Sur quelques propriétés de fonctions périodiques et presque-périodiques

par

S. MAZUR et W. ORLICZ (Léopol).

1. Nous considérons dans la Note présente deux classes des fonctions: la classe A des fonctions mesurables périodiques, la classe B des fonctions continues presque-périodiques au sens de M. H. Bohr. Toute fonction dont il sera question dans la suite est, sauf indication contraire, supposée définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Pour toute fonction de la classe B, il existe la valeur moyenne

$$\mathfrak{M}(f)=\lim_{|\omega|\to\infty}\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(x)\,dx;$$

de même, pour toute fonction de la classe A, intégrable de période l, il existe la valeur moyenne et l'on a

$$\mathfrak{M}(f)=\frac{1}{l}\int_0^{l} f(x)\,dx.$$

Nous désignerons par $\{\vartheta_n\}$ une suite arbitraire de nombres, par $\{\omega_n\}$ une suite de nombres tels que $\omega_n \neq 0$ et $\omega_n \to +\infty$; par vrai max $f(x)$ la vraie borne supérieure de $f(x)$ dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

2. Lemme 1. *Si $f(x)$ est une fonction mesurable, bornée et périodique, ou bien une fonction continue et presque-périodique, on a pour toute fonction $g(x)$ intégrable dans l'intervalle (a, b)*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(\omega_n x+\vartheta_n)\,g(x)\,dx=\mathfrak{M}(f)\int_a^b g(x)\,dx \quad (1)$$ [1].

[1]) En principe, on doit ce lemme à L. Fejér; cf. p. ex.: A. Zygmund, Trigonometrical Series, Monografie Matematyczne V, Warszawa-Lwów, 1935, p. 173.

Démonstration. On a dans tout intervalle $(c, d) \subset (a, b)$ où $c \neq 0$ et $d \neq 0$

$$(2)\qquad \int_c^d f(\omega_n x + \vartheta_n)\,dx = d\,\frac{1}{\omega_n d}\int_{\vartheta_n}^{\omega_n d+\vartheta_n} f(x)\,dx - c\,\frac{1}{\omega_n c}\int_{\vartheta_n}^{\omega_n c+\vartheta_n} f(x)\,dx.$$

Si $f(x)$ est une fonction mesurable, bornée et périodique, alors

$$\int_{\vartheta_n}^{\omega_n d+\vartheta_n} f(x)\,dx = \int_0^{\omega_n d} f(x)\,dx, \qquad \int_{\vartheta_n}^{\omega_n c+\vartheta_n} f(x)\,dx = \int_0^{\omega_n c} f(x)\,dx$$

et, n tendant vers l'infini, on obtient

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_c^d f(\omega_n x + \vartheta_n)\,dx = (d-c)\,\mathfrak{M}(f).$$

Cette relation subsiste dans le cas d'une fonction continue presque-périodique, car on a dans ce cas

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta_n}^{\omega+\vartheta_n} f(x)\,dx = \mathfrak{M}(f).$$

De la relation (3), qui reste évidemment exacte si $c = 0$ ou $d = 0$, on déduit la formule (1) pour toute fonction $g(x)$ telle que $g(x) = c_i$ pour $x_{i-1} < x < x_i$ où $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. En approchant en moyenne la fonction intégrable donnée $g(x)$ par de telles fonctions scalariformes, on obtient (1).

Lemme 2. *Si $f_n(x)$ sont des fonctions mesurables, uniformément bornées, ayant une période commune et telles que $\mathfrak{M}(f_n) \to \mathfrak{M}$, on a pour toute fonction $g(x)$ intégrable dans (a, b)*

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(\omega_n x + \vartheta_n)\,g(x)\,dx = \mathfrak{M}\int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente, il suffit d'établir (4) pour la fonction caractéristique d'un intervalle arbitraire $(c, d) \subset (a, b)$ où $c \neq 0$, $d \neq 0$. Remarquons à cet effet que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\Omega > 0$ tel que

$$\left|\mathfrak{M}(f_n) - \frac{1}{\omega}\int_{\vartheta_n}^{\omega+\vartheta_n} f_n(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

pour $|\omega| > \Omega$, quels que soient n et $\{\vartheta_n\}$, et que l'on a la relation

$$\int_c^d f_n(\omega_n x + \vartheta_n)\,dx = d\,\frac{1}{\omega_n d}\int_{\vartheta_n}^{\omega_n d+\vartheta_n} f_n(x)\,dx - c\,\frac{1}{\omega_n c}\int_{\vartheta_n}^{\omega_n c+\vartheta_n} f_n(x)\,dx.$$

Lemme 3. *Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ sont des fonctions mesurables, bornées et périodiques, et si les inverses de leurs périodes sont linéairement indépendants* [2]*, on a pour toute fonction $g(x)$ intégrable dans (a, b)*

$$(5)\qquad \begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b & f_1(\omega_n x+\vartheta_n)\,f_2(\omega_n x+\vartheta_n)\ldots f_k(\omega_n x+\vartheta_n)\,g(x)\,dx \\ &= \mathfrak{M}(f_1)\,\mathfrak{M}(f_2)\ldots\mathfrak{M}(f_k)\int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$ [3].

