiesen haben. Zu diesem Zweck müssen wir nun die 3 Fälle (6,4), (6,5) und (6,6) einzeln diskutieren, wobei wir in jedem Fall noch unterscheiden müssen, ob ξ_{N_ν} ganzzahlig oder nicht ganzzahlig ist.

a) *Diskussion der Fälle* (6,4) *und* (6,6):

Diese beiden Fälle können wir im grossen und ganzen zusammen behandeln, da in beiden Fällen ξ'_{h_ν} gleich einem formal ganzen Wert von $A^{(\nu)}$ ist.

Ist nun ξ_{N_ν} *ganzzahlig*, so sind wir in beiden Fällen mit der Diskussion schon fertig, da die Entwicklung mit dem Hauptindex h_ν abbricht. Die Behauptung A stimmt und die Behauptung B ist gegenstandslos.

Nehmen wir nun an, ξ_{N_ν} sei *nicht ganzzahlig*. In beiden Fällen enthält G_ν ausser h_ν keine weitern Indizes, denn im Fall (6,4) gilt $h_{\nu+1} = h_\nu + 1$ weil $\varepsilon'_{h_\nu} = -1$ ist, und im Fall (6,6), weil der auf einen Hauptindex zweiter

Art folgende Index wiederum ein Hauptindex ist. Um nun in diesen Fällen die Richtigkeit unseres Satzes für $h_{\nu+1}$ zu zeigen, müssen wir nach Lemma 1 3 Unterfälle unterscheiden:

α) wenn $\varepsilon'_{h_{\nu+1}}=-1$ ist, dann gilt $\xi'_{h_{\nu+1}}=\xi_{N_\nu+1}$;

β) wenn $\varepsilon'_{h_{\nu+1}}=+1$ und $\xi_{N_\nu+1}\geqq 2$ ist, dann gilt $\xi'_{h_{\nu+1}}=\dfrac{\xi_{N_\nu+1}}{\xi_{N_\nu+1}-1}$;

γ) wenn $\varepsilon'_{h_{\nu+1}}=+1$ und $\xi_{N_\nu+1}<2$ ist, dann gilt $\xi'_{h_{\nu+1}}=\xi_{N_\nu+2}+1$.

Dabei ist immer noch nach Lemma 1 im Unterfall γ) $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und in den Unterfällen α) und β) ein Hauptindex erster Art. Wir ersehen daraus sofort, dass die in B formulierte Zuordnung richtig ist. Wir müssen nun noch zeigen, dass auch die in A getroffene Zuordnung der Klasse $A^{(\nu+1)}$ zur Gruppe $G_{\nu+1}$ richtig war. Durch A wird, wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex erster Art ist, der Gruppe $G_{\nu+1}$ die Klasse $A_{\xi_{N_\nu+1}}$ zugeordnet, wie das in α) und β) der Fall ist. Es bleibt noch der Unterfall γ) näher zu untersuchen, und zwar müssen wir feststellen, ob $a'_{h_{\nu+1}-1}-\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}=1$ oder $\neq 1$ gilt. Da in den beiden Fallen (6,4) und (6,6) $h_{\nu+1}=h_\nu+1$ ist, so ist identisch $a'_{h_{\nu+1}-1}-\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}=a'_{h_\nu}-\varepsilon'_{h_\nu}$. Nun ist in beiden Fällen $a'_{h_\nu}-\varepsilon'_{h_\nu}\neq 1$, und zwar im Fall (6,4), weil $\varepsilon'_{h_\nu}=-1$ ist, und im Fall (6,6), weil aus $\xi'_{h_\nu}=\xi_{N_\nu}+1>2$ und $\varepsilon'_{h_{\nu+1}}=+1$ $a'_{h_\nu}\geqq 3$ folgt. Also stimmt auch im Unterfall γ) der durch A und B $h_{\nu+1}$ zugeordnete Wert mit $\xi'_{h_{\nu+1}}$ überein. Damit haben wir die Richtigkeit des Satzes V A in den Fällen (6,4) und (6,6) bewiesen.

Aber auch die letzte Teilbehauptung von B stimmt in diesen beiden Fällen (6,4) und (6,6). Denn nur im Unterfall γ) ist $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und gleichzeitig $a'_{h_{\nu+1}-1}-\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}\neq 1$. Im Unterfall γ) gilt aber nach der oben stehenden Definition des Unterfalles γ) wirklich $\xi_{N_{\nu+1}}<2$.

b) *Diskussion des Falles* (6,5):

Wir nehmen zuerst an, ξ_{N_ν} sei *ganzzahlig*. Nach § 5 b) und Lemma 2 sind 2 Unterfälle zu unterscheiden:

α) $\varepsilon'_{h_\nu+1}=\varepsilon'_{h_\nu+2}=\dots=\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0-1}=+1$ und

$\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0}=-1$ für $\mu_0\leqq\xi_{N_\nu}-2$;

β) $\varepsilon'_{h_\nu+1}=\varepsilon'_{h_\nu+2}=\dots=\varepsilon'_{h_\nu+\xi_{N_\nu}-2}=+1$.

Da nach § 4a) der grösste formal gebrochene Wert von $A^{(\nu)}$ der einzige formal gebrochene Wert ist, der für ganzzahliges ξ_{N_ν} ganzzahlig ist, so gilt

nach Lemma 2 im Unterfall α) $\xi'_{h_\nu+\mu}=\dfrac{\xi_{N_\nu}-\mu}{\xi_{N_\nu}-\mu-1}$ für $\mu=1,\dots,\mu_0-1$ und $\xi'_{h_\nu+\mu_0}=\xi_{N_\nu}-\mu_0$. Die Entwicklung bricht, da $\xi'_{h_\nu+\mu_0}$ ganzzahlig ist, mit dem Index $h_\nu+\mu_0$ ab. Im Unterfall β) gilt nach Lemma 2) $\xi'_{h_\nu+\mu}=\dfrac{\xi_{N_\nu}-\mu}{\xi_{N_\nu}-\mu-1}$ für $\mu=1,\dots,\xi_{N_\nu}-2$, wobei nach § 4a) der $(\xi_{N_\nu}-2)$-te formal gebrochene Wert von $A_{\xi_{N_\nu}}$ der einzige ganzzahlige formal gebrochene Wert von $A^{(\nu)}$ ist. Da nach § 4a) für $\mu\leqq\xi_{N_\nu}-3$ $\dfrac{\xi_{N_\nu}-\mu}{\xi_{N_\nu}-\mu-1}<2$ gilt, so ist in den beiden Unterfällen α) und β) keiner der auf h_ν folgenden Indizes ein Hauptindex. Wenn wir die oben angegebenen Werte für $\xi'_{h_\nu+\mu}$ in den beiden Fällen α) und β) mit den Werten vergleichen, die durch das Zuordnungsprinzip C den Indizes $h_\nu+\mu$ für $\mu\geqq 0$ zugeordnet werden, so sehen wir, dass die entsprechenden Werte übereinstimmen, womit die Richtigkeit des Satzes V A im Fall (6,5) mit ganzzahligem ξ_{N_ν} bewiesen ist.

Jetzt müssen wir noch den Fall (6,5) untersuchen, wenn ξ_{N_ν} *nicht ganzzahlig* ist. Auch hier müssen wir nach § 5d) die entsprechenden 2 Unterfälle betrachten wie oben:

γ) $\varepsilon'_{h_\nu+1}=\varepsilon'_{h_\nu+2}=\dots=\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0-1}=+1$ und $\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0}=-1$

für $\mu_0\leqq[\xi_{N_\nu}]-1$;

δ) $\varepsilon'_{h_\nu+1}=\varepsilon'_{h_\nu+2}=\dots=\varepsilon'_{h_\nu+[\xi_{N_\nu}]-1}=+1$.

Betrachten wir zunächst den Unterfall γ). Nach Lemma 2) ist für $1\leqq\mu\leqq\mu_0-1\leqq[\xi_{N_\nu}]-2$ $\xi'_{h_\nu+\mu}=\dfrac{\xi_{N_\nu}-\mu}{\xi_{N_\nu}-\mu-1}$. Diese Indizes $h_\nu+\mu$ sind nun aber sicher keine Hauptindizes; denn es sind nach Lemma 2 keine Hauptindizes zweiter Art, weil aus $\mu\leqq[\xi_{N_\nu}]-2$ $\xi_{N_\nu}-\mu>2$ und daraus $\xi'_{h_\nu+\mu}<2$ folgt; es sind aber auch keine Hauptindizes erster Art, weil nämlich $\varepsilon'_{h_\nu+\mu-1}=+1$ ist. Da nun $\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0}=-1$ ist, so ist nach Definition $h_\nu+\mu_0+1$ ein Hauptindex, und nach Lemma 2 gilt $\xi'_{h_\nu+\mu_0}=\xi_{N_\nu}-\mu_0$. Auch in diesem Unterfall γ) sieht man sofort ein, dass die berechneten Werte für $\xi'_{h_\nu+\mu}$ mit den Werten übereinstimmen, die durch die Zuordnungsvorschrift C den Indizes der Gruppe G_ν zugeordnet sind. Wir müssen nun in diesem Unterfall γ) noch zeigen, dass der Satz V auch noch für $h_{\nu+1}$ gilt. In Lemma 1 ist nun aber die Situation bei der Entwicklung eines formal ganzen Wertes detailliert angegeben, wobei wir in unserm Unterfall γ) Lemma 1 noch dahin ergänzen können, dass in den Fällen α) und β) von Lemma 1 der erste Index ein Hauptindex erster Art ist. Dann ergibt sich aber aus Lemma 1 sofort, dass die durch die Zuordnungsvorschrift B dem Hauptindex $h_{\nu+1}$ zugeordneten Werte wirklich mit dem tatsächlichen Wert von $\xi'_{h_{\nu+1}}$ übereinstimmen. Auch sehen wir, dass durch die Zuordnungsvorschrift A der Gruppe $G_{\nu+1}$ die richtige Klasse zugeordnet ist, wenn wir im Fall γ) von Lemma 1 noch beachten, dass $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$ ist, weil ja $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} = -1$ ist. Damit ist also die Richtigkeit des Satzes V A im Unterfall γ) bewiesen.

Nur im Fall γ) von Lemma 1 ist $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und gleichzeitig $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$. Es ist dann wirklich nach Definition des Falles γ) in Lemma 1 ($n = N_\nu$) $\xi_{N_\nu+1} < 2$, so dass auch in diesem Unterfall γ) die letzte Teilbehauptung von B gilt.

Damit kommen wir zum Unterfall δ), wo $\varepsilon'_{h_\nu+\mu} = +1$ für $\mu = 1, 2, \ldots, [\xi_{N_\nu}] - 1$ ist. Nach Lemma 2β) ist für $\mu \leqq [\xi_{N_\nu}] - 2$ $\xi'_{h_\nu+\mu} = \dfrac{\xi_{N_\nu} - \mu}{\xi_{N_\nu} - \mu - 1}$ und nach Lemma 2γ) ist für $\mu = [\xi_{N_\nu}] - 1$ $\xi'_{h_\nu+[\xi_{N_\nu}]-1} = \xi_{N_{\nu+1}} + 1$ und der Index $h_\nu + [\xi_{N_\nu}] - 1$ der erste Hauptindex nach h_ν und zwar ein Hauptindex zweiter Art. Wie wir sehen, ist auch in diesem Unterfall die Zuordnung der Werte zu den Indizes der Gruppe G_ν richtig gewählt worden, aber auch die Zuordnung des Wertes zu $h_{\nu+1}$ stimmt, denn in diesem Unterfall ist $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} = 1$, weil $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} = +1$ und $a'_{h_{\nu+1}-1} = 2$ ist, denn nach Lemma 2β) ist $\xi'_{h_{\nu+1}-1} < 2$ und $\varepsilon'_{h_{\nu+1}} = +1$. Da im Unterfall δ): $N_{\nu+1} - N_\nu = 1$ ist, so ist die letzte Teilbehauptung von B gegenstandslos. Damit ist also auch der Unterfall δ) erledigt.

Nun müssen wir noch die vierte Teilbehauptung von B beweisen. Diese sagt aus, dass, wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art ist, dann und nur dann $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$ ist, wenn $\xi'_{h_{\nu+1}-1}$ ein formal ganzer Wert ist. Wir zeigen zunächst, dass, wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$ ist, $\xi'_{h_{\nu+1}-1}$ ein formal ganzer Wert aus $A^{(\nu)}$ ist. Ist $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$, so ist also nicht gleichzeitig $a'_{h_{\nu+1}-1} = 2$ und $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} = +1$ oder, da ja $\varepsilon'_{h_{\nu+1}} = +1$ ist, nicht gleichzeitig $\xi'_{h_{\nu+1}-1} < 2$ und $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} = +1$. Also ist nach unserer Zuordnungsvorschrift und § 4a) $\xi'_{h_{\nu+1}-1}$ kein formal gebrochener Wert von $A^{(\nu)}$, sondern also ein formal ganzer Wert. Umgekehrt: ist $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und $\xi'_{h_{\nu+1}-1}$ ein formal ganzer Wert, so ist nach unserer Zuordnungsvorschrift $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} = +1$

nur dann, wenn $\xi'_{h_{\nu+1}-1} = \xi_{N_\nu} + 1 > 2$ ist. Also gilt $a'_{h_{\nu+1}-1} - \varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} \neq 1$. Damit ist auch die Behauptung B vollständig bewiesen.

Wir wollen noch einen Satz formulieren, der die wichtigsten noch nicht in die Sätze zusammengefassten Tatsachen von § 5 und § 6 enthält, so dass wir uns im Folgenden nur noch auf die Satzformulierungen und Lemmata von § 5 und § 6 mit Einschluss der Zuordnungsvorschrift berufen müssen.

Satz VI. A) Eine Entwicklung bricht dann und nur dann mit einer Gruppe G_ν ab, wenn ξ_{N_ν} ganzzahlig ist.

B α) Eine Gruppe G_ν besitzt dann und nur dann einen einzigen Index, nämlich den Hauptindex h_ν,

1. wenn h_ν ein Hauptindex zweiter Art ist, oder
2. wenn h_ν ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu} = -1$ ist, oder
3. wenn h_ν ein Hauptindex erster Art, $\varepsilon'_{h_\nu} = +1$ und $\xi_{N_\nu} = 2$ ist, oder
4. wenn h_ν ein Hauptindex erster Art, $\varepsilon'_{h_\nu} = +1$, $2 < \xi_{N_\nu} < 3$ und $\varepsilon'_{h_\nu+1} = +1$ ist.

