Sur l'implication $(2\mathfrak{m} \leqslant 2\mathfrak{n}) \to (\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n})$ pour les nombres cardinaux.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

En 1922 j'ai démontré ce

Théorème I[1]. *M, N, P et Q étant quatre ensembles disjoints et φ étant une transformation biunivoque donnée de l'ensemble M en N, ψ une transformation biunivoque donnée de l'ensemble P en Q et ϑ une transformation biunivoque donnée de l'ensemble $M+N$ en $P+Q$, on sait nommer une transformation biunivoque f de l'ensemble M en P.*

Le but de cette Note est d'en déduire ce

Théorème II. *M, N, P et Q étant quatre ensembles disjoints et φ étant une transformation biunivoque donnée de l'ensemble M en N, ψ une transformation biunivoque donnée de l'ensemble P en Q et ϑ une transformation biunivoque donnée de l'ensemble $M+N$ en un sous-ensemble de $P+Q$, on sait nommer une transformation biunivoque f de l'ensemble M en un sous-ensemble de P.*

Démonstration. Soient M, N, P et Q quatre ensembles disjoints et soient: φ une transformation biunivoque donnée de M en N, ψ une transformation biunivoque donnée de P en Q, ϑ une transformation biunivoque donnée de $M+N$ en un sous-ensemble de $P+Q$. Les ensembles M, N, P et Q étant disjoints, nous pouvons désigner encore par φ la transformation ψ et de même la transformation inverse de φ (c. à d. de l'ensemble N en M), ainsi que la transformation inverse de ψ, c. à. d. nous pouvons poser $\psi = \varphi^{-1} = \psi^{-1} = \varphi$. La fonction ϑ étant à valeurs distinctes dans l'ensemble $M+N$, elle possède une fonction inverse ϑ^{-1} définie dans l'ensemble $\vartheta(M+N)$, que nous désignerons encore par ϑ. Si $x \in P+Q-\vartheta(M+N)$, nous dirons que l'élément $\vartheta(x)$ n'existe pas. Désignons les fonctions

$$\varphi(x),\ \vartheta\varphi(x),\ \varphi\vartheta\varphi(x),\ \vartheta\varphi\vartheta\varphi(x),\ \ldots$$

[1] Fundamenta Mathematicae t. **3** (1922), p. 1.

respectivement par

$$\chi_1(x),\ \chi_3(x),\ \chi_5(x),\ \chi_7(x),\ \ldots$$

et les fonctions

$$x,\ \vartheta(x),\ \varphi\vartheta(x),\ \vartheta\varphi\vartheta(x),\ \ldots$$

respectivement par

$$\chi_0(x),\ \chi_2(x)\ \chi_4(x),\ \chi_6(x),\ \ldots$$

Tout élément x de l'ensemble M détermine une suite transfinie du type $\omega^*+\omega$,

$$(1) \qquad \ldots,\ \chi_4(x),\ \chi_2(x),\ \chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \chi_3(x),\ \chi_5(x),\ \ldots$$

formée d'éléments distincts ou non; l'existence de tous ces éléments n'est pas, d'ailleurs, postulée. Soit x' un autre élément de M qui détermine la suite

$$(2) \qquad \ldots,\ \chi_4(x'),\ \chi_2(x'),\ \chi_0(x'),\ \chi_1(x'),\ \chi_3(x'),\ \chi_5(x'),\ \ldots$$

On voit sans peine que les suites (1) et (2) sont ou bien formées de mêmes éléments dans le même ordre, ou bien de mêmes éléments dans l'ordre inverse, ou bien n'ont pas d'éléments communs.

On voit aussi facilement que, si l'élément $\chi_{8k+j}(x)$ où $k=0,1,2,\ldots$ et $j=0,1,2,3,6,7$, existe, l'élément $\chi_{8k+j+2}(x)$ existe aussi.

x étant un élément donné de M, il y a 4 cas à distinguer.

1) La suite (1) n'est infinie que du côté droit. Dans ce cas il existe le plus grand entier $p \geqslant 0$ tel que les éléments

$$(3) \qquad \chi_{8p+4}(x), \chi_{8p+2}(x), \ldots, \chi_2(x), \chi_0(x), \chi_1(x), \chi_3(x), \ldots$$

existent et les éléments $\chi_{2k}(x)$ n'existent pas pour $k \geqslant 4p+3$.

2) La suite (1) n'est infinie que du côté gauche. Dans