Démonstration. La fonction $f(x) = f_1(x)\,f_2(x)\ldots f_k(x)$ satisfait à la relation (2). Pour démontrer le lemme, il suffit d'établir (3) pour tout sous-intervalle (c, d) de (a, b), et la relation $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{M}(f_1)\,\mathfrak{M}(f_2)\ldots\mathfrak{M}(f_k)$. Pour y parvenir, nous démontrerons que l'on a

$$(6)\qquad \mathfrak{M}(f) = \lim_{|\omega|\to\infty}\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\omega+\vartheta} f(x)\,dx = \mathfrak{M}(f_1)\,\mathfrak{M}(f_2)\ldots\mathfrak{M}(f_k)$$

uniformément par rapport à ϑ. Un calcul simple fait voir que (6) subsiste dans le cas où $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ sont des polynômes

---

[2]) Les nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont dits *linéairement indépendants* si l'égalité $n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_k a_k = 0$ avec n_i entiers entraîne les égalités $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$.

[3]) Cf.: G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I. Band, Berlin 1925, p. 74.

trigonométrique. Supposons que vrai max $|f_i(x)| \leqslant M$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$; considérons les polynômes trigonométriques $w_1(x), w_2(x), \ldots, w_k(x)$ ayant des périodes respectivement égales à celles des fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ et tels que

$$\mathfrak{M}(|f_i - w_i|) < \varepsilon, \quad \text{vrai max } |w_i(x)| \leqslant M + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

soit $\Omega > 0$ un nombre assez grand, afin que l'on ait pour $|\omega| > \Omega$

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} |f_i(x) - w_i(x)|\, dx < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Alors, quel que soit ϑ, on a

$$\frac{1}{\omega}\int_{\vartheta}^{\omega+\vartheta} |f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x) - w_1(x) w_2(x) \ldots w_k(x)|\, dx \leqslant \varepsilon k (M+1)^{k-1},$$

ce qui donne la relation (6).

Lemme 4. *On a dans les hypothèses du lemme* 3

$$\text{(7)} \quad \begin{aligned} &\text{vrai max } |f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x)| \\ &= \text{vrai max } |f_1(x)| \text{ vrai max } |f_2(x)| \ldots \text{vrai max } |f_k(x)|, \end{aligned}$$

$$\text{(8)} \quad \begin{aligned} &\text{vrai max } [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)] \\ &= \text{vrai max } f_1(x) + \text{vrai max } f_2(x) + \ldots + \text{vrai max } f_k(x). \end{aligned}$$

Démonstration. En vertu de (6), on a pour chaque $p > 0$

$$\text{vrai max } |f(x)| \geqslant \mathfrak{M}(|f|^p)^{1/p} = \mathfrak{M}(|f_1|^p)^{1/p} \mathfrak{M}(|f_2|^p)^{1/p} \ldots \mathfrak{M}(|f_k|^p)^{1/p},$$

donc, p tendant vers l'infini, on obtient l'inégalité

$$\text{vrai max } |f(x)| \geqslant \text{vrai max } |f_1(x)| \text{ vrai max } |f_2(x)| \ldots \text{vrai max } |f_k(x)|;$$

l'inégalité inverse étant évidente, on obtient (7). La relation (7) et

$$\begin{aligned} e^{\text{vrai max } (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x))} &= \text{vrai max } (e^{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x)}) \\ &= \text{vrai max } e^{f_1(x)} \text{ vrai max } e^{f_2(x)} \ldots \text{vrai max } e^{f_k(x)} \\ &= e^{\text{vrai max } f_1(x) + \text{vrai max } f_2(x) + \ldots + \text{vrai max } f_k(x)} \end{aligned}$$

entraîne la relation (8).

Lemme 5. *On a pour toute fonction continue et presque-périodique* $f(x)$

$$\text{(9)} \quad \lim_{p \to +\infty} \mathfrak{M}(|f|^p)^{1/p} = \text{vrai max } |f(x)|.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; supposons que, pour tout x d'un intervalle $\Delta \subset \langle 0, l \rangle$, on ait $|f(x)| > \text{vrai max } |f(x)| - \varepsilon > \varepsilon$, et choisissons l assez grand pour que $\Delta \subset \langle 0, l \rangle$ et que tout intervalle de longueur l contienne une presque-période correspondante à ε. Soit τ_k une presque-période située dans $\langle (k-1) l, k l \rangle$. On a alors pour $x \in \Delta$

$$|f(x + \tau_k)| > \text{vrai max } |f(x)| - 2\varepsilon,$$

donc l'égalité

$$\int_0^{2nl} |f(x)|^p dx = \int_0^{2l} + \int_{2l}^{4l} + \ldots + \int_{2(n-1)l}^{2nl}$$

entraîne les relations

$$\frac{1}{2nl}\int_0^{2nl} |f(x)|^p dx \geqslant \frac{n|\Delta|}{2nl} (\text{vrai max } |f(x)| - 2\varepsilon)^p,$$

$$\mathfrak{M}(|f|^p)^{1/p} \geqslant \left(\frac{|\Delta|}{2l}\right)^{1/p} (\text{vrai max } |f(x)| - 2\varepsilon)$$

et par conséquent la relation (9).