β) Wenn G_ν mehr als einen Index enthält, so gilt:

β_1) Ist ξ_{N_ν} ganzzahlig, dann ist, wenn alle auf ε'_{h_ν} folgenden Teilzähler $+1$ sind, der Index $h_\nu + \xi_{N_\nu} - 2$ der letzte Index von G_ν; wenn aber $\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0}$ der erste auf ε'_{h_ν} folgende Teilzähler ist, der gleich -1 ist, dann ist der Index $h_\nu + \mu_0$ der letzte Index von G_ν und es gilt $\mu_0 \leqq \xi_{N_\nu} - 2$. G_ν enthält in diesem Fall maximal $\xi_{N_\nu} - 1$ Glieder, und die maximale Anzahl wird erreicht für $\varepsilon'_{h_\nu} = \varepsilon'_{h_\nu+1} = \ldots = \varepsilon'_{h_\nu+\xi_{N_\nu}-3} = +1$ und $\varepsilon'_{h_\nu+\xi_{N_\nu}-2} = \pm 1$.

β_2) Ist ξ_{N_ν} nicht ganzzahlig, so bricht die Gruppe G_ν, wenn kein Teilzähler unter den $[\xi_{N_\nu}] - 1$ auf ε'_{h_ν} ev. folgenden Teilzählern -1 ist, mit dem Index $h_\nu + [\xi_{N_\nu}] - 2$ ab und es ist $h_{\nu+1} = h_\nu + [\xi_{N_\nu}] - 1$ ein Hauptindex zweiter Art, andernfalls aber, wenn $\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0}$ der erste der $[\xi_{N_\nu}] - 1$ auf ε'_{h_ν} folgenden Teilzählern ist, der -1 ist, so bricht G_ν mit dem Index $h_\nu + \mu_0$ ab und es gilt $h_{\nu+1} = h_\nu + \mu_0 + 1 \leqq h_\nu + [\xi_{N_\nu}]$. In diesem Fall gilt also $h_{\nu+1} \leqq h_\nu + [\xi_{N_\nu}]$, wo das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\varepsilon'_{h_\nu} = \varepsilon'_{h_{\nu+1}} = \ldots = \varepsilon'_{h_\nu + [\xi_{N_\nu}] - 2} = +1$ und $\varepsilon'_{h_\nu + [\xi_{N_\nu}] - 1} = -1$ ist.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass für ein nicht ganzzahliges ξ_{N_ν} in der Entwicklung noch weitere Gruppen vorkommen. Ist nämlich ξ_{N_ν} nicht ganzzahlig, so ist nach § 4a) auch kein Wert von $A^{(\nu)}$ ganzzahlig, also auch nicht der vollständige Teilnenner, der nach unserer Zuordnungsvorschrift zum letzten Index der Gruppe G_ν gehört. Eine Entwicklung bricht aber nur mit einem ganzzahligen ξ'_n ab. Dass der letzte vollständige Teilnenner einer Gruppe G_ν, deren ξ_{N_ν} ganzzahlig ist, auch immer ganzzahlig ist, zeigen wir gleichzeitig mit dem Beweis der Behauptung B).

Die Behauptung B α) folgt in den beiden ersten Fällen sofort aus der Definition der Hauptindizes und der Zuordnungsvorschrift B. Die Ganzzahligkeit von ξ'_{h_ν} für ein ganzzahliges ξ_{N_ν} ist in diesen beiden Fällen sofort ersichtlich. Im dritten und vierten Fall ist h_ν ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu} = +1$; also ist nach der Zuordnungsvorschrift B $\xi'_{h_\nu} = \dfrac{\xi_{N_\nu}}{\xi_{N_\nu} - 1}$. Für $\xi_{N_\nu} = 2$ ist also $\xi'_{h_\nu} = 2$, d. h. die Entwicklung bricht, wie behauptet wurde, mit dem Index h_ν ab. Ist $2 < \xi_{N_\nu} < 3$, so ist ξ'_{h_ν} gleich dem grössten formal gebrochenen Wert von $A^{(\nu)}$, so dass man also für $\varepsilon'_{h_{\nu+1}} = +1$ nach Lemma 2) $h_\nu + 1 = h_{\nu+1}$ erhält. Damit ist also B α) und für G_ν mit nur einem einzigen Index auch A) bewiesen.

Die Behauptung B β_1) ergibt sich aus § 5b), Lemma 2 und der Zuordnungsvorschrift C. Aus Lemma 2 kann man ferner entnehmen, dass der vollständige Teilnenner, der zum letzten Index von G_ν gehört, entweder ein formal ganzer oder der grösste formal gebrochene Wert aus $A^{(\nu)}$ ist, also, da ja in B β_1) ξ_{N_ν} ganzzahlig ist, nach § 4a) ein ganzzahliger Wert ist. Die Behauptung B β_2) folgt aus Lemma 2, wenn wir noch berücksichtigen, dass für $\varepsilon'_{h_\nu + \mu_0} = -1$ nach Definition $h_\nu + \mu_0 + 1$ ein Hauptindex ist. Damit ist auch B β) und für Gruppen mit mehr als einem Index A) bewiesen.

Es dürfte ganz nützlich sein, die verschiedenen Entwicklungen, die innerhalb einer Gruppe G_ν möglich sind, einmal explizit hinzuschreiben. Wir wollen dabei nur den Fall mit nichtganzzahligem ξ_{N_ν} betrachten.

α) h_ν sei ein Hauptindex zweiter Art. Dann gilt:

$$\xi'_{h_\nu} = \xi_{N_\nu} + 1 = a_{N_\nu} + 1 + \frac{1}{\xi_{N_\nu+1}} \quad \text{oder}$$

$$= a_{N_\nu} + 2 - \cfrac{1}{\cfrac{\xi_{N_\nu+1}}{\xi_{N_\nu+1} - 1}} \text{ [11]}$$

β) h_ν sei ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu} = -1$. Dann gilt

$$\xi'_{h_\nu} = \xi_{N_\nu} = a_{N_\nu} + \frac{1}{\xi_{N_\nu+1}} \quad \text{oder}$$

$$= a_{N_\nu} + 1 - \cfrac{1}{\cfrac{\xi_{N_\nu+1}}{\xi_{N_\nu+1} - 1}} \text{ [11]}.$$

γ) h_ν sei ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu} = +1$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

$$\xi'_{h_\nu} = \frac{\xi_{N_\nu}}{\xi_{N_\nu} - 1} = 1 + \frac{1 \mid}{\mid a_{N_\nu} - 1} + \frac{1 \mid}{\mid \xi_{N_\nu+1}}$$

$$= 1 + \frac{1 \mid}{\mid a_{N_\nu}} - \frac{1 \mid}{\mid \cfrac{\xi_{N_\nu+1}}{\xi_{N_\nu+1} - 1}} \text{ [11]}$$

$$= 2 - \frac{1 \mid}{\mid 1} + \frac{1 \mid}{\mid a_{N_\nu} - 2} + \frac{1 \mid}{\mid \xi_{N_\nu+1}}$$

$$= 2 - \frac{1 \mid}{\mid 1} + \frac{1 \mid}{\mid a_{N_\nu} - 1} - \frac{1 \mid}{\mid \cfrac{\xi_{N_\nu+1}}{\xi_{N_\nu+1} - 1}} \text{ [11]}$$

$$= 2 - \frac{1 \mid}{\mid 2} - \frac{1 \mid}{\mid 1} + \frac{1 \mid}{\mid a_{N_\nu} - 3} + \frac{1 \mid}{\mid \xi_{N_\nu+1}}$$

$$= 2 - \frac{1 \mid}{\mid 2} - \frac{1 \mid}{\mid 1} + \frac{1 \mid}{\mid a_{N_\nu} - 2} - \frac{1 \mid}{\mid \cfrac{\xi_{N_\nu+1}}{\xi_{N_\nu+1} - 1}} \text{ [11]}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[11]) Ist $\xi_{N_\nu+1} < 2$, so muss man überall an Stelle von $\dfrac{\xi_{N_\nu+1}}{\xi_{N_\nu+1} - 1}$ $\xi_{N_\nu+2} + 1$ setzen.

$$= 2-\frac{1\,|}{|\,2}-\dots-\frac{1\,|}{|\,2}-\frac{1\,|}{|\,1}+\frac{1\,|}{|\,a_{N_\nu}-(a_{N_\nu}-1)}+$$

$$+\frac{1\,|}{|\,\xi_{N_\nu+1}}$$

$$= 2-\frac{1\,|}{|\,2}-\dots-\frac{1\,|}{|\,2}-\frac{1\,|}{|\,1}+\frac{1\,|}{|\,a_{N_\nu}-(a_{N_\nu}-2)}-$$

$$-\frac{1\,|}{|\,\dfrac{\xi_{N_\nu+1}}{\xi_{N_\nu+1}-1}}\,{}^{11)}$$

$$= 2-\frac{1\,|}{|\,2}-\dots-\frac{1\,|}{|\,2}-\frac{1\,|}{|\,2}-\frac{1\,|}{\xi_{N_\nu+1}+1}.$$

Im Fall γ) kann ξ_{h_ν} innerhalb der Gruppe G_ν auf $2\,[\xi_{N_\nu}]-1$ verschiedene Arten entwickelt werden.

§ 7. Über den Inhalt der Gruppe G_ν.

Wir beweisen hier den

Satz VII. Es gilt für $\nu \geqq 1$

$$S_{G_\nu}=\sum_{\mu=0}^{h_{\nu+1}-h_\nu-1}[\xi_{h_\nu+\mu}]=[\xi_{N_\nu}]+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}}\,{}^{12)},$$

wo $i_{h_\nu}=1$ ist, wenn h_ν ein Hauptindex zweiter Art ist, und $i^*_{h_\nu}=1$, wenn h_ν für $\nu \geqq 2$ ein Hauptindex zweiter Art und gleichzeitig $a'_{h_\nu-1}-\varepsilon'_{h_\nu-1}=1$ ist, sonst aber $i_{h_\nu}=i^*_{h_\nu}=0$ ist.

Beweis: Um die Richtigkeit der behaupteten Relation zu beweisen

---

[12]) Man kann diese Relation nach (1,10) auch folgendermassen schreiben:

$$S_{G_\nu}=\sum_{\mu=0}^{h_{\nu+1}-h_\nu-1}\left(a'_{h_\nu+\mu}-\frac{1+\varepsilon'_{h_\nu+\mu+1}}{2}\right)=a_{N_\nu}+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}}.$$

müssen wir folgende 3 Fälle unterscheiden, die eine vollständige Disjunktion bilden:

α) h_ν ist ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu}=-1$,

β) h_ν ist ein Hauptindex erster Art und $\varepsilon'_{h_\nu}=+1$,

γ) h_ν ist ein Hauptindex zweiter Art.

In den Fällen α) und γ) enthält G_ν nach Satz VI nur den Index h_ν. Im Fall α) ist $i_{h_\nu}=0$, weil h_ν ein Hauptindex erster Art ist, und $i^*_{h_{\nu+1}}=0$, weil $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}=\varepsilon'_{h_\nu}=-1$ und damit $a'_{h_{\nu+1}-1}-\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}\neq 1$ ist. Da nach unserer Zuordnungvorschrift $\xi'_{h_\nu}=\xi_{N_\nu}$ ist, so gilt im Fall α) also wirklich $S_{G_\nu}=[\xi'_{h_\nu}]=[\xi_{N_\nu}]+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}}$.

Im Fall γ) gilt nach unserer Zuordnungsvorschrift $\xi'_{h_\nu}=\xi_{N_\nu}+1$. Da h_ν ein Hauptindex zweiter Art ist, so ist $i_{h_\nu}=1$. Weiter gilt $i^*_{h_{\nu+1}}=0$, denn entweder ist $h_{\nu+1}$ kein Hauptindex zweiter Art oder, wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art ist, dann muss $\varepsilon'_{h_{\nu+1}}=\varepsilon'_{h_\nu+1}=+1$ und also, da $\xi'_{h_\nu}=\xi_{N_\nu}+1$ ist, nach § 1b) $a'_{h_\nu}=[\xi'_{h_\nu}]+$ $+\dfrac{1+\varepsilon'_{h_\nu+1}}{2}=[\xi_{N_\nu}]+2\geqq 3$ und damit also $a'_{h_\nu}-\varepsilon'_{h_\nu}\neq 1$ sein. Im Fall γ) erhält man also $S_{G_\nu}=[\xi'_{h_\nu}]=[\xi_{N_\nu}]+1=[\xi_{N_\nu}]+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}}$.

Nunmehr müssen wir noch den Fall β) untersuchen. In diesem Fall ist nach unserer Zuordnungsvorschrift B in § 6 $\xi'_{h_\nu}=\dfrac{\xi_{N_\nu}}{\xi_{N_\nu}-1}$. Da h_ν ein Hauptindex erster Art ist, so gilt $i_{h_\nu}=0$.

Nehmen wir nun zunächst an, ξ_{N_ν} sei *ganzzahlig*. Dann ist $i^*_{h_{\nu+1}}=0$, weil ja dann die Entwicklung mit der Gruppe G_ν abbricht. Wir müssen nun zwei Unterfälle β_1) und β_2) unterscheiden, je nachdem ob die Folge der ε_h' für die Gruppe G_ν eine der beiden folgenden Gestalten hat:

β_1) $\varepsilon'_{h_\nu}=\dots=\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0-1}=+1,\ \varepsilon'_{h_\nu+\mu_0}=-1$
für $\mu_0 \leqq \xi_{N_\nu}-2$,

β_2) $\varepsilon'_{h_\nu}=\dots=\varepsilon'_{h_\nu+\xi_{N_\nu}-2}=+1$.

(Diese Disjunktion ist nach Satz VI A vollständig). Im Unterfall β_1) gilt nach unserer Zuordnungsvorschrift C in § 6 und nach § 4a) für $\mu=0,1,\dots,$ μ_0-1 $\xi'_{h_\nu+\mu}=\dfrac{\xi_{N_\nu}-\mu}{\xi_{N_\nu}-\mu-1}<2$ und $\xi'_{h_\nu+\mu_0}=\xi_{N_\nu}-\mu_0$. Also gilt im Unterfall β_1)

$$S_{G_\nu}=\sum_{\mu=0}^{h_{\nu+1}-h_\nu-1}[\xi'_{h_\nu+\mu}]=\mu_0+[\xi_{N_\nu}]-\mu_0=[\xi_{N_\nu}]+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}}.$$

Im Unterfall β_2) ist für $\mu=0,1,\ldots,\xi_{N_\nu}-3$

$$\xi'_{h_\nu+\mu}=\frac{\xi_{N_\nu}-\mu}{\xi_{N_\nu}-\mu-1}<2 \quad\text{und}\quad \xi'_{h_\nu+\xi_{N_\nu}-2}=\frac{\xi_{N_\nu}-\xi_{N_\nu}+2}{\xi_{N_\nu}-\xi_{N_\nu}+1}=2.$$

Also gilt $S_{G_\nu}=[\xi_{N_\nu}]-2+2=[\xi_{N_\nu}]+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}}$.