3. Théorème 1. *Si* $f(x)$ *est une fonction mesurable périodique, ou bien une fonction continue presque-périodique, on a presque partout*

$$\text{(10)} \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} f(\omega_n x + \vartheta_n) = \text{vrai max } f(x).$$

Démonstration. Supposons d'abord, que $f(x)$ soit une fonction bornée (à un ensemble de mesure nulle près). En remplaçant au besoin $f(x)$ par $f(x) + \text{vrai max } f(x)$, on peut admettre que $f(x) \geqslant 0$ presque partout. On a pour chaque $p \geqslant 1$ et chaque $E \subset (a, b)$

$$\left(\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_E f^p(\omega_n x + \vartheta_n)\, dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E (\overline{\lim_{n \to \infty}} f(\omega_n x + \vartheta_n))^p dx\right)^{1/p}.$$

Puisqu'en vertu du lemme 1

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f^p(\omega_n x+\vartheta_n)\,dx=\mathfrak{M}(f^p)\,|E|,$$

on a

$$\mathfrak{M}(f^p)^{1/p}\,|E|^{1/p}\leqslant\Big(\int_E(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,f(\omega_n x+\vartheta_n))^p\,dx\Big)^{1/p}$$

et par conséquent on obtient pour $p\to+\infty$

$$\text{vrai max}\, f(x)\leqslant\underset{x\in E}{\text{vrai max}}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,f(\omega_n x+\vartheta_n)$$

(dans le cas d'une fonction continue presque-périodique on applique le lemme 5). Nous avons donc pour un ensemble arbitraire $E\subset(a,b)$ de mesure positive

$$\text{vrai max}\, f(x)=\underset{x\in E}{\text{vrai max}}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,f(\omega_n x+\vartheta_n),$$

ce qui donne (10) pour presque tous les x.

Supposons maintenant que $f(x)$ soit une fonction mesurable périodique arbitraire. La fonction $\dfrac{t}{1+|t|}$ étant monotone, on a

$$\text{vrai max}\,\frac{f(x)}{1+|f(x)|}=\frac{\text{vrai max}\, f(x)}{1+|\text{vrai max}\, f(x)|},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{f(\omega_n x+\vartheta_n)}{1+|f(\omega_n x+\vartheta_n)|}=\frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f(\omega_n x+\vartheta_n)}{1+|\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f(\omega_n x+\vartheta_n)|}.$$

Puisque la fonction $\dfrac{f(x)}{1+|f(x)|}$ est bornée, nous avons en vertu de ce qui précède

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{f(\omega_n x+\vartheta_n)}{1+|f(\omega_n x+\vartheta_n)|}=\text{vrai max}\,\frac{f(x)}{1+|f(x)|}$$

et par conséquent la formule (10) subsiste pour presque tout x.

Dans le cas des fonctions périodiques, le théorème 1 est équivalent au théorème suivant, qui est une généralisation d'un théorème de MM. G. H. Hardy et J. E. Littlewood [4]):

[4]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some Problems of Diophantine Approximation, Acta Math. 37 (1914) p. 155—239.

Théorème 1'. *Si E est un ensemble de mesure positive contenu dans $(0,1)$, on peut faire correspondre à presque tout x une suite d'indices $\{n_i\}$ telle que*

(11) $$\omega_{n_i}x+\vartheta_{n_i}-[\omega_{n_i}x+\vartheta_{n_i}]\in E \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Désignons en effet par $f(x)$ la fonction de période 1 et qui se confond dans $(0,1)$ avec la fonction caractéristique de l'ensemble $E\subset(0,1)$. En vertu du théorème 1, on a $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f(\omega_n x+\vartheta_n)=1$ presque partout; il existe donc pour presque tout x une infinité d'indices n pour lesquels la relation (11) a lieu.

Réciproquement, soit $f(x)$ une fonction mesurable de période 1 et supposons que vrai max $f(x)<+\infty$. Désignons par E l'ensemble des $x\in(0,1)$ tels que $f(x)\geqslant$ vrai max $f(x)-1/p$, p étant un entier arbitraire. Supposons que le théorème 1' soit vrai; puisque $f(\omega_n x+\vartheta_n)=f(\omega_n x+\vartheta_n-[\omega_n x+\vartheta_n])$, on a presque partout

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f(\omega_n x+\vartheta_n)\geqslant\text{vrai max}\, f(x)-1/p,$$

ce qui donne la relation (10). Dans le cas où vrai max $f(x)=+\infty$, on raisonne d'une manière analogue.

On peut enfin remplacer au moyen d'une substitution la fonction de période 1 par une fonction de période arbitraire. Ainsi le théorème 1 est une conséquence du théorème 1'.

Dans le mémoire cité, MM. Hardy et Littlewood n'ont demontré le théorème 1' que dans le cas où E est un intervalle; remarquons toutefois qu'en généralisant convenablement leur méthode, on pourrait aussi établir notre résultat.

Une conséquence immédiate du théorème 1 est le théorème suivant:

Soit $f(x)$ une fonction mesurable périodique; $\{a_n\}$ étant une suite arbitraire de nombres, on a presque partout

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)|=\text{vrai max}\,|f(x)|\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|,$$

sauf dans le cas où l'un des facteurs du second membre est 0 et l'autre $+\infty$.

Soit $\lim\limits_{i\to\infty}|a_{n_i}|=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|a_n|$. D'après le théorème 1, on a presque partout $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\,|f(\omega_{n_i}x+\vartheta_{n_i})|=\text{vrai max}\,|f(x)|$, ce qui entraîne presque partout $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)| \geqslant$ vrai max $|f(x)|\,\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|$. L'inégalité inverse étant évidente, notre théorème se trouve démontré.

Puisque $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\,|\cos(nx+\vartheta_n)|$, on obtient, comme cas particulier du dernier théorème, le théorème bien connu dû à M. H. Steinhaus [5]):

On a pour presque tout x

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2+b_n^2}. \tag{12}$$

Remarque. Supposons, que vrai max $f(x)$ = vrai max $(-f(x))$. Alors vrai max $f(x)$ = vrai max $|f(x)|$ et, pour toute suite d'indices $\{n_i\}$, on a presque partout $\overline{\lim}_{i\to\infty} f(\omega_{n_i} x+\vartheta_{n_i})$ = vrai max $|f(x)|$, $\overline{\lim}_{i\to\infty}(-f(\omega_{n_i} x+\vartheta_{n_i}))$ = vrai max $|f(x)|$. En appliquant ces relations à une suite $\{n_i\}$ pour laquelle on a respectivement

$$\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|, \qquad \lim_{i\to\infty}(-a_{n_i}) = \overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|,$$

on obtient la formule

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n f(\omega_n x+\vartheta_n) = \text{vrai max } |f(x)|\,\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|.$$

Il en résulte que l'on peut supprimer le signe | | dans la formule (12).

Théorème 2. *Si $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ sont des fonctions mesurables périodiques et si les inverses de leurs périodes sont linéairement indépendants, on a presque partout*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(f_1(\omega_n x+\vartheta_n)+f_2(\omega_n x+\vartheta_n)+\dots+f_k(\omega_n x+\vartheta_n)) = \text{vrai max } f_1(x)+\text{vrai max } f_2(x)+\dots+\text{vrai max } f_k(x), \tag{13}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|f_1(\omega_n x+\vartheta_n) f_2(\omega_n x+\vartheta_n)\dots f_k(\omega_n x+\vartheta_n)| = \text{vrai max } |f_1(x)|\,\text{vrai max } |f_2(x)|\dots\text{vrai max } |f_k(x)|. \tag{14}$$

Si l'un des vrai max *est nul, il faut attribuer au second membre de la formule* (14) *la valeur zéro.*

[5]) H. Steinhaus, Uogólnienie pewnego twierdzenia J. Cantora, Wiadomości Matematyczne 24 (1920) p. 197—201; cf. aussi la monographie de A. Zygmund, l. c. [1]), p. 268—269.

Démonstration. Supposons d'abord, que les fonctions $f_i(x)$ soient bornées; soit $f(x) = |f_1(x)|\,|f_2(x)|\dots|f_k(x)|$. En répétant le raisonnement de la démonstration du théorème 1 et en tenant compte des lemmes 3 et 4, on obtient (14) presque partout. Supposons maintenant que vrai max $|f_i(x)| \neq 0$ pour $i=1,2,\dots,k$ et que p. ex. vrai max $|f_1(x)| = +\infty$. Soit $f_1^N(x) = |f_1(x)|$ pour $|f_1(x)| \leqslant N$ et $f_1^N(x) = N$ pour $|f_1(x)| > N$. La fonction $f_1^N(x)$ a la même période que $f_1(x)$ et l'on a pour presque tout x

$$\begin{aligned}&\overline{\lim}_{n\to\infty}|f_1(\omega_n x+\vartheta_n) f_2(\omega_n x+\vartheta_n)\dots f_k(\omega_n x+\vartheta_n)|\\ &\geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}|f_1^N(\omega_n x+\vartheta_n) f_2(\omega_n x+\vartheta_n)\dots f_k(\omega_n x+\vartheta_n)|\\ &= \text{vrai max } |f_1^N(x)|\,\text{vrai max } |f_2(x)|\,\text{vrai max } |f_k(x)|.\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{N\to+\infty}$ vrai max $|f^N(x)|$ = vrai max $|f(x)|$, la formule (14) subsiste dans ce cas. En appliquant (14) aux fonctions $e^{f_1(x)}, e^{f_2(x)}, \dots e^{f_k(x)}$, on obtient (13).