Nun untersuchen wir den Fall, wo ξ_{N_ν} *nicht ganzzahlig* ist. Auch hier müssen wir zwei Unterfälle β_3) und β_4) unterscheiden, je nachdem die Folge der ε_n' für die Gruppe G_ν lautet:

β_3) $\varepsilon'_{h_\nu}=\ldots=\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0-1}=+1$, $\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0}=-1$ für
$\mu_0\leqq[\xi_{N_\nu}]-1$, $h_\nu+\mu_0+1=h_{\nu+1}$;

β_4) $\varepsilon'_{h_\nu}=\ldots=\varepsilon'_{h_\nu+[\xi_{N_\nu}]-1}=+1$, $h_\nu+[\xi_{N_\nu}]-1=h_{\nu+1}$.

(Auch diese Disjunktion ist nach Satz VI B vollständig).

Im Unterfall β_3) gilt für $\mu=0,1,\ldots,\mu_0-1$ $\xi'_{h_\nu+\mu}=\dfrac{\xi_{N_\nu}-\mu}{\xi_{N_\nu}-\mu-1}<2$ und $\xi'_{h_\nu+\mu_0}=\xi_{N_\nu}-\mu_0$. In diesem Unterfall β_3) ist $i^*_{h_{\nu+1}}=0$, weil $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}=\varepsilon'_{h_\nu+\mu_0}=-1$ und damit $a'_{h_{\nu+1}-1}-\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}\neq 1$ ist. Wir finden also im Unterfall β_3) $S_{G_\nu}=\mu_0+[\xi_{N_\nu}]-\mu_0=[\xi_{N_\nu}]+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}}$.

Im Unterfall β_4) gilt für $\mu=0,1,\ldots,[\xi_{N_\nu}]-2$ $\xi'_{h_\nu+\mu}=\dfrac{\xi_{N_\nu}-\mu}{\xi_{N_\nu}-\mu-1}<2$ und nach Satz VI die Tatsache, dass $h_{\nu+1}=h_\nu+[\xi_{N_\nu}]-1$ ein Hauptindex zweiter Art ist. Da $\xi'_{h_{\nu+1}-1}=\xi'_{h_\nu+[\xi_{N_\nu}]-2}<2$ und $\varepsilon'_{h_{\nu+1}}=+1$ ist, so ist $a_{h_{\nu+1}-1}=2$ und also, da ja auch $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}=+1$ ist, $a'_{h_{\nu+1}-1}-\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1}=1$. Also ist im Unterfall β_4) $i^*_{h_{\nu+1}}=1$. Wir finden also $S_{G_\nu}=[\xi_{N_\nu}]-1=[\xi_{N_\nu}]+$ $+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}}$.

Damit ist unser Satz VII bewiesen.

Aus Satz VII kann man nun die folgende Relation herleiten:

Korollar zu Satz VII. Es gilt

$$\sum_{\mu=1}^{h_{\nu_0+1}-1}[\xi_\mu']=\sum_{n=1}^{N_{\nu_0}}[\xi_n]-i^*_{h_{\nu_0+1}}\text{[13]}.$$

Beweis: Aus Satz VII ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{h_{\nu_0+1}-1}[\xi_\mu']=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}S_{G_\nu}=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}([\xi_{N_\nu}]+i_{h_\nu}-i^*_{h_{\nu+1}})=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}[\xi_{N_\nu}]+\sum_{\nu=2}^{\nu_0}(i_{h_\nu}-i^*_{h_\nu})+i_{h_1}-i^*_{h_{\nu_0+1}}=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}[\xi_{N_\nu}]+\sum_{\nu=2}^{\nu_0}i^{**}_{h_\nu}+i_{h_1}-i^*_{h_{\nu_0+1}},$$

wo $i^{**}_{h_\nu}=1$ ist, wenn h_ν für $\nu\geqq 2$ ein Hauptindex zweiter Art und gleichzeitig $a'_{h_\nu-1}-\varepsilon'_{h_\nu-1}\neq 1$ ist, sonst aber $i^{**}_{h_\nu}=0$ gilt. Ist für ein gewisses h_{ν_1} $i^{**}_{h_{\nu_1}}=1$, so gilt nach unserer Zuordnungsvorschrift A in §6 $N_{\nu_1}-N_{\nu_1-1}=2$ und nach Satz VI B $[\xi_{N_{\nu_1-1}}]=1$. Da nun $N_{\nu_1}-N_{\nu_1-1}=2$ ist, so kommt in unserer Entwicklung kein Wert aus $A_{\xi_{N_{\nu_1}}-1}$ vor und somit fehlt in

[13]) Ist ξ_0 eine rationale Zahl und $h_{\nu_0+1}-1$ der Index, mit dem die Entwicklung abbricht, so reduziert sich die obige Relation auf

$$\sum_{\mu=1}^{h_{\nu_0+1}-1}[\xi_\mu']=\sum_{n=1}^{N_{\nu_0}}[\xi_n]$$

oder unter Berücksichtigung von (1,10) auf

$$\sum_{\mu=1}^{h_{\nu_0+1}-1}\left(a_\mu'-\frac{1+\varepsilon'_{\mu+1}}{2}\right)=\sum_{n=1}^{N_{\nu_0}}a_n.$$

Damit haben wir einen Teil eines Satzes von Vahlen neu bewiesen, der aussagt, dass in allen halbregelmässigen Entwicklungen einer rationalen Zahl ξ_0 die Summe der Teilnenner a_ν' vermindert um die Anzahl der positiven Teilzähler ε_ν' gleich gross ist (und zwar, wie im zweiten Teil des Vahlenschen Satzes behauptet wird, so gross wie die Anzahl aller (positiven endlichen) „Näherungswerte" der betreffenden rationalen Zahl).

$\sum_{\nu=1}^{\nu_0}[\xi_{N_\nu}]$ die Grösse $[\xi_{N_{\nu_1}-1}]=1$. Also ist

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_0}[\xi_{N_\nu}]+\sum_{\nu=2}^{\nu_0} i^{**}_{h_\nu}+i_{h_1}-i^{*}_{h_{\nu_0+1}}=\sum_{n=N_1}^{N_{\nu_0}}[\xi_n]+i_{h_1}-i^{*}_{h_{\nu_0+1}}.$$

Gilt nun $i_{h_1}=1$, dann ist h_1 ein Hauptindex zweiter Art und nach Satz V B ist $N_1=2$ und $[\xi_1]=1$. Ist aber h_1 ein Hauptindex erster Art, dann ist $i_{h_1}=0$ und nach Satz V B $N_1=1$. Also ist

$$\sum_{n=N_1}^{N_{\nu_0}}[\xi_n]+i_{h_1}-i^{*}_{h_{\nu_0+1}}=\sum_{n=1}^{N_{\nu_0}}[\xi_n]-i^{*}_{h_{\nu_0+1}},$$

womit wir unsere Behauptung bewiesen haben.

§ 8. Die knappsten und die ausführlichsten Entwicklungen einer Zahl ξ_0.

Unter den endlichen Kettenbruchentwicklungen einer rationalen Zahl ξ_0 bezeichnet man diejenige als *kürzeste*, resp. *längste Entwicklung der Zahl* ξ_0, die so beschaffen ist, dass unter allen halbregelmässigen Entwicklungen von ξ_0 keine Entwicklung mit einer kleinern, resp. grössern Anzahl von Gliedern existiert. Die so definierten Begriffe versagen bei unendlichen Kettenbruchentwicklungen. Wir wollen nun zwei Begriffe definieren, die für endliche Kettenbrüche in engem Zusammenhang mit den Begriffen des kürzesten und längsten Kettenbruches stehen, die aber andrerseits auch für unendliche Kettenbrüche einen Sinn haben. In diesen beiden Definitionen ist von gewissen Entwicklungen E^* und E^{**} die Rede. Die zu diesen Kettenbrüchen gehörenden Symbole kennzeichnen wir dadurch, dass wir sie mit*, resp. mit** versehen. Wir definieren nun:

> Wenn unter allen halbregelmässigen Entwicklungen einer Zahl ξ_0 Entwicklungen E^*, resp. E^{**} existieren, für die für alle ν verglichen mit allen andern halbregelmässigen Entwicklungen von ξ_0 $h^*_\nu \leqq h_\nu$ und $N^*_\nu \geqq N_\nu$, resp. $h^{**}_\nu \geqq h_\nu$ und $N^{**}_\nu \leqq N_\nu$ gilt, so wollen wir E^*, resp. E^{**} als *knappste, resp.* als *ausführlichste Entwicklung der Zahl* ξ_0 bezeichnen.

Weiter wollen wir noch zwei spezielle Entwicklungen mit einem Namen versehen:

Wir bezeichnen die Kettenbruchentwicklung einer Zahl ξ_0, für die für $\nu \geqq 1$ $\xi_\nu' \geqq 2$ (oder was gleichbedeutend ist: $a_\nu' \geqq 2$ und $a_\nu'-\varepsilon'_{\nu+1} \geqq 2$) gilt, als die *Entwicklung nach nächsten Ganzen* und die Entwicklung, für die für $\nu \geqq 1$ $\xi_\nu' \leqq 2$ (oder $a_\nu' \leqq 2$ und $a_\nu'-\varepsilon'_{\nu+1} \leqq 2$) gilt, als die *Entwicklung nach entferntern Ganzen.*

Es ist nun aber zu beachten, dass nach diesen Definitionen sowohl die Entwicklung nach nächsten Ganzen wie auch die Entwicklung nach entferntern Ganzen für gewisse ξ_0 nicht eindeutig bestimmt ist. Entwickeln wir nämlich eine rationale Zahl nach entferntern Ganzen, so besitzt diese Entwicklung als letzten Teilnenner a_n' den Wert 2, denn in einer Entwicklung nach entferntern Ganzen gilt $a_n' \leqq 2$ und nach C in § 1 kann a_n' als letzter Teilnenner $\neq 1$ sein. Also ist $\xi'_{n-1}=a'_{n-1}-\frac{\varepsilon_n'}{a_n'}=1\frac{1}{2}$. Diese ξ'_{n-1} kann man auf 2 Arten nach entferntern Ganzen entwickeln, nämlich entweder als $\xi'_{n-1}=1+\frac{1}{2}$ oder als $\xi'_{n-1}=2-\frac{1}{2}$. Also besitzt jede rationale Zahl genau *zwei* Entwicklungen nach entferntern Ganzen, die sich allerdings nur in den beiden letzten Gliedern unterscheiden.

Eine rationale Zahl kann in gewissen Fällen auch zwei Entwicklungen nach nächsten Ganzen besitzen, nämlich dann, wenn man beim Entwickeln einer Zahl ξ_0 nach nächsten Ganzen zu einem $\xi_\nu'=g+\frac{1}{2}$ kommt, wo g eine ganze Zahl $\geqq 2$ ist. Ein solches $\xi_\nu'=g+\frac{1}{2}$ lässt sich auf zwei Arten nach nächsten Ganzen entwickeln, nämlich entweder als $\xi_\nu'=g+\frac{1}{2}$ oder als $\xi_\nu'=g+1-\frac{1}{2}$, so dass wir für solche rationale ξ_0 genau *zwei* Entwicklungen nach nächsten Ganzen erhalten, die sich allerdings auch nur in den beiden letzten Gliedern unterscheiden; sonst gibt es immer nur eine *einzige* Entwicklung nach nächsten Ganzen. Im folgenden werden wir aber zwei Entwicklungen der gleichen Art, die sich nur in den beiden letzten Gliedern unterscheiden, *nicht* als verschieden ansehen.

Nunmehr kommen wir zum

Satz VIII. Für jede Zahl ξ_0 existieren knappste und ausführlichste Entwicklungen und zwar ist die Entwicklung nach nächsten

Ganzen eine knappste und die Entwicklung nach entfernteren Ganzen die einzige ausführlichste Entwicklung der Zahl ξ_0. Die Entwicklung nach nächsten Ganzen ist die einzige knappste Entwicklung nur und stets für solche ξ_0, in deren regelmässigen Entwicklung auf den Teilnenner 2 stets der Teilnenner 1 folgt.

Existiert aber in der regelmässigen Entwicklung einer Zahl ξ_0 eine endliche oder unendliche Folge von Indizes l_ν, für die $a_{l_\nu} = 2$ und $a_{l_{\nu+1}} \neq 1$ ist, so existieren neben der Entwicklung nach nächsten Ganzen noch andere knappste Entwicklungen. Man findet sie sämtlich nach der folgenden Vorschrift: Man greife aus der Folge der Indizes l_ν beliebige und beliebig viele Indizes heraus und zwar so, dass die Differenz zwischen je zwei der herausgegriffenen mindestens zwei ist, und bezeichne sie mit l_ν^*. Die Indizes der Entwicklung nach nächsten Ganzen, für die der vollständige Teilnenner aus der Klasse $A_{\xi_{l_\nu^*}}$ stammt, seien mit n^* bezeichnet. Dann wähle man die Folge der Teilzähler gleich wie in der Entwicklung nach nächsten Ganzen mit der Ausnahme der ε_n^* und ε_{n+1}^*, die gleich $+1$ zu setzen sind.