Nous établirons maintenant une généralisation du théorème 1':

Soient E_r des ensembles de mesure positive, contenus dans (0,1), *et l_r des nombres dont les inverses sont linéairement indépendants* ($r=1,2,\dots,k$); *alors on peut faire correspondre à presque tout x une suite d'indices $\{n_i\}$, telle que*

$$\omega_{n_i} x l_r^{-1}+\vartheta_{n_i} l_r^{-1}-[\omega_{n_i} x l_r^{-1}+\vartheta_{n_i} l_r^{-1}] \in E_r \quad (r=1,2,\dots,k;\ i=1,2,\dots).$$

Nous désignons par $\varphi_r(x)$ les fonctions caractéristiques de E_r dans (0,1); nous les prolongeons périodiquement et nous posons $f_r(x) = \varphi_r(x l_r^{-1})$. En appliquant le théorème (2) aux fonctions $f_r(x)$, on obtient $\overline{\lim}_{n\to\infty}(\varphi_1(\omega_n x l_1^{-1}+\vartheta_1 l_1^{-1})+\dots+\varphi_k(\omega_n x l_k^{-1}+\vartheta_k l_k^{-1})) = k$ presque partout. Pour presque tout x, il existe donc une suite d'indices $\{n_i\}$ telle que $\lim_{i\to\infty}\varphi_r(\omega_{n_i} x l_r^{-1}+\vartheta_{n_i} l_r^{-1}) = 1$, ce qui démontre le théorème.

4. Théorème 3. *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables jouissant de la propriété suivante: quelle que soit la suite d'indices $\{n_i\}$, il existe une suite d'indices $\{i_k\}$ telle que $\{f_{n_{i_k}}(x)\}$ converge uniformément dans un ensemble dont le complément est de mesure nulle, la fonction limite $f(x)$ étant une fonction* *presque-périodique, périodique ou bien une somme d'un nombre fini de fonctions périodiques à périodes dont les inverses sont linéairement indépendants. Dans ces hypothèses, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(\omega_n x+\vartheta_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\text{vrai max } f_n(x)) \tag{15}$$

pour presque tout x.

Démonstration. Supposons d'abord que le vrai max $f_n(x)$ soit fini à partir d'un certain n.

Choisissons une suite partielle $\{f_{n_k}(x)\}$ qui converge uniformément dans un ensemble dont le complément est de mesure nulle vers une fonction $f(x)$, de manière que

$$\lim_{k\to\infty} \text{vrai max } f_{n_k}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}} \text{ vrai max } f_n(x). \tag{16}$$

Soit $\varepsilon>0$ et k suffisamment grand; on a alors presque partout

$$|f_{n_k}(\omega_{n_k}x+\vartheta_{n_k})-f(\omega_{n_k}x+\vartheta_{n_k})|\leqslant\varepsilon. \tag{17}$$

Considérons le cas où vrai max $f(x)<+\infty$. En vertu des théorèmes 1 et 2 respectivement, et du lemme 4, on a presque partout:

$$\begin{gathered}\Big|\overline{\lim_{k\to\infty}} f_{n_k}(\omega_{n_k}x+\vartheta_{n_k})-\text{vrai max } f(x)\Big|\leqslant\varepsilon,\\ \overline{\lim_{k\to\infty}} f_{n_k}(\omega_{n_k}x+\vartheta_{n_k})=\text{vrai max } f(x).\end{gathered} \tag{18}$$

Mais $\lim\limits_{k\to\infty}$ vrai max $f_{n_k}(x)=$ vrai max $f(x)$; nous avons donc pour presque tout x $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(\omega_n x+\vartheta_n)\geqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ vrai max $f_n(x)$, et par conséquent (15) a lieu presque partout. Si vrai max $f(x)=+\infty$, les relations (18) résultent en vertu de (17) du théorème 1 et 2 respectivement, puisque $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ vrai max $f_n(x)=+\infty=$ vrai max $f(x)$; le théorème énoncé est donc encore valable.

Soit enfin vrai max $f_n(x)=+\infty$ pour une infinité d'indices. Choisissons la suite $\{f_{n_k}(x)\}$ de manière que la condition vrai max $f_{n_k}(x)=+\infty$ soit satisfaite au lieu de la condition (16). Or, on a évidemment vrai max $f(x)=+\infty$, on aboutit donc à la même conclusion qu'auparavant.

En utilisant le théorème 3, nous allons démontrer deux théorèmes suivants:

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions mesurables, bornées, linéairement indépendantes et ayant une période commune. Il existe alors une constante $c>0$ telle que, quelles que soient les suites de nombres $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, on a pour presque tout x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)+b_n g(\omega_n x+\vartheta_n)|\geqslant c\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|a_n|+|b_n|)\ [6].$$

Désignons par c la borne inférieure du vrai max $|a'f(x)+b'g(x)|$ pour tous les a' et b' tels que $|a'|+|b'|=1$. Il est aisé de voir que c est un nombre positif; en effet, dans le cas contraire, il existerait des nombres a'_n et b'_n, tels que $|a'_n|+|b'_n|=1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \text{vrai max } |a'_n f(x)+b'_n g(x)|=0;$$

en extrayant de $\{a'_n\}$ et $\{b'_n\}$ des suites partielles $\{a'_{n_k}\}$ et $\{b'_{n_k}\}$ convergentes vers a' et b' respectivement, on aurait donc

$$\text{vrai max } |a'f(x)+b'g(x)|=0,\qquad |a'|+|b'|=1,$$

en contradiction avec le fait que les fonction $f(x)$ et $g(x)$ sont linéairement indépendantes.

Posons maintenant:

$$\bar a_n=\frac{a_n}{|a_n|+|b_n|},\qquad \bar b_n=\frac{b_n}{|a_n|+|b_n|},$$

$$f_l(x)=|\bar a_{n_l}f(x)+\bar b_{n_l}g(x)|,$$

où $\{n_l\}$ est une suite d'indices telle que

$$\lim_{l\to\infty}(|a_{n_l}|+|b_{n_l}|)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|a_n|+|b_n|).$$

On voit facilement que les fonctions $f_l(x)$ satisfont aux conditions du théorème 3; on a donc pour presque tout x

$$\begin{gathered}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)+b_n g(\omega_n x+\vartheta_n)|\\ \geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(|a_n|+|b_n|)\,\overline{\lim_{l\to\infty}}\,|\bar a_{n_l}f(\omega_{n_l}x+\vartheta_{n_l})+\bar b_{n_l}g(\omega_{n_l}x+\vartheta_{n_l})|\end{gathered}$$

[6] Pour ce théorème et le suivant cf.: S. Kakeya, On a property o periodic functions, Tôhoku Math. Journ. 3 (1913) p. 96—103.

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} (|a_n| + |b_n|) \overline{\lim_{i\to\infty}} \text{ vrai max } |\bar{a}_{n_i} f(x) + \bar{b}_{n_i} g(x)|$$

$$\geqslant c \overline{\lim_{n\to\infty}} (|a_n| + |b_n|).$$

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions mesurables, bornées à périodes incommensurables, et telles que

vrai max $f(x)$ = vrai max $(-f(x))$, vrai max $g(x)$ = vrai max $(-g(x))$,

alors on a pour presque tout x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n f(\omega_n x + \vartheta_n) + b_n g(\omega_n x + \vartheta_n)|$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} (|a_n| \text{ vrai max } |f(x)| + |b_n| \text{ vrai max } |g(x)|).$$

On a évidemment

$$\text{vrai max } |f(x)| \neq 0, \qquad \text{vrai max } |g(x)| \neq 0.$$

Puisque

vrai max $f(x)$ = vrai max $|f(x)|$, vrai max $g(x)$ = vrai max $|g(x)|$,

on peut appliquer le lemme 4, ce qui donne

vrai max $(af(x) + bg(x)) = |a|$ vrai max $|f(x)| + |b|$ vrai max $|g(x)|$.

Soit $\bar{a}_n = \dfrac{a_n}{c_n}$, $\bar{b}_n = \dfrac{b_n}{c_n}$ où $c_n = |a_n|$ vrai max $|f(x)| + |b_n|$ vrai max $|g(x)|$ (on peut évidemment admettre que $c_n \neq 0$); choisissons une suite d'indices $\{n_i\}$, telle que

$$\lim_{i\to\infty} \text{ vrai max } (a_{n_i} f(x) + b_{n_i} g(x)) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \text{ vrai max } (a_n f(x) + b_n g(x))$$

et posons $f_i(x) = \bar{a}_{n_i} f(x) + \bar{b}_{n_i} g(x)$. Les suites $\{\bar{a}_n\}$ et $\{\bar{b}_n\}$ étant bornées, on peut appliquer le théorème 3 aux fonctions $f_i(x)$; on obtient pour presque tout x

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |\bar{a}_{n_i} f(\omega_{n_i} x + \vartheta_{n_i}) + \bar{b}_{n_i} g(\omega_{n_i} x + \vartheta_{n_i})|$$

$$\geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} (\bar{a}_{n_i} f(\omega_{n_i} x + \vartheta_{n_i}) + \bar{b}_{n_i} g(\omega_{n_i} x + \vartheta_{n_i}))$$

$$= \overline{\lim_{i\to\infty}} (|\bar{a}_{n_i}| \text{ vrai max } |f(x)| + |\bar{b}_{n_i}| \text{ vrai max } |g(x)|) = 1,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n f(\omega_n x + \vartheta_n) + b_n g(\omega_n x + \vartheta_n)|$$

$$\geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} |\bar{a}_{n_i} f(\omega_{n_i} x + \vartheta_{n_i}) + \bar{b}_{n_i} g(\omega_{n_i} x + \vartheta_{n_i})| \lim_{i\to\infty} c_{n_i}$$

$$\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} (|a_n| \text{ vrai max } |f(x)| + |b_n| \text{ vrai max } |g(x)|),$$

ce qui prouve le théorème énoncé.