Erläuterung: Für rationale Zahlen ξ_0 existieren, wie wir schon erwähnt haben, immer *zwei* Entwicklungen nach entfernteren Ganzen und ev. zwei Entwicklungen nach nächsten Ganzen. Insofern gibt es genau genommen für ein rationales ξ_0 stets *zwei* ausführlichste und ev. unter den knappsten Entwicklungen *zwei* Entwicklungen, die sich nur in den beiden letzten Gliedern unterscheiden. Wir werden aber zwei Entwicklungen gleicher Sorte, die sich nur in den beiden letzten Gliedern unterscheiden, *nicht* als verschieden ansehen. In diesem Sinn ist für rationales ξ_0 die Formulierung des Satzes VIII zu verstehen.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass für jede Zahl ξ_0 knappste Entwicklungen existieren. Da allgemein für $\nu \geqq 1$ $h_\nu \geqq \nu$ und für eine regelmässige Entwicklung speziell $h_\nu = \nu$ gilt, so muss, wenn eine knappste Entwicklung existiert, für diese Entwicklung auch $h_\nu = \nu$ gelten. Damit $h_\nu = \nu$ gilt, darf keine Gruppe G_ν mehr als den einen Index h_ν besitzen. In welchen Fällen eine Gruppe nur einen einzigen Index enthält, ist im Satz VIBα) detailliert angegeben. Nun muss aber in einer knappsten Entwicklung nicht nur h_ν möglichst klein sein, sondern gleichzeitig N_ν möglichst gross. Allgemein gilt

$N_\nu \geqq \nu$. in einer regelmässigen Entwicklung speziell $N_\nu = \nu$. $N_\nu > \nu$ kann nur gelten, wenn in der betreffenden Entwicklung von ξ_0 gewisse Klassen A_{ξ_n} übersprungen werden. Nach Satz V B wird dann und nur dann eine Klasse A_{ξ_n} übersprungen, d. h. es ist dann und nur dann $N_{\nu+1} - N_\nu = 2$, wenn $h_{\nu+1}$ ein Hauptindex zweiter Art und gleichzeitig $\xi'_{h_{\nu+1}-1}$ ein formal ganzer Wert aus $A^{(\nu)}$ ist, und es ist dann $[\xi_{N_{\nu+1}}] = 1$. Damit also eine Klasse A_{ξ_n} übersprungen werden kann, muss $[\xi_n] = 1$ sein. Nun muss man aber beachten, dass man in ein und derselben Entwicklung unter Umständen nicht alle Klassen A_{ξ_n}, für die $[\xi_n] = 1$ ist, überspringen kann, denn nach Satz V B kann man von 2 solchen unmittelbar aufeinanderfolgenden Klassen A_{ξ_n} nur eine überspringen. Wir bezeichnen nun nacheinander die Indizes n der regelmässigen Entwicklung, deren ξ_n in einer Sequenz minimaler VT-Werte (vergleiche die Definition in § 4) an *ungerader* Stelle stehen, in diesem Paragraphen mit $m_1, m_2, \ldots$. Es ist dann $m_{\mu+1} - m_\mu \geqq 2$ für $\mu \geqq 1$. *Wenn wir nun eine Entwicklung angeben können, für die erstens jedes G_ν nur einen einzigen Index enthält und zweitens jede Klasse $A_{\xi_{m_\mu}}$ übersprungen wird, so ist diese Entwicklung offensichtlich eine knappste Entwicklung, und nur solche Entwicklungen können knappste sein.*

Wie wird nun eine solche Entwicklung im Einzelnen aussehen?

Wir behaupten zunächst, dass wir sicher eine Entwicklung Φ, die die soeben angegebenen Eigenschaften besitzt, erhalten, wenn wir für $\nu \neq m_\mu - \mu + 1$ $\varepsilon_\nu' = -1$ und für $\nu = m_\mu - \mu + 1$ $\varepsilon_\nu' = +1$ setzen. Wir zeigen zuerst, dass in dieser Entwicklung Φ für $0 < \nu < m_1$ $\xi_\nu' = \xi_\nu$, für $m_\mu - \mu + 1 < \nu < m_{\mu+1} - (\mu+1) + 1$ und $\mu \geqq 1$ $\xi_\nu' = \xi_{\nu+\mu}$ und für $\nu = m_\mu - \mu + 1$ $\xi_\nu' = \xi_{m_\mu+1} + 1$ ist.

Für $0 < \nu < m_1$ stimmt die Folge der ξ_ν' von Φ mit der entsprechenden Folge der regelmässigen Entwicklung überein. Da nun aber in Φ $\varepsilon'_{m_1} = +1$, $\xi'_{m_1-1} = \xi_{m_1-1}$ (also gleich einem formal ganzen Wert) und $[\xi_{m_1}] = 1$ ist, so wird nach dem Obigen in Φ die Klasse $A_{\xi_{m_1}}$ übersprungen und es gilt $\xi'_{m_1} = \xi_{m_1+1} + 1$. Die weitere Entwicklung von ξ'_{m_1} stimmt also mit derjenigen von ξ_{m_1+1} überein. Allgemein: Ist $\xi'_{m_\mu-\mu+1} = \xi_{m_\mu+1} + 1$, so stimmt die weitere Entwicklung von $\xi'_{m_\mu-\mu+1}$ mit der entsprechenden Entwicklung von $\xi_{m_\mu+1}$ überein. Daraus ergibt sich, dass für $m_\mu - \mu + 1 < \nu < m_{\mu+1} - (\mu+1) + 1$ $\xi_\nu' = \xi_{\nu+\mu}$ ist. Da nun $\varepsilon'_{m_{\mu+1}-(\mu+1)+1} = +1$, $\xi'_{m_{\mu+1}-(\mu+1)}$ gleich einem formal ganzen Wert (für

$m_{\mu+1} - m_\mu = 2$ ist $\xi'_{m_{\mu+1}-(\mu+1)} = \xi'_{m_\mu-\mu+1} = \xi_{m_\mu+1} + 1$, für $m_{\mu+1} - m_\mu > 2$ ist $\xi'_{m_{\mu+1}-(\mu+1)} = \xi_{m_{\mu+1}-1}$) und $[\xi_{m_\mu+1}] = 1$ ist, so wird die Klasse $A_{\xi_{m_{\mu+1}}}$ übersprungen und es gilt $\xi'_{m_{\mu+1}-(\mu+1)+1} = \xi_{m_{\mu+1}+1} + 1$. Damit haben wir gezeigt, dass die oben angegebenen Werte für die vollständigen Teilnenner von Φ richtig sind und dass in der Entwicklung Φ jede Klasse $A_{\xi_{m_\mu}}$ übersprungen wird. Da nach Satz VI B jede Gruppe G_ν der Entwicklung Φ nur einen einzigen Index enthält, so ist also die Entwicklung Φ wirklich eine knappste Entwicklung.

Nun wollen wir untersuchen, wann es ausser der Entwicklung Φ noch weitere knappste Entwicklungen gibt. Wenn eine zweite knappste Entwicklung Φ' existiert, so muss in Φ' mindestens ein vollständiger Teilnenner anders lauten als der entsprechende vollständige Teilnenner in Φ. Da nun aber in einer knappsten Entwicklung alle Klassen $A_{\xi_{m_\mu}}$ übersprungen werden müssen, so muss auch in Φ' für $\mu \geqq 1$ $\xi'_{m_\mu-\mu+1} = \xi_{m_\mu+1} + 1$ gelten, d. h. also, dass sowohl in Φ wie auch in Φ' aus den Klassen $A_{\xi_{m_\mu}}$ kein Wert und aus den Klassen $A_{\xi_{m_\mu+1}}$ der Hauptwert zweiter Art $\xi_{m_\mu+1} + 1$ als vollständiger Teilnenner auftritt. Aus den andern Klassen kommt in Φ der formal ganze Hauptwert erster Art vor. Wir müssen also untersuchen, ob es möglich ist eine Entwicklung Φ' zu bilden, die aus mindestens einer dieser „andern" Klassen einen andern Hauptwert aufweist als den formal ganzen Hauptwert erster Art. Damit nun aus einer dieser Klassen ein anderer Hauptwert vorkommt, muss für das entsprechende $\nu \neq m_\mu - \mu + 1$ $\varepsilon_\nu' = +1$ sein. Wir müssen noch daran erinnern, dass ein Index n der regelmässigen Entwicklung in beiden Entwicklungen Φ und Φ' gleich dem gleichen N_ν sein muss, da ja sonst nicht beide Entwicklungen gleichzeitig knappste Entwicklungen sein könnten. In Φ gehört aber zu einem $\nu \neq m_\mu - \mu + 1$ ein $A_{\xi_{N_\nu}}$, dessen $\xi_{N_\nu} \geqq 2$ ist, denn diejenigen A_{ξ_n}, deren $[\xi_n] = 1$ sind, werden in Φ entweder übersprungen oder gehören zu den Indizes $m_\mu - \mu + 1$. Setzen wir also für ein $\nu \neq m_\mu - \mu + 1$ $\varepsilon_\nu' = +1$, so kommt nach Lemma 1 aus § 5 aus der betreffenden Klasse $A^{(\nu)}$ der formal gebrochene Wert erster Art vor. Ist $\xi_\nu' = \frac{\xi_{N_\nu}}{\xi_{N_\nu} - 1}$, so kann die Gruppe G_ν einen oder mehrere Indizes enthalten. Nach Satz VI B enthält in diesem Fall G_ν einen und nur einen Index, wenn entweder $\xi_{N_\nu} = 2$ oder $2 < \xi_{N_\nu} < 3$ und $\varepsilon'_{\nu+1} = +1$ ist. Ist $\xi_{N_\nu} = 2$, so bricht die Entwicklung mit dem Index ν ab. Eine solche Entwicklung aber, die sich von Φ bloss in den beiden letzten Gliedern unterscheidet, sehen wir nicht als von Φ wesentlich verschieden an (vergleiche die Erläuterung zu

Satz VIII). Ist aber $2 < \xi_{N_\nu} < 3$ und $\varepsilon'_{\nu+1} = +1$, so folgt aus Lemma 2 in § 5, dass $\xi'_{\nu+1}$ gleich dem formal ganzen Wert zweiter Art $\xi_{N_\nu+1} + 1$ aus $A^{(\nu+1)}$ ist. Die weitere Entwicklung von $\xi'_{\nu+1}$ stimmt mit der Entwicklung von $\xi_{N_\nu+1} = \xi_p$ überein. Ist $\xi_{N_\nu+1} \geqq 2$, dann ist die auf diese Weise abgeänderte Entwicklung Φ immer noch eine knappste Entwicklung. Ist aber $[\xi_{N_\nu+1}] = [\xi_p] = 1$, dann ist $p = m_\mu$ und also wird in Φ die Klasse A_p übersprungen, in unserer Entwicklung Φ' kommt aber ein Wert aus A_p vor. Wir sehen also, dass wir durch unser Abändern von $\varepsilon_\nu' = -1$ in $\varepsilon_\nu' = +1$ unter der letzten Annahme das Ueberspringen eines A_{m_μ} versäumt haben, dass also dieses Φ' gar keine knappste Entwicklung ist. Aus diesen Ausführungen ergibt sich also, dass wir nur für solche ξ_0 eine zweite knappste Entwicklung bilden können, für die in der regelmässigen Entwicklung mindestens einmal auf ein ξ_n ein ξ_{n+1} folgt mit $2 < \xi_n < 3$ und $\xi_{n+1} > 2$. Umgekehrt: Folgt in der regelmässigen Entwicklung auf ein $[\xi_n] = a_n = 2$ immer ein $[\xi_{n+1}] = a_{n+1} = 1$, so ist Φ die einzige knappste Entwicklung von ξ_0.

Die Entwicklung Φ von ξ_0 ist nun identisch mit der Entwicklung nach nächsten Ganzen der Zahl ξ_0. Beim Übergang von der regelmässigen Entwicklung zu Φ hat man nämlich diejenigen ξ_n, die grösser als 2 sind, unverändert gelassen, diejenigen ξ_n aber, die kleiner als 2 sind, entweder um 1 vergrössert oder gestrichen. So gilt also in der Entwicklung Φ für alle $n \geqq 1$ $\xi_n' \geqq 2$, und diese Bedingung ist nach den Definitionen in § 7 charakteristisch für die Entwicklung nach nächsten Ganzen.

Wir zeigen nunmehr, dass zu jeder Zahl ξ_0 genau eine ausführlichste Entwicklung existiert. *Wir erhalten sicher eine ausführlichste Entwicklung von ξ_0, wenn wir ξ_0 so entwickeln können, dass für $\nu \geqq 1$ $N_\nu = \nu$ ist (d. h. also in der Entwicklung keine einzige Klasse A_{ξ_n} übersprungen wird), und dass $h_{\nu+1} - h_\nu$ für alle $\nu \geqq 1$ den maximalen Wert $[\xi_{N_\nu}]$, resp. $\xi_{N_\nu} - 1$ des Satzes VIB annimmt*, wobei man unter $h_{\nu+1}$, wenn die Entwicklung mit der Gruppe G_ν abbricht, den auf den letzten Index der Entwicklung folgenden Index verstehen soll. Wir bilden nun die folgende Entwicklung ψ. Ist $\xi_1 = 2$, so sehen wir die beiden Entwicklungen $\xi_0 = a_0 + \frac{1}{2}$ und $\xi_0 = a_0 + 1 - \frac{1}{2}$ nach der Erläuterung zu Satz VIII nicht als verschieden an. Ist $\xi_1 > 2$, so wählen wir $\varepsilon_1' = +1$ und entwickeln dann $\xi_1' = \frac{\xi_1}{\xi_1 - 1}$ so, wie nach Satz VIBβ) $\frac{\xi_1}{\xi_1 - 1}$ entwickelt werden muss, damit $h_2 - h_1 = [\xi_1]$, resp. $= \xi_1 - 1$ ist. Ist ξ_1 ganzzahlig, so bricht die Entwicklung mit der Gruppe G_1 ab; ist ξ_1 nicht ganzzahlig, so erhalten wir $\xi'_{h_2-1} = \xi'_{[\xi_1]} = \xi_1 - [\xi_1] + 1$.

Ist aber $\xi_1 < 2$, so wählen wir $\varepsilon_1' = -1$ und erhalten $\xi'_{h_2-1} = \xi'_{h_1} = \xi_1$. In allen Fällen gehört also zum letzten Index von G_1, sofern ξ_1 nicht ganzzahlig ist (die Entwicklung also nicht mit G_1 abbricht), der kleinste formal ganze Wert von A_{ξ_1} $\xi_1 - [\xi_1] + 1$. Allgemein: Ist $\xi_{N_{\nu-1}}$ ganzzahlig, so bricht die Entwicklung mit der Gruppe $G_{\nu-1}$ ab; ist $\xi_{N_{\nu-1}}$ nicht ganzzahlig, so dürfen wir annehmen, dass zum letzten Index von $G_{\nu-1}$ der kleinste formal ganze Wert $\xi_{N_{\nu-1}} - [\xi_{N_{\nu-1}}] + 1$ von $A_{\xi_{N_{\nu-1}}}$ gehört. Ist nun G_ν nicht die letzte Gruppe der Entwicklung, so wählen wir, wenn $\xi_{N_{\nu-1}+1} > 2$ ist, $\varepsilon'_{h_\nu} = \varepsilon'_{h_{\nu+1}} = \ldots = \varepsilon'_{h_{\nu+1}-2} = +1$ und $\varepsilon'_{h_{\nu+1}-1} = -1$ und, wenn $\xi_{N_{\nu-1}+1} < 2$ ist, $\varepsilon'_{h_\nu} = -1$. In diesen beiden Fällen nimmt nach Satz VI $\xi'_{h_{\nu+1}-1}$ den kleinsten formal ganzen Wert $\xi_{N_\nu} - [\xi_{N_\nu}] + 1$ von $A_{\xi_{N_\nu}}$ an und durch diese und nur durch diese Wahl der ε_ν wird erreicht, dass nach unserer Zuordnungsvorschrift die Klasse $A_{\xi_{N_\nu}}$ nicht übersprungen wird und dass nach Satz VI $h_{\nu+1} - h_\nu$ den maximalen Wert $[\xi_{N_\nu}]$ annimmt. Ist aber G_ν die letzte Gruppe der Entwicklung, so kann nach Satz VIB die weitere Entwicklung auf zwei Arten gewählt werden, damit die letzte Gruppe G_ν die maximale Anzahl von Indizes aufweist. Diese beiden Entwicklungen sind durch die folgenden Teilzähler bestimmt: $\varepsilon'_{h_\nu} = \ldots = \varepsilon'_{h_\nu + [\xi_{N_\nu}] - 3} = +1$ und $\varepsilon'_{h_\nu + [\xi_{N_\nu}] - 2} = \pm 1$. Doch sehen wir diese beiden verschiedenen Entwicklungen, die sich ja nur in den beiden letzten Gliedern unterscheiden, wie wir in der Erläuterung zu Satz VIII erwähnt haben, nicht als verschieden an. Damit haben wir also die Vorschrift angegeben, nach der man eine ausführlichste Entwicklung bilden kann.

Diese Entwicklung ψ ist nun aber nicht nur eine, sondern die einzige ausführlichste Entwicklung der Zahl ξ_0, denn nur, wenn man ξ_0 auf die oben angegebene Weise entwickelt, kommt jede Klasse A_{ξ_n} in der Entwicklung vor und enthält jede Gruppe G_ν die maximale Anzahl von Indizes.

Um den Beweis des Satzes VIII zu Ende zu führen, müssen wir noch nachweisen, dass die Entwicklung ψ der Zahl ξ_0 mit der Entwicklung nach entferntern Ganzen der Zahl ξ_0 identisch ist. Nach unserer Zuordnungsvorschrift in §6 und nach § 4a) ist für $\nu \geqq 1$ und für $\mu = 0, 1, \ldots, h_{\nu+1} - h_\nu - 2$ $\xi'_{h_\nu+\mu} = \dfrac{\xi_{N_\nu} - \mu}{\xi_{N_\nu} - \mu - 1} \leqq 2$. Aber auch $\xi'_{h_\nu - 1} \leqq 2$ gilt, weil ja $\xi'_{h_\nu - 1}$ gleich einem kleinsten formal ganzen Wert ist. Also ist die Entwicklung ψ wirklich mit der am Eingang dieses Paragraphen definierten Entwicklung nach entferntern Ganzen identisch.

Damit ist Satz VIII bewiesen.

Es ist noch von Interesse festzustellen, wie bei endlichen Entwicklungen die knappsten und ausführlichsten Entwicklungen mit den kürzesten und längsten zusammenhängen. Um diese Frage vollständig beantworten zu können, müssen wir noch eine weitere Art von Entwicklungen einführen, die wir als die fast-knappsten Entwicklungen von ξ_0 bezeichnen.

Diese *fast-knappsten Entwicklungen* existieren nur bei einem ξ_0, in dessen regelmässiger Entwicklung mindestens einmal eine Sequenz von *geradzahlig* vielen minimalen VT-Werten vorkommt. Man erhält, wie wir oben gezeigt haben, eine *knappste* Entwicklung, indem man ξ_0 so entwickelt, dass jede Gruppe G_ν nur einen einzigen Index enthält und dass man alle A_{ξ_n} überspringt, deren ξ_n in einer Sequenz minimaler VT-Werte an *ungerader* Stelle stehen. *Will man dagegen eine fast-knappste Entwicklung χ bilden, so ändert man diese Vorschrift dahin ab, dass man in beliebigen und beliebig vielen Sequenzen von geradzahlig vielen minimalen VT-Werten diejenigen A_{ξ_n} überspringt, deren ξ_n an gerader Stelle stehen. Zu den fast-knappsten Entwicklungen wollen wir auch die folgenden eventuel existierenden Entwicklungen zählen: Sollen diejenigen A_{ξ_n} übersprungen werden, deren ξ_n in einer Sequenz von geradzahlig vielen minimalen VT-Werten an gerader Stelle stehen, und gilt für das dieser Sequenz vorausgehende ξ_ν: $2 < \xi_\nu < 3$, so darf man vorher für die entsprechenden Indizes die Entwicklung nach nächsten Ganzen doch so abändern, wie wir im Satz VIII für den Fall, dass ξ_ν nicht von einer minimalen Sequenz gefolgt ist, angegeben haben.* Denn, wenn wir jetzt die fast-knappste Entwicklung bilden, so wird durch die Abänderung der Entwicklung nach nächsten Ganzen das Überspringen der Klasse A_{ξ_n}, deren ξ_n an gerader Stelle steht, nicht verhindert.

Wir wollen nun eine Tatsache herleiten, die uns im Folgenden erlauben wird, anzugeben, welches die kürzesten Entwicklungen einer rationalen Zahl sind und später in § 14 welche Entwicklungen einer quadratischen Irrationalität die kürzeste Periode besitzen. Um diese Tatsache herleiten zu können, müssen wir annehmen, dass in der regelmässigen Entwicklung von ξ_0 nicht für alle $n \geqq N$, wo N eine beliebig grosse ganze Zahl ist, $a_n = 1$ gelte. Da bei endlichen Kettenbrüchen nach der Eigenschaft C) in § 1 wenigstens der letzte Teilnenner grösser als 1 ist, so bezieht sich diese Einschränkung nur auf unendliche Kettenbrüche, und zwar werden solche Kettenbrüche ausgeschlossen, die eine Periode mit lauter Einern besitzen. Diesen ausgeschlossenen Fall — in dem übrigens ξ_0 eine quadratische Irrationalität ist — werden wir gesondert im § 14 betrachten.

a) Es sei $\xi_0 = a_0 + \dfrac{1|}{|a_1} + \dfrac{1|}{|a_2} + \ldots$, wo nicht für alle $n \geqq N$

$a_n = 1$ ist, und es seien p_0 und p_1 $(p_1 > p_0 \geqq 0)$ zwei Indizes der regelmässigen Entwicklung, für die $\xi_{p_1} \geqq 2$ und entweder $p_0 = 0$ oder $\xi_{p_0} > 2$ ist. (Nach Satz VB können also die Klassen $A_{\xi_{p_0}}$ und $A_{\xi_{p_1}}$ in keiner halbregelmässigen Entwicklung übersprungen werden). Für jede halbregelmässige Entwicklung von ξ_0 können nun zwei Zahlen π_0 und π_1 bestimmt werden, so dass $p_0 = N_{\pi_0}$ und $p_1 = N_{\pi_1}$ ist. Wir bezeichnen ferner die Länge der Sequenzen minimaler VT-Werte innerhalb der Sequenz $\xi_{p_0}, \xi_{p_0+1}, \ldots, \xi_{p_1}$ der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau$ und den Ausdruck $N_{\pi_1} - N_{\pi_0} - \sum_{\sigma=1}^{\tau} \left[\frac{\lambda_\sigma + 1}{2}\right]$ mit W_{p_0, p_1}. Dann gilt für alle knappsten und fast-knappsten Entwicklungen $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} = W_{p_0, p_1}$ und für keine halbregelmässigen Entwicklungen $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} < W_{p_0, p_1}$. Umgekehrt: gilt für eine halbregelmässige Entwicklung von ξ_0 $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} = W_{p_0, p_1}$, so kommt die Folge der ξ_ν' für die Indizes $h_{\pi_0} + 1$ bis $h_{\pi_1} - 1$ in mindestens einer knappsten oder fast-knappsten Entwicklung von ξ_0 vor.

Beweis: Nach Satz VB gilt $N_{\pi_1} - N_{\pi_0} \geqq \pi_1 - \pi_0$, wo das Gleichheitszeichen gilt, wenn aus allen Klassen A_ξ mit $\xi = \xi_{N_{\pi_0}}, \xi_{N_{\pi_0}+1}, \ldots, \xi_{N_{\pi_1}-1}$ Werte entnommen werden, das Ungleichheitszeichen, wenn gewisse dieser Klassen übersprungen werden. Nach demselben Satz können nur Klassen A_{ξ_n} übersprungen werden, deren ξ_n ein minimaler VT-Wert ist (d. h. nach der Definition in § 4 deren $\xi_n < 2$ ist) und zwar kann in der gleichen Entwicklung von zwei solchen unmittelbar aufeinanderfolgenden A_{ξ_n} mit $\xi_n < 2$ immer nur eines übersprungen werden, d. h. also in einer Folge von A_{ξ_n}, die zu einer Sequenz minimaler VT-Werte von gerader Länge λ gehört, können maximal $\frac{\lambda}{2} = \left[\frac{\lambda+1}{2}\right]$ Klassen, in einer Folge von A_{ξ_n}, die zu einer Sequenz minimaler VT-Werte von ungerader Länge λ gehört, können maximal $\frac{\lambda+1}{2} = \left[\frac{\lambda+1}{2}\right]$ Klassen übersprungen werden. Innerhalb der Folge der A_ξ mit $\xi = \xi_{N_{\pi_0}}, \xi_{N_{\pi_0}+1}, \ldots, \xi_{N_{\pi_1}-1}$ können also höchstens $\sum_{\sigma=1}^{\tau} \left[\frac{\lambda_\sigma + 1}{2}\right]$ Klassen übersprungen werden. Diese Summe

ist übrigens gleich der Anzahl der minimalen VT-Werte, die innerhalb der Sequenz $\xi_{N_{\pi_0}}, \ldots, \xi_{N_{\pi_1}}$ in einer Sequenz minimaler VT-Werte an ungerader Stelle stehen. Daraus ergibt sicht

$$\pi_1 - \pi_0 \geqq N_{\pi_1} - N_{\pi_0} - \sum_{\sigma=1}^{\tau} \left[\frac{\lambda_\sigma + 1}{2}\right].$$

Nun ist aber $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} \geqq \pi_1 - \pi_0$, wo das Gleichheitszeichen gilt, wenn aus jeder Klasse nur ein einziger Wert vorkommt. So erhalten wir schliesslich

$$h_{\pi_1} - h_{\pi_0} \geqq N_{\pi_1} - N_{\pi_0} - \sum_{\sigma=1}^{\tau} \left[\frac{\lambda_\sigma + 1}{2}\right] = W_{p_0, p_1},$$

wo also das Gleichheitszeichen gilt, wenn eine halbregelmässige Entwicklung so beschaffen ist, dass in ihr aus der Folge der Klassen A_{ξ_n} mit $n = N_{\pi_0}, N_{\pi_0}+1, N_{\pi_0}+2, \ldots, N_{\pi_1}-1$ die grösstmögliche Anzahl von Klassen übersprungen wird und aus den übrigen nur einziger Wert entnommen wird.

Diese beiden Bedingungen werden nun sowohl von den knappsten wie von den fast-knappsten Entwicklungen erfüllt. Denn, wie wir in diesem Paragraphen gezeigt haben, sind die knappsten Entwicklungen dadurch charakterisiert, dass erstens jedes G_ν nur einen einzigen Index enthält und zweitens jede Klasse A_{ξ_n}, deren ξ_n in einer Sequenz minimaler VT-Werte an ungerader Stelle steht, übersprungen wird. Eine fast-knappste Entwicklung erhält man dadurch aus der knappsten, dass man in beliebigen und beliebig vielen Sequenzen von geradzahlig vielen minimalen VT-Werten nicht diejenigen A_{ξ_n} überspringt, deren ξ_n an ungerader Stelle, sondern diejenigen, deren ξ_n an gerader Stelle stehen. Damit haben wir gezeigt, dass für keine halbregelmässigen Entwicklungen von ξ_0 $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} < W_{p_0, p_1}$ gelten kann und dass für die knappsten und fast-knapsten Entwicklungen $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} = W_{p_0, p_1}$ gilt.

Wir haben noch behauptet, dass, wenn für eine halbregelmässige Entwicklung $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} = W_{p_0, p_1}$ gilt, dann die Sequenz der ξ_ν' *für* $\nu = \pi_0 + 1, \pi_0 + 2, \ldots, \pi_1 - 1$ auch in einer knappsten oder in einer fast-knappsten Entwicklung vorkommt. Im Satz VIBα), für $\nu = \pi_0$ geschrieben, sind die Fälle aufgezählt, in welchen G_{π_0} nur einen einzigen Index enthält. Von dem unter 3. dort angegebenen Fall können wir dabei absehen, da in diesem Fall die Entwicklung mit dem Index h_{π_0} abbricht. Die Entwicklung von ξ_0 können wir immer so wählen, dass für den Index h_{π_0} der erste und der zweite Fall von Satz VIBα) und, wenn $2 < \xi_{N_{\pi_0}} < 3$ gilt, auch der vierte eintritt. Man braucht ja bloss die regelmässige Entwicklung bis zum Index $N_{\pi_1} - 2$ zu übernehmen und dann die folgenden Teilzähler nach der Zuordnungsvorschrift in § 6 geeignet zu wählen.

Stimmt nun schon $\xi'_{h_{\pi_0}}$ als formaler Wert mit einem vollständigen Teilnenner η_ν einer knappsten oder fast-knappsten Entwicklung überein, dann müssen auch die auf $\xi'_{h_{\pi_0}}$ folgenden ξ'_ν mit den Indizes $h_{\pi_0}+1$, $h_{\pi_0}+2, \ldots$, $h_{\pi_1}-1$ mit einer der auf η_ν in einer knappsten oder fast-knappsten Entwicklung folgenden Sequenz von vollständigen Teilnennern übereinstimmen, da ja sowohl unsere Entwicklung mit $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} = W_{p_0, p_1}$ als auch die knappsten und fast-knappsten Entwicklungen für die Indizes $h_{\pi_0}, \ldots, h_{\pi_1}-1$ nach dem gleichen Prinzip gebildet werden. Nun braucht aber $\xi'_{h_{\pi_0}}$ als formaler Wert in gar keiner knappsten oder fast-knapsten Entwicklung vorzukommen und zwar kommt $\mathfrak{a}$) der erste Unterfall von Satz VIBα) in keiner knappsten oder fast-knappsten Entwicklung vor, wenn $\xi_{N_{\pi_0}-1} > 3$ ist, $\mathfrak{b}$) der zweite, wenn $\xi_{N_{\pi_0}-1}$ das letzte ξ_ν einer Sequenz von ungeradzahlig vielen minimalen VT-Werten ist, und $\mathfrak{c}$) der vierte, wenn $\xi_{N_{\pi_0}+1}$ das erste ξ_ν einer Sequenz von ungeradzahlig vielen minimalen VT-Werten ist. Für $\mathfrak{a}$) ($\xi'_{h_{\pi_0}} = \xi_{N_{\pi_0}} + 1$) und $\mathfrak{b}$) ($\xi'_{h_{\pi_0}} = \xi_{N_{\pi_0}}$) stimmt nun aber die weitere Entwicklung von $\xi'_{h_{\pi_0}}$ überein mit der in der knappsten oder fast-knappsten Entwicklung vorkommenden Entwicklung von $\xi_{N_{\pi_0}}$, resp. von $\xi_{N_{\pi_0}}+1$. Was nun $\mathfrak{c}$) betrifft, so kann dieser Ausnahmefall weder in einer Entwicklung mit $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} = W_{p_0, p_1}$ noch in einer knappsten oder fast-knappsten Entwicklung vorkommen, weil nämlich sonst die Klasse $A_{\xi_{N_{\pi_0}+1}}$, die doch zum ersten ξ_ν einer Sequenz von ungeradzahlig vielen minimalen VT-Werten gehört, nicht übersprungen werden kann. Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Wenden wir nun a) auf den endlichen Kettenbruch einer rationalen Zahl ξ_0 an, und setzen speziell $p_0 = 0$ und p_1 gleich dem letzten Index der regelmässigen Entwicklung. Dann ist also $h_{\pi_1} - h_{\pi_0} = h_{\pi_1} \geqq W_{p_0, p_1}$, wo das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn die Entwicklung für die Indizes $h_{p_0} + 1 = 1, 2, \ldots, h_{p_1} - 1$ mit dem entsprechenden Teil einer knappsten oder fast-knappsten Entwicklung übereinstimmt. Da aber einerseits durch ξ_1' auch a_0' eindeutig bestimmt ist und andrerseits die Anzahl der Indizes der endlichen Entwicklung gleich $h_{p_1} + 1 +$ der Anzahl der Indizes ist, die ausser h_{p_1} in G_{p_1} vorkommen, so folgt, dass die knappsten und die fast-knappsten Entwicklungen und nur diese kürzeste Entwicklungen sind.