Un cas particulier du dernier théorème est le suivant:

Deux nombres λ_1, λ_2 étant incommensurables, on a pour presque tout x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n \cos n\lambda_1 x + b_n \sin n\lambda_2 x| = \overline{\lim_{n\to\infty}} (|a_n| + |b_n|).$$

Théorème 4. *Soient $f_n(x)$ des fonctions mesurables de même période l, uniformément bornées; soit $\varrho \geqslant 1$ un nombre tel que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathfrak{M}(|f_n(x)|^\varrho)^{1/\varrho} = a > 0.$$

Alors on a presque partout l'inégalité

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(\omega_n x + \vartheta_n)| \geqslant a. \tag{19}$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème 1, on a

$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E |f_n(\omega_n x + \vartheta_n)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E (\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(\omega_n x + \vartheta_n)|)^p dx\right)^{1/p},$$

d'où, en vertu du lemme 2, pour $p \geqslant \varrho$,

$$|E|^{1/p} a \leqslant |E|^{1/p} (\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathfrak{M}(|f_n|^p)^{1/p} \leqslant \left(\int_E (\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(\omega_n x + \vartheta_n)|)^p dx\right)^{1/p},$$

où E est un ensemble arbitraire de mesure positive contenu dans $(0, l)$. Comme auparavant, cette inégalité entraîne (19) presque partout.

M. H. Steinhaus a posé la question, si le théorème suivant est vrai:

A) *Soient $f_n(x)$ des fonctions mesurables, de période 1, uniformément bornées; alors on a presque partout*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(nx) = \text{const.}$$

Nous ne sommes pas parvenus à établir ce théorème et nous nous bornerons à quelques remarques sur ce sujet.

Le théorème A) est équivalent au suivant:

B) *Soient $E_1, E_2, \dots E_n, \dots$ des ensembles mesurables situés sur la circonférence de périmètre 1, ayant des périodes $1/1, 1/2, \dots 1/n, \dots$*[7]) *respectivement; alors $|\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n| = 0$ ou bien $|\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n| = 1$.*

[7]) Un ensemble E situé sur la circonférence admet la période l si la rotation d'angle l le transforme en lui-même.

Supposons d'abord que le théorème A) soit vrai. Soit $\varphi_n(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E_n dans $(0,1)$, prolongée périodiquement, et soit $f_n(x) = \varphi_n(x/n)$. Si $E = \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$, $|E| > 0$, alors $\underline{\lim}_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} f(nx) = 1$ dans un ensemble de mesure positive, donc, d'après A), cette relation a lieu presque partout, ce qui donne $|E| = 1$.

Supposons maintenant, que le théorème B) soit vrai. Admettons, que $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(nx) < k$ dans un ensemble E de mesure positive et désignons par E_n le sous-ensemble de l'intervalle $(0,1)$ dans lequel $f_n(nx) < k$. L'ensemble E_n, considéré sur la circonférence de périmètre 1, a une période $1/n$, et si $x \in E$, on a $x \in E_n$ à partir d'un certain n. Par conséquent $|\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n| > 0$ et en vertu de B) $|\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n| = 1$, c. à d. $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(nx) < k$ presque partout. On démontre de la même manière que si l'inégalité $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(nx) \geqslant k$ a lieu dans un ensemble de mesure positive, elle subsiste presque partout. Par conséquent la fonction $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(nx)$ est presque partout constante.

Nous prouverons maintenant que *si l'on n'a pas à la fois* $|E_n| \to 1$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|E_n|) = +\infty$, *le théorème* B) *est vrai.* Dans le cas où les deux relations seraient verifiées, le problème reste ouvert. Montrons d'abord que $|\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n| < 1$ entraîne $|\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n| = 0$. Désignons par G_n le complément de E_n dans l'intervalle $(0,1)$. Soient $\varphi_n(x)$ la fonction caractéristique de G_n dans $(0,1)$, prolongée périodiquement, et $f_n(x) = \varphi_n(x/n)$. Alors $\overline{\lim}_{n\to\infty} |G_n| = c > 0$ et, $\varrho \geqslant 1$ étant un nombre arbitraire, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathfrak{M}(|f_n|^{\varrho})^{1/\varrho} = \overline{\lim}_{n\to\infty} |G_n|^{1/\varrho} = c^{1/\varrho}$. En vertu du théorème 4, $\overline{\lim}_{n\to\infty} f(nx) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \varphi_n(x) \geqslant c^{1/\varrho}$ presque partout, d'où $\overline{\lim}_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 1$ presque partout. Ainsi $\overline{\lim}_{n\to\infty} |G_n| = 1$ ou bien $|\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n| = 0$.