Die Frage nach den längsten Entwicklungen einer rationalen Zahl ist viel einfacher zu beantworten. Existiert nämlich eine Entwicklung, bei der keine einzige Klasse A_{ξ_n} übersprungen wird und bei der aus jeder Klasse A_{ξ_n} die maximale Anzahl von Werten entnommen wird, bei der also jede Gruppe G_ν die maximale Anzahl von Indizes enthält, so ist diese Entwicklung eine längste. Aus den Ausführungen über die ausführlichsten Entwicklungen folgt aber sofort, dass erstens die ausführlichste Entwicklung eine längste Entwicklung ist und zweitens, dass es keine andere Entwicklung gibt, die gleich viele Glieder aufweist wie die ausführlichste Entwicklung. Wir wollen diese Resultate noch zusammenfassen:

Zusatz zu Satz VIII: Die knappsten und die fast-knappsten Entwicklungen einer rationalen Zahl ξ_0 und nur diese sind kürzeste Entwicklungen und die ausführlichste ist die einzige längste Entwicklung von ξ_0. Fast-knappste Entwicklungen existieren nur, wenn in der regelmässigen Entwicklung Sequenzen von geradzahlig vielen minimalen VT-Werten vorkommen. ξ_0 besitzt nur eine einzige kürzeste Entwicklung, nämlich die Entwicklung nach nächsten Ganzen, wenn in der regelmässigen Entwicklung von ξ_0 erstens immer auf den Teilnenner 2 der Teilnenner 1 folgt und zweitens nur Sequenzen von ungeradzahlig vielen minimalen VT-Werten auftreten [14]).

III. Über die Periodizität der halbregelmässigen Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalitäten.

§ 9. Die Gesamtheit der ξ_n' für alle halbregelmässigen Entwicklungen einer quadratischen Irrationalität ξ_0.

Wir müssen zunächst den Satz erwähnen, den Lagrange (1) als erster bewiesen hat:

---

[14]) Die erste Teilbehauptung dieses Zusatzes folgt auch aus einem Satz von Vahlen in Verbindung mit Satz VII. Vahlen hat nämlich gezeigt, dass es unter allen halbregelmässigen Entwicklungen einer rationalen Zahl ξ_0 keine Entwicklung gibt, die weniger Glieder besitzt als die Entwicklung nach nächsten Ganzen (eine Tatsache, die übrigens schon von Kronecker in seinen Vorlesungen zur Zahlentheorie vermutungsweise ausgesprochen worden war), und dass unter allen halbregelmässigen Entwicklungen die Entwicklung nach entferntern Ganzen die längste Entwicklung ist.

a) Die regelmässige Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalität ist periodisch [15]).

Die ξ_n in der regelmässigen Entwicklung einer quadratischen Irrationalität ξ_0 nehmen also nur endlich viele verschiedene Werte an. Es gibt mit andern Worten für eine quadratische Irrationalität nur eine endliche Anzahl Klassen A_{ξ_n}, die sich in ihren numerischen Werten unterscheiden. Nach den Definitionen in § 4 enthält jede Klasse A_ξ nur endlich viele Werte und nach Satz III ist die Gesamtheit der ξ_n' aller halbregelmässigen Entwicklungen einer Zahl ξ_0 identisch mit der Gesamtheit aller Werte von V_{ξ_0} nach Weglassen $\xi_1 - 1$. Wir haben damit den folgenden Satz gefunden:

Satz IX. Die Anzahl der numerischen Werte, die als ξ_n' in allen halbregelmässigen Entwicklungen einer quadratischen Irrationalität ξ_0 vorkommen, ist endlich.

Aus Satz IX können wir sofort folgern:

Korollar zu Satz IX. Unter den vollständigen Teilnennern ξ_n' einer beliebigen, aber festen halbregelmässigen Entwicklung einer quadratischen Irrationalität kommt stets ein bestimmter Zahlenwert Ξ unendlich oft vor [16]).

§ 10. E_σ - Entwicklungen.

Definition: Wir wollen halbregelmässige Kettenbruchentwicklungen einer Zahl ξ_0, bei denen das Vorzeichen von ε_{n+1} in (1,1) durch $\xi_n, a_{n-1}\dots, a_{n-\sigma}$ [17]) — nach einer eindeutigen, aber im übrigen restlos willkürlichen Vorschrift — bestimmt wird, als *E_σ-Entwicklungen* bezeichnen

Für diese E_σ-Entwicklungen gilt:

Satz X. Jede E_σ-Entwicklung einer quadratischen Irrationalität ist periodisch.

[15]) Bewiesen zuerst von Lagrange (1) und später auf andere Art von Charves.

[16]) Diese im Korollar zu Satz IX ausgedrückte Tatsache werden wir im zweiten Teil in § 6 aus ganz andern Überlegungen nochmals herleiten.

[17]) Da durch $\xi_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-\sigma}$ die Folge der $\xi_n, \dots, \xi_{n-\sigma}$ eindeutig bestimmt ist, so könnte man in der Definition der E_σ-Entwicklung $\xi_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-\sigma}$ auch durch $\xi_n, \dots, \xi_{n-\sigma}$ ersetzen.

Beweis: Nach dem Korollar zu Satz IX existiert eine unendliche Folge von ξ_{n_k}, für die $\xi_{n_k} = \Xi$ gilt. Jedem dieser ξ_{n_k} entspricht ein a_{n_k}, das entweder gleich $[\Xi]$ oder gleich $[\Xi]+1$ ist. Also muss a_{n_k} mindestens unendlich oft gleich dem einen der beiden Werte sein. Wir greifen nun aus den n_k eine unendliche Teilfolge n_k' heraus, für die $a_{n_i'} = a_{n_j'}$ und daher nach (1,1) $\xi_{n_i'+1} = \xi_{n_j'+1}$ ist. Nach den gleichen Überlegungen können wir aus der Folge der n_k' eine unendliche Teilfolge n_k'' auswählen, für die $a_{n_i''+1} = a_{n_j''+1}$ und daher nach (1,1) $\xi_{n_i''+2} = \xi_{n_j''+2}$ gilt. Dieses Verfahren wiederholen wir σ-mal und erhalten auf diese Weise eine Folge $n_k^{(\sigma)}$, für die $\xi_{n_i^{(\sigma)}+\sigma} = \xi_{n_j^{(\sigma)}+\sigma}$ und $a_{n_i^{(\sigma)}+\tau} = a_{n_j^{(\sigma)}+\tau}$ und eo ipso $\xi_{n_i^{(\sigma)}+\tau} = \xi_{n_j^{(\sigma)}+\tau}$ für $\tau = 0, 1, \dots, \sigma\text{-}1$ gilt.

Greifen wir zwei dieser $\xi_{n_k^{(\sigma)}+\sigma}$ heraus und bezeichnen sie kurz mit ξ_p und ξ_q. Dann gilt also $\xi_p = \xi_q$ und $a_{p-\tau} = a_{q-\tau}$ für $\tau = 1, 2, \dots, \sigma$. Nun ist nach (1,1) $\xi_p = a_p - \frac{\varepsilon_{p+1}}{\xi_{p+1}}$ und $\xi_q = a_q - \frac{\varepsilon_{q+1}}{\xi_{q+1}}$. Bei einem E_σ-Kettenbruch hängt nun das Vorzeichen von ε_{n+1} von $\xi_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-\sigma}$ ab. Da nun p und q Indizes von der Form $n_k^{(\sigma)}+\sigma$ sind, so lautet die Vorschrift in beiden Fällen gleich, d. h. es gilt $\varepsilon_{p+1} = \varepsilon_{q+1}$ und damit nach (1,1) auch $\xi_{p+1} = \xi_{q+1}$. Diesen Schluss kann man der Reihe nach auf ξ_{p+1} und ξ_{q+1}, ξ_{p+2} und ξ_{q+2}, usw. anwenden und erhält so $a_{p+k} = a_{q+k}$ und $\varepsilon_{p+k} = \varepsilon_{q+k}$, womit wir die Periodizität eines E_σ - Kettenbruches bewiesen haben.

Um die speziellen Fälle von E_σ- Entwicklungen etwas zu illustrieren, geben wir zunächst die allgemeine E_0 - Entwicklung an:

a) Man ordnet jedem Punkt α des positiv reellen Zahlstrahls ein Vorzeichen $\varepsilon(\alpha)$ zu. Wenn nun $\xi_n = \alpha$ ist, dann werde $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon(\alpha)$ gewählt.

Eine speziellere Art dieser allgemeinen Entwicklung ist die Folgende:

b) Man ordnet jedem Punkt β des Intervalles (0,1) ein Vorzeichen $\varepsilon(\beta)$ zu. Ist dann $\xi_n - [\xi_n] = \beta$, dann werde $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon(\beta)$ gewählt.

In die Klasse der E_0 - Entwicklungen fallen mehrere gebräuchliche Kettenbruchentwicklungen, von denen wir hier die bekanntesten Beispiele mit den ihnen entsprechenden Kettenbrüchen erwähnen wollen [18])

[18]) Für einen Teil dieser Entwicklungen ist der Beweis für die Periodizität der Entwicklung einer quadratischen Irrationalität schon früher erbracht worden, so

für c_1) von Lagrange (1) und von Charves,

für c_2) von Cahen (S. 413) und von Perron (S. 168) (Lagrange bezeichnet diese Entwicklung als „développement par excès"),

c_1) regelmässige Entwicklung: $\varepsilon(\alpha) = -1$,
regelmässiger Kettenbruch: $\varepsilon_\nu = -1$ für $\nu \geqq 1$;

c_2) Entwicklung nach grössern Näherungsbrüchen: $\varepsilon(\alpha) = +1$ [19]),
reduziert-regelmässiger Kettenbruch: $\varepsilon_\nu = +1$ für $\nu \geqq 1$;

c_3) Entwicklung nach geraden Ganzen: Es sei τ eine positive ganze Zahl.

$$\varepsilon(\alpha) = +1 \text{ für } 2\tau - 1 < a < 2\tau \text{ und}$$
$$\varepsilon(\alpha) = -1 \text{ für } 2\tau < \alpha < 2\tau + 1,$$

Kettenbruch mit geraden Teilnennern: $a_\nu = 2\tau$;

c_4) Entwicklung nach ungeraden Ganzen: (analog c_3)
Kettenbruch mit ungeraden Teilnenner: $a_\nu = 2\tau + 1$;

c_5) Entwicklung nach nächsten Ganzen:

$$\varepsilon(\beta) = -1 \text{ für } 0 < \beta \leqq \frac{1}{2}$$
$$\varepsilon(\beta) = +1 \text{ für } \frac{1}{2} < \beta < 1,$$

Kettenbruch nach nächsten Ganzen: $a_\nu \geqq 2$, $a_\nu - \varepsilon_{\nu+1} \geqq 2$ für $\nu \geqq 1$;

c_6) Entwicklung nach entferntern Ganzen: (analog c_5),
Kettenbruch nach entferntern Ganzen: $a_\nu \leqq 2$, $a_\nu - \varepsilon_{\nu+1} \leqq 2$ für $\nu \geqq 1$;

c_7) singuläre Entwicklung:

$$\varepsilon(\beta) = -1 \quad \text{für} \quad 0 < \beta < \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$
$$\varepsilon(\beta) = +1 \quad \text{für} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqq \beta < 1,$$

singulärer Kettenbruch: $a_\nu \geqq 2$, $a_\nu - \varepsilon_\nu \geqq 2$ für $\nu \geqq 1$ [20]).

c_8) λ — Entwicklung:

$$\varepsilon(\beta) = -1 \text{ für } 0 < \beta \leqq \lambda,$$
$$\varepsilon(\beta) = +1 \text{ für } \lambda < \beta < 1.$$

---

für c_3) von Stephen Smith und von Humbert,
für c_5) von Minnigerode und von Hurwitz,
für c_7) von Perron (S. 182).

[19]) Dass für diese so gebildete Entwicklung einer Zahl ξ_0 für $\nu \geqq 1$ $\frac{P_\nu}{Q_\nu} > \xi_0$ gilt, d. h. also dass die Bezeichnung „Entwicklung nach grössern Näherungsbrüchen" berechtigt ist, werden wird erst im zweiten Teil (Fussnote 4) zeigen. Aus der gleichen Fussnote kann man auch entnehmen, dass man die Entwicklung nach kleinern Näherungsbrüchen (auf französisch als „développement par défaut" bezeichnet) erhält, wenn man $\varepsilon_1 = -1$ und für $\nu \geqq 2$ $\varepsilon_\nu = +1$ wählt.

[20]) Hurwitz, der die singulären Entwicklungen zuerst studiert hat, bezeichnet sie als „Entwicklungen zweiter Art". Die Bezeichnung „singuläre Entwicklung" stammt von

Der entsprechende Kettenbruch lässt sich nicht einfach charakterisieren [21]).

§ 11. E_σ P-Entwicklungen.

Definition: Wir ordnen jeder ganzen Zahl $n \geqq n_0$ ein E_σ - Gesetz zu und bestimmen dann das Vorzeichnen von ε_{n+1} nach dem E_σ - Gesetz, das dem Index n zugeordnet ist. Ist die Zuordnung der E_σ-Gesetze zum Index n im besondern periodisch in n für $n \geqq n_0$, so wollen wir von einer E_σ P-*Entwicklung* sprechen. (In diesem Fall ist σ eine periodische Funktion von n).