On voit facilement que la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|E_n|) < +\infty$$

entraîne $\underline{\lim}_{n\to\infty} |E_n| = 1$. Il suffit de remarquer que $|G_n + G_{n+1} + \dots| \leqslant (1-|E_n|) + (1-|E_{n+1}|) + \dots$, donc $|E_n \cdot E_{n+1} \dots| \to 1$ et par conséquent $|\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n| = 1$.

5. Les résultats et les démonstrations de cette Note restent valables pour les fonctions de plusieurs variables, si l'on entend par une fonction périodique de k variables une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ définie dans l'espace à k dimensions et ayant la même période relativement à chaque variable. Comme exemple, nous citerons le théorème analogue au théorème 1:

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ une fonction mesurable et périodique; pour presque tout $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ on a alors

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} f(\omega_n x_1 + \vartheta_n, \omega_n x_2 + \vartheta_n, \dots, \omega_n x_k + \vartheta_n) = \text{vrai}\max f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

(Reçu par la Rédaction le 1. 3. 1939).

Про кілька властивостей періодичних та майже періодичних функцій

С. Мазур і В. Орліч (Львів).

(Резюме)

У цій ноті розглядаємо деякі властивості вимірних і періодичних, та неперевних майже періодичних (в розумінні Бора) функцій. Якщо через $\{\vartheta_n\}$ позначимо довільну послідовність чисел, через $\{\omega_n\}$ таку послідовність, що $\omega_n \neq 0$, $\omega_n \to +\infty$, та якщо спр. макс. $h(x)$ означає справжню горішню межу функції $h(x)$ в проміжку $(-\infty, +\infty)$, то справедливі, між іншими, такі теореми:

Теорема 1. Якщо $f(x)$ вимірна періодична або неперервна майже періодична функція, то майже всюди

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} f(\omega_n x + \vartheta_n) = \text{спр. макс. } f(x).$$

Теорема 2. Якщо $f(x)$, $g(x)$ вимірні періодичні функції, та обернені значення їх період лінійно незалежні, то майже всюди

$$\varlimsup_{n\to\infty} (f(\omega_n x+\vartheta_n)+g(\omega_n x+\vartheta_n))$$
$$= \text{спр. макс.}\, f(x) + \text{спр. макс.}\, g(x).$$

Як застосування наведених теорем, одержуємо, між іншим:

1) Якщо $f(x)$ вимірна, періодична функція, то для кожної послідовності чисел $\{a_n\}$ маємо майже всюди

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)| = \text{спр. макс.}\, |f(x)| \cdot \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|,$$

винявши випадок, у якому один чинник правої сторони дорівнює нулеві, а другий безконечний.

2) Якщо $f(x)$, $g(x)$ вимірні, обмежені функції, з неспільномірними періодами, та спр. макс. $f(x)$ = спр. макс. $(-f(x))$, спр. макс. $g(x)$ = спр. макс. $(-g(x))$ то майже всюди:

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)+b_n g(\omega_n x+\vartheta_n)|$$
$$= \varlimsup_{n\to\infty} (|a_n|\, \text{спр. макс.}\, |f(x)| + |b_n|\, \text{спр. макс.}\, |g(x)|).$$

Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoïde

par

H. AUERBACH (Léopol).

Dans cette Note, nous nous proposons d'établir le théorème:

Soit, dans l'espace affine à $n+1$ dimensions ($n>0$), S une surface close bornée jouissant de la propriété suivante: étant donnés deux points quelconques P, P' de S, il existe une projectivité laissant invariante la surface et faisant correspondre au point P le point P'. Alors la surface S est un ellipsoïde.

Nous ne supposons pas que la surface soit régulière ou connexe, mais seulement qu'elle soit une variété à n dimensions au sens topologique, close et sans point commun avec le plan à l'infini.

Ce théorème contient comme cas particuliers un théorème analogue relatif aux transformations affines [1]), et un théorème de M. E. Otto [2]), où l'on suppose que S est une surface convexe et possède la propriété suivante: étant donnés deux points P, P' de la surface et un point R situé à l'intérieur du segment PP', il existe une projectivité laissant invariants la surface et le point R et transformant P en P'.

1. Nous emploierons un système de coordonnées affines ayant pour l'origine un point de la surface S. On peut alors représenter les projectivités transformant la surface en elle-même

---

[1]) H. Auerbach, Sur les groupes bornés de substitutions linéaires, Comptes Rendus 195 (1932) p. 1367—1369.

[2]) Peut-être non publié jusqu'à présent.