Für solche Entwicklungen gilt:

Satz XI. Jede E_σ P-Entwicklung einer quadratischen Irrationalität ist periodisch.

Beweis: Wir bezeichnen das dem Index n zugeordnete E_σ-Gesetz mit E_{σ_n}. Bei einer E_σP-Entwicklung muss für $N \geqq N_0$ und für $t = 1,2,\ldots$ $E_{\sigma_{N+\nu}} = E_{\sigma_{N+tk+\nu}}$ sein, wo die „Periode" k ein feste Zahl ist. Laut Definition der E_σ-Entwicklung in § 6 gilt dann für ganze positive t auch $\sigma_{N+\nu} = \sigma_{N+tk+\nu}$. Es sei nun Σ gleich dem grössten der sich periodisch wiederholenden $\sigma_{N+\nu}$. Wir betrachten dann die Teilfolge $n_k^{(\Sigma)}$ der Indizes n, die entsprechend definiert ist wie die Teilfolge $n_k^{(\sigma)}$ im Beweis zu Satz X. Für diese $n_k^{(\Sigma)}$ gilt also: $\xi_{n_i^{(\Sigma)}+\Sigma} = \xi_{n_j^{(\Sigma)}+\Sigma}$ und $a_{n_i^{(\Sigma)}+\nu} = a_{n_j^{(\Sigma)}+\nu}$ für $\nu = 0,1,2,\ldots,\Sigma-1$. Nun müssen unter den ersten $N+k$ $n_j^{(\Sigma)}$ mindestens zwei $n_i^{(\Sigma)}$, nämlich $n_{i_1}^{(\Sigma)}$ und $n_{i_2}^{(\Sigma)}$, existieren, für die $n_{i_2}^{(\Sigma)} > n_{i_1}^{(\Sigma)} \geqq N$ und $n_{i_2}^{(\Sigma)} - n_{i_1}^{(\Sigma)} = t_1 k$ gilt, wo t_1 eine ganze Zahl ist. Also ist $E_{n_{i_1}^{(\Sigma)}} = E_{n_{i_2}^{(\Sigma)}}$, d. h.

Perron. Die Definition der singulären Entwicklung deckt sich nun nicht im vollen Umfange mit der Definition des singulären Kettenbruches, indem zwar jede singuläre Entwicklung ein singulärer Kettenbruch, aber nicht jeder singuläre Kettenbruch eine singuläre Entwicklung ist. Nach der Vorschrift für die singuläre Entwicklung gibt es zu jeder Zahl ξ_0 eine und nur eine singuläre Entwicklung. Die Definition der singulären Kettenbrüche dagegen lässt es zu, dass gewisse singuläre Kettenbrüche, nämlich die Kettenbrüche von der Form $g + \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \ldots$ und $g + 1 - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - - \ldots$, wo g eine ganze Zahl ist, den gleichen Wert, nämlich $g + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, besitzen.

[21]) Die beiden einfachsten und gleichzeitig wichtigsten Spezialfälle dieser allgemeinen Entwicklung c_8) haben wir schon erwähnt, nämlich die beiden Entwicklungen c_5) und c_7). Die allgemeine Entwicklung c_8) hat Th. E. Mc. Kinney untersucht.

$\xi_{n_{l_1}}^{(\Sigma)}$ und $\xi_{n_{l_2}}^{(\Sigma)}$ die ja einander gleich sind, werden nach der gleichen Vorschrift entwickelt. Damit haben wir also die Gleichheit von $\varepsilon_{n_{l_1}+1}$ und $\varepsilon_{n_{l_2}+1}$ bewiesen und somit auch von $a_{n_{l_1}}$ und $a_{n_{l_2}}$ und von $\xi_{n_{l_1}+1}$ und $\xi_{n_{l_2}+1}$. Nun wenden wir der Reihe nach die gleiche Überlegung auf $\xi_{n_{l_1}+1}$ und $\xi_{n_{l_2}+1}$, auf $\xi_{n_{l_1}+2}$ und $\xi_{n_{l_2}+2}$, usw. an und erhalten so für alle $\nu \geqq 0$ $a_{n_{l_1}+\nu} = a_{n_{l_2}+\nu}$ und $\varepsilon_{n_{l_1}+\nu} = \varepsilon_{n_{l_2}+\nu}$. Damit ist der Satz XI bewiesen.

In die Klasse der $E_\sigma P$-Entwicklungen fällt der folgende, in der Literatur schon bekannte Fall:

Den Indizes n werden die Gesetze c_1 und c_2 in § 6 periodisch zugeordnet, d. h. einfacher gesagt: die ε_n werden periodisch vorgegeben [22]).

§ 12. Diagonalkettenbrüche. [23])

Die Periodizität der Diagonalkettenbrüche quadratischer Irrationalitäten lässt sich mit Hilfe des Korollars zu Satz IX ebenfalls einfach beweisen. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst folgenden interessanten Satz:

Satz XII. Die reguläre (periodische) Entwicklung einer quadratischen Irrationalität ξ_0 *laute* $\xi_0 = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots$, wo für alle $h \geqq H$ und alle $t \geqq 1$ $a_{h+tk} = a_h$ gilt. Dann kann sich die Entwicklung von ξ_h innerhalb der Diagonalkettenbruchentwicklung von ξ_0 höchstens innerhalb der ersten $k+1$ Glieder von der Diagonalkettenbruchentwicklung von ξ_h unterscheiden.

---

22) Den Satz und den Beweis für diesen speziellen Fall findet man bei Perron (S. 166).

23) Siehe z. B. Perron S. 182 ff.: Man erhält den Diagonalkettenbruch einer Zahl ξ_0, indem man in der regulären Entwicklung für ξ_0 diejenigen $a_{n+1} = 1$ durch eine gewisse Transformation eliminiert, für die $\left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| \geqq \frac{1}{2Q_n^2}$ ist. $a_{n+1} = 1$ ist zwar notwendig für das Bestehen dieser Ungleichung, aber nur für $n = 0$ hinreichend; für $n > 0$ ist notwendig und hinreichend das Bestehen der Gleichung $a_{n+1} = 1$ und der Ungleichungen

$$(12{,}1)\quad \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|a_{n+2}-1} + \frac{1|}{|a_{n+3}} + \ldots \geqq \frac{1|}{|a_n} + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|a_1},\ \text{wenn } a_{n+2} > 2 \text{ ist, oder}$$

$$(12{,}2)\quad \frac{1|}{|1+a_{n+3}} + \frac{1|}{|a_{n+4}} + \ldots \geqq \frac{1|}{|a_n} + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|a_1},\ \text{wenn } a_{n+2} = 1 \text{ ist.}$$

Beweis: Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$\frac{P_{i,n}}{Q_{i,n}} = a_i - \frac{\varepsilon_{i+1}|}{|a_{i+1}} - \frac{\varepsilon_{i+2}|}{|a_{i+2}} - \ldots - \frac{\varepsilon_n|}{|a_n}.$$

Um den Satz XII zu beweisen, zeigen wir, dass man in der regelmässigen Entwicklung von ξ_0 vom Index $h+k+1$ an die gleichen Glieder stehen lassen oder transformieren muss wie in der regelmässigen Entwicklung von ξ_h vom Index $k+1$ an, um die Diagonalkettenbruchentwicklung von ξ_0 und die von ξ_h zu erhalten. Zu diesem Zweck müssen wir also nachweisen, dass für $n \geqq h+k+1$ immer mit

$$(12{,}3)\quad \left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{2Q_n^2} \quad \text{auch} \quad (12{,}4)\quad \left|\xi_h - \frac{P_{h,n}}{Q_{h,n}}\right| < \frac{1}{2Q_{h,n}^2}$$

und mit

$$(12{,}5)\quad \left|\xi_0 - \frac{P_n}{Q_n}\right| \geqq \frac{1}{2Q_n^2} \quad \text{auch} \quad (12{,}6)\quad \left|\xi_h - \frac{P_{h,n}}{Q_{h,n}}\right| \geqq \frac{1}{2Q_{h,n}^2}$$

gilt. Ist $a_{n+1} \geqq 2$, dann gilt nach Fussnote 23 sowohl (12,3) wie auch (12,4). Ist $a_{n+1} = 1$, dann müssen wir zeigen, dass für $a_{n+2} \geqq 2$ mit (12,1) auch

$$(12{,}7)\quad \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|a_{n+2}-1} + \frac{1|}{|a_{n+3}} + \ldots \geqq \frac{1|}{|a_n} + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|a_{h+1}}$$

und für $a_{n+2} = 1$ mit (12,2) auch

$$(12{,}8)\quad \frac{1|}{|1+a_{n+3}} + \frac{1|}{|a_{n+4}} + \ldots \geqq \frac{1|}{|a_n} + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \ldots + \frac{1|}{|a_{h+1}}$$

und umgekehrt mit (12,7) auch (12,1) und mit (12,8) auch (12,2) gilt. Hier müssen wir eine kleine Hilfsbetrachtung einschalten. Wir behaupten, dass aus

$$c_0 + \frac{1|}{|c_1} + \frac{1|}{|c_2} + \ldots \geqq d_0 + \frac{1|}{|d_1} + \frac{1|}{|d_2} + \ldots + \frac{1|}{|d_n},$$

wo der Kettenbruch links unendlich ist und wo mindestens für ein $\nu \leqq i < n$ $c_\nu \neq d_\nu$ gilt,

$$c_0 + \frac{1|}{|c_1} + \frac{1|}{|c_2} + \ldots \geqq d_0 + \frac{1|}{|d_1} + \frac{1|}{|d_2} + \ldots + \frac{1|}{|d_i}$$

und umgekehrt folgt. Bezeichnen wir die vollständigen Teilnenner des Kettenbruches $c_0 + \frac{1|}{|c_1} + \ldots$ mit ξ_ν, die des Kettenbruches $d_0 + \frac{1|}{|d_1} + \ldots$ mit η_ν. Ist nun ν_0 der erste Index, für den $c_{\nu_0} \neq d_{\nu_0}$ gilt, so gilt mit $c_{\nu_0} > d_{\nu_0}$

auch $\xi_{\nu_0} = c_{\nu_0} + \frac{1}{\xi_{\nu_0+1}} > \eta_{\nu_0} = d_{\nu_0} + \frac{1}{\eta_{\nu_0+1}}$ und mit $c_{\nu_0} < d_{\nu_0}$ auch $\xi_{\nu_0} < \eta_{\nu_0}$. Daraus sehen wir, dass die Ungleichheit der beiden Kettenbrüche durch die Werte von c_{ν_0} und d_{ν_0} bedingt ist und durch die Abänderung der auf c_{ν_0} und d_{ν_0} folgenden Glieder gar nicht mehr beeinflusst wird. Nebenbei wollen wir noch bemerken, dass für gerades ν_0 $c_{\nu_0} > d_{\nu_0}$, für ungerades ν_0 $c_{\nu_0} < d_{\nu_0}$ gelten muss.

Aus dieser Betrachtung können wir also entnehmen, dass mit (12,1) (12,7), resp. mit (12,2) (12,8) und umgekehrt gilt, wenn sich die beiden Kettenbrüche in (12,1), resp. (12,2) in mindestens einem der ersten n—h Glieder unterscheiden. Nun ist sicher entweder $a_{n+2} - 1 \neq a_{n-1}$ oder $a_{n+k+2} \neq a_{n-k-1}$ oder beides; denn aus $a_{n+k+2} = a_{n-k-1}$ würde wegen $n - k - 1 \geqq h$ vermöge der Periodizität des regulären Kettenbruches $a_{n+2} = a_{n-1}$ folgen, was nicht gleichzeitig mit $a_{n+2} - 1 = a_{n-1}$ erfüllt sein kann. Analog schliesst man im Fall (12,2). Damit haben wir also den Beweis des Satzes XII erbracht.

Damit kommen wir zum

Satz XIII. Der Diagonalkettenbruch einer quadratischen Irrationalität ξ_0 ist periodisch [24]).

Beweis: Nach dem Korollar zu Satz IX kommt in der regulären Entwicklung einer quadratischen Irrationalität der gleiche Zahlenwert unter den ξ_n unendlich oft vor. Sobald zum ersten Mal ein ξ_{n_2} gleich einem vorhergehenden ξ_{n_1} wird, beginnt die Periodizität des regelmässigen Kettenbruches. Wenn $n_2 - n_1 = k$ ist, so beginnt nach Satz XII spätestens mit dem Index $n_1 + k + 1$ die Periodizität des Diagonalkettenbruches, denn nach Satz XII stimmen die Entwicklungen von ξ_{n_1} und von ξ_{n_2} in der Diagonalkettenbruchentwicklung von ξ_0 sicher nach den ersten $k+1$ Gliedern überein mit der Diagonalkettenbruchentwicklung von $\xi_{n_1} = \xi_{n_2}$, d. h. aber, dass die Entwicklungen von ξ_{n_1} und von ξ_{n_2} in der Diagonalkettenbruchentwicklung von ξ_0 nach $k+1$ Gliedern übereinstimmen, womit Satz XIII bewiesen ist.

---

[24]) Minkowski, von dem dieser Satz stammt, hat den Beweis auf andere Weise erbracht.

§ 13. Eine invariante Eigenschaft der Periode.

Die regelmässige Entwicklung der quadratischen Irrationalität ξ_0 laute:

$$\xi_0 = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots,$$

wo $a_n = a_{n+tk_0}$ für $n \geqq n_0$, $t \geqq 0$ und eine feste ganze Zahl $k_0 \geqq 1$ ist. Daneben betrachten wir eine halbregelmässige periodische Entwicklung E' der gleichen Zahl ξ_0:

$$\xi_0 = a_0' - \frac{\varepsilon_1'|}{|a_1'} - \frac{\varepsilon_2'|}{|a_2'} - \ldots,$$

wo $a_n' = a'_{n+t.k}$ und $\varepsilon_n' = \varepsilon'_{n+t.k}$ für $n \geqq n_1$, $t \geqq 0$ und für eine festes, ganzzahliges $k \geqq 1$ ist. In beiden Fällen wähle man für k_0, resp. k die Länge der primitiven Periode (siehe § 1).

Wir können nun die erste Periode von E' immer so wählen, dass sie mit einem Hauptindex $h_{\nu_0} \geqq n_1 + 1$ beginnt. Nach den Definitionen der Hauptindizes in § 4 beginnen dann aber auch alle folgenden Perioden mit einem Hauptindex und zwar sogar mit einem Hauptindex der gleichen Art; denn, ob ein Index n Hauptindex ist oder nicht und, wenn er Hauptindex ist, ob er ein Hauptindex erster oder zweiter Art ist, hängt einzig und zwar in eindeutiger Weise von ε'_{n-1}, ε_n', ξ'_{n-1} und ξ_n' ab. Diese vier Grössen haben aber für die Indizes $h_{\nu_0} + tk$ den gleichen numerischen Wert, weil ja k die Länge der Periode und weil $h_{\nu_0} \geqq n_1 + 1$ ist. Wir wollen diese Indizes $h_{\nu_0} + tk$ mit h_{ν_t} bezeichnen, so dass also für $t \geqq 1$ $h_{\nu_t} = h_{\nu_{t-1}} + k$ gilt. Die durch diese h_{ν_t} festgelegten Perioden erstrecken sich also über eine Anzahl ganzer Gruppen G_ν. Nach dem Korollar zu Satz VII erhalten wir:

$$\sum_{\mu=h_{\nu_0}}^{h_{\nu_0+k_0}-1} [\xi_\mu'] = \sum_{\mu=h_{\nu_0}}^{h_{\nu_1}-1} [\xi_\mu'] = \sum_{\mu=1}^{h_{\nu_1}-1} [\xi_\mu'] - \sum_{\mu=1}^{h_{\nu_0}-1} [\xi_\mu'] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N_{\nu_1}-1} [\xi_n] - i^*_{h_{\nu_1}} - \sum_{n=1}^{N_{\nu_0}-1} [\xi_n] + i^*_{h_{\nu_0}} =$$

$$= \sum_{n=N_{\nu_0}}^{N_{\nu_1}-1} [\xi_n] - i^*_{h_{\nu_1}} + i^*_{h_{\nu_0}} = \sum_{n=N_{\nu_0}}^{N_{\nu_1}-1} [\xi_n],$$

denn es ist $i^*_{h_{\nu_1}} = i^*_{h_{\nu_0}}$, weil $h_{\nu_1} = h_{\nu_0} + k$ und weil $h_{\nu_0} \geqq n_1 + 1$ ist.

Da alle h_{ν_t} Hauptindizes der gleichen Art sind und da die $\varepsilon'_{h_{\nu_t}}$ für alle $t \geqq 0$ den gleichen Wert haben, so wird nach der Zuordnungsvorschrift in § 6 jedem h_{ν_t} der gleiche formale Wert zugeordnet. Da aber alle $\xi'_{h_{\nu_t}}$ den gleichen numerischen Wert haben, so müssen auch alle $\xi_{N_{\nu_t}}$ den gleichen Wert haben. Was aber für die h_{ν_t} gilt, gilt auch für die übrigen Hauptindizes $h_{\nu_t+\sigma}$, wo $0 \leqq \sigma \leqq \nu_1 - \nu_0 - 1$ ist, denn wir können ja die Periode immer so wählen, dass jeder Hauptindex $h_{\nu_0+\sigma}$ die Rolle des ersten Hauptindex in der ersten Periode übernimmt. Daraus folgt also, dass für ein festes σ, wo $0 \leqq \sigma \leqq \nu_1 - \nu_0 - 1$ ist, immer $\xi_{N_{\nu_t+\sigma}} = \xi_{N_{\nu_0+\sigma}}$ gilt. Weiter ist klar, dass, wenn in der ersten Periode eine gewisse Klasse A_{ξ_n} übersprungen wird, auch in jeder folgenden Periode an der entsprechenden Stelle eine Klasse übersprungen wird; denn nach Satz VB hängt die notwendige und hinreichende Bedingung für das Überspringen einer Klasse nur mit der Art eines gewissen Hauptindex und der Grösse gewisser a_n' und ε_n' zusammen, also mit Grössen, die sich periodisch wiederholen. Daraus ergibt sich, dass die Indizes N_{ν_t} die regelmässige Entwicklung in Perioden einteilen, wobei man beachten muss, dass $N_{\nu_1} - N_{\nu_0}$ im allgemeinen ein Vielfaches der Länge der primitiven Periode sein wird. Also gilt $N_{\nu_1} - N_{\nu_0} = \rho k_0$, wo ρ eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist. Somit haben wir gefunden, dass $\sum\limits_{n=N_{\nu_0}}^{N_{\nu_1}-1} [\xi_n] = \rho \sum\limits_{n=N}^{N+k_0-1} [\xi_n]$ ist. Berücksichtigen wir noch (1,10), so können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz XIV. Es sei k die Länge der primitiven Periode einer halbregelmässigen (periodischen) Entwicklung von ξ_0 und k_0 die der regelmässigen Entwicklung von ξ_0, und es sei die halbregelmässige Entwicklung vom Index n_1 und die regelmässige Entwicklung von Index n_0 an periodisch. Ist $n_{\nu_0} \geqq n_1 + 1$ ein Hauptindex der halbregelmässigen Entwicklung, dann ist auch $h_{\nu_0} + k = h_{\nu_1}$ ein Hauptindex der Entwicklung, und es gilt

$$N_{\nu_1} - N_{\nu_0} = \rho\, k_0,$$

wo ρ eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist, sowie für $n \geqq n_1$ und $N \geqq r_0$

$$\sum_{\mu=n}^{n+k-1} [\xi_\mu'] = \rho \sum_{\mu=N}^{N+k_0-1} [\xi_\mu] \text{ oder}$$

$$\sum_{\mu=n}^{n+k-1} \left(a_\mu' - \frac{1+\varepsilon'_{\mu+1}}{2} \right) = \rho \sum_{\mu=N}^{N+k_0-1} a_\mu .$$

Im Anschluss an den Satz XIV wollen wir den folgenden Begriff definieren:

Gilt für eine periodische Entwicklung $\varrho = 1$, so bezeichnen wir die Entwicklung als ***elementarperiodisch***.

§ 14. Die Kettenbruchentwicklungen mit der kürzesten und diejenigen mit der „längsten" Periode.

Wir wollen nun diejenigen Entwicklungen unter allen halbregelmässigen Entwicklungen einer quadratischen Irrationalität ξ_0 angeben, die die kürzeste, resp. die „längste" Periode besitzen. Um den Satz einfach formulieren zu können, wollen wir zunächst den folgenden Begriff definieren:

Stimmt eine halbregelmässige Entwicklung Ψ von ξ_0 von einem beliebigen Index an mit der Entwicklung Φ von ξ_0 überein, so wollen wir die Entwicklung Ψ als eine *zur Entwicklung Φ äquivalente Entwicklung* bezeichnen.

Damit können wir nun den folgenden Satz formulieren:

Satz XV. Unter allen halbregelmässigen Entwicklungen einer quadratischen Irrationalität ξ_0 besitzen nur die elementarperiodischen knappsten und die elementarperiodischen fastknappsten und die zu diesen Entwicklungen äquivalenten Entwicklungen die kürzeste Periode, mit einer Ausnahme: für die Zahlen von der Form $\dfrac{a\,\xi + b}{c\,\xi + d}$, wo $\xi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist und wo a, b, c und d ganze Zahlen sind, die den Bedingungen $c > d > 0$ *und* $ad - bc = \pm 1$ genügen, sind die ausführlichste Entwicklung (die Entwicklung nach entfernten Ganzen) und die zu dieser Entwicklung äquivalenten Entwicklungen ebenfalls Entwicklungen mit kürzester Periode. Mit Ausnahme des eben erwähnten Sonderfalles gilt allgemein, dass die Länge der kürzesten Periode gleich ist der Länge der Periode der regelmässigen Entwicklung vermindert um die Anzahl der ξ_n der Periode, die in einer minimalen VT-Sequenz an ungerader Stelle stehen.

Unter allen elementarperiodischen Entwicklungen besitzen die ausführlichste Entwicklung und die zu dieser Entwicklung äquivalenten Entwicklungen und nur diese die längste Periode, und die Länge dieser längsten Periode ist gleich der Summe der Teilnenner der primitiven Periode der regelmässigen Entwicklung.

Beweis: Wir betrachten zunächst nur solche ξ_0, deren Periode in der regelmässigen Entwicklung nicht aus lauter Einern besteht. Die Bezeichnungen wählen wir wie in § 13, wobei allerdings der Index h_{ν_0} nicht nur der Bedingung $h_{\nu_0} \geqq n_1 + 1$, sondern auch der Bedingung $\xi_{N_{\nu_0}} > 2$ genügen soll. Dass dies möglich ist, folgt aus der Annahme, dass mindestens ein Teilnenner der Periode $\neq 1$ ist, und aus dem Satz VB, der aussagt, dass nur eine Klasse A_{ξ_n} mit einem $\xi_n < 2$ übersprungen werden kann. Nach § 8a) gilt, für $p_0 = N_{\nu_0}$ $(\pi_0 = \nu_0)$ und $p_1 = N_{\nu_1}$ $(\pi_1 = \nu_1)$ geschrieben, $h_{\nu_1} - h_{\nu_0} \geqq W_{p_0,p_1}$, wo das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn die Entwicklung für die Indizes $h_{\nu_0} + 1, \ldots, h_{\nu_1} - 1$ entweder in einer knappsten oder in einer fast-knappsten Entwicklung vorkommt, und wo $W_{p_0,p_1} = N_{\nu_1} - N_{\nu_0} - \sum_{\sigma=1}^{\tau} \left[\frac{\lambda_\sigma + 1}{2}\right]$ ist. Da nach Satz XIV $N_{\nu_1} - N_{\nu_0} = \rho k_0$ ist und da $\lambda_1, \ldots, \lambda_\tau$ die Längen der Sequenzen minimaler VT-Werte zwischen den Indizes N_{ν_0} und N_{ν_1} sind, so gilt $W_{p_0,p_1} = W_{p_0,p_0+\rho k_0} = \rho\, W_{p_0,p_0+k}$. Wir erhalten also die Entwicklungen mit der kürzesten Periode, wenn $h_{\nu_1} - h_{\nu_0} = k = W_{p_0,p_0+k_0}$ gilt. Diese Bedingung ist sicher erfüllt bei den elementarperiodischen knappsten und bei den elementarperiodischen fast-knappsten Entwicklungen und bei den zu diesen Entwicklungen äquivalenten Entwicklungen. Das sind aber auch die einzigen Entwicklungen, die diese Bedingung erfüllen. Denn: Gilt für eine periodische Entwicklung $h_{\nu_1} - h_{\nu_0} = k = W_{p_0,p_0+k_0}$, so gilt auch für ein ganzzahliges $t \geqq 2$ $h_{\nu_t} - h_{\nu_0} = tk = tW_{p_0,p_0+k} = W_{p_0,p_0+tk}$. Nach § 8a) stimmt also die Entwicklung für die Indizes $h_{\nu_0} + 1, h_{\nu_0} + 2, \ldots, h_{\nu_t} - 1$ mit einem Teil einer knappsten oder einer fast-knappsten Entwicklung überein, also, was uns speziell interessiert, auch für die Indizes $h_{\nu_1}, h_{\nu_2}, \ldots, h_{\nu_{\tau-1}}$. Da nun aber $h_{\nu_\tau} = h_{\nu_0} + tk$ ist, so gilt die Übereinstimmung schon für den Index h_{ν_0}.

Nun müssen wir noch diejenigen ξ_0 untersuchen, deren regelmässige Entwicklung eine Periode mit lauter Teilnennern 1 besizt. Es sei also

$$\xi_0 = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \ldots + \frac{1|}{|a_{n_0-1}} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots$$

Da ein solches ξ_0 eine regelmässige Entwicklung mit einer primitiven Periode von der Länge 1 besitzt, so kann es keine Entwicklungen mit noch kürzerer Periode geben. So ist also für solche ξ_0, die übrigens den Wert $\frac{\xi_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\xi_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$, wo $\xi_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist [25]), haben, die regelmässige Entwicklung zwar weder eine knappste noch eine fast-knappste Entwicklung, aber doch eine Entwicklung mit kürzester Periode. Für solche ξ_0 existiert übrigens keine andere Entwicklung mit kürzester Periode, weil, wenn man die regelmässige Entwicklung nach der Vorschrift zur Gewinnung einer Entwicklung mit kürzester Periode abändert, man einem Kettenbruch erhält, der gar nicht mehr der Eigenschaft C) der halbregelmässigen Entwicklungen genügt, der also gar keine halbregelmässige Entwicklung der Zahl ξ_0 darstellt. Damit haben wir unsere Behauptung über die Entwicklungen mit der kürzesten Periode bewiesen.

Die Frage nach der Entwicklung einer quadratischen Irrationalität ξ_0 mit der längsten Periode hat nur einen Sinn, wenn wir uns auf elementarperiodische Entwicklungen beschränken, da wir ja sofort Entwicklungen angeben können mit Perioden, deren Längen grösser sind als beliebig gewählte Zahlen (man denke z. B. an geeignet gewählte E_σ P-Entwicklungen (siehe § 11)).

Nach den Ausführungen in § 8 hat nun die ausführlichste Entwicklung einer Zahl ξ_0 und nur diese die Eigenschaft, dass jede Gruppe G_ν die maximale Anzahl von Indizes enthält und dass keine Klasse A_{ξ_n} übersprungen wird. Andrerseits ist die ausführlichste Entwicklung, die nach Satz VIII identisch ist mit der Entwicklung nach entferntem Ganzen, eine elementarperiodische Entwicklung, denn in dieser Entwicklung wird ja keine Klasse A_{ξ_n} übersprungen und der Wert von ξ'_{h_ν} hängt eindeutig mit der Grösse von ξ_{N_ν} zusammen. Also besitzen die ausführlichste Entwicklung und die zu dieser äquivalenten Entwicklungen und nur diese die „längste" Periode.

[25]) Bekanntlich lässt sich auch umgekehrt jede Zahl $\xi_0 = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$, wo $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist und wo a, b, c und d ganze Zahlen sind, die den Bedingungen $ad - bc = \mp 1$ und $c > d > 0$ genügen, in einen Kettenbruch von der Form

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \ldots + \frac{1|}{|a_{n-1}} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots$$

entwickeln (vergleiche Perron S. 47).

Da für die Entwicklung nach entfernten Ganzen (siehe c_σ) in § 10) $[\xi_n'] = 1$ für $\mu \geqq 1$ ist, so folgt sofort aus Satz XIV $k = \sum_{\mu=N}^{N+k_0-1} a_\mu$.[26])

INHALTSVERZEICHNIS.

Einleitung.

---

[26]) Der zweite Teil ist unter dem Titel „Über die Güte der Approximation einer reellen Zahl durch die Näherungsbrüche ihrer halbregelmässigen Kettenbruchentwicklungen" und der dritte Teil unter dem Titel „Über das Wachstum der Näherungsnenner halbregelmässiger Kettenbrüche" in den Commentarii Mathematici Helvetici, Bd. 10, 1937 erschienen.

Verzeichnis der eingeführten Begriffsbildungen.

(Eingegangen am 6. November 1936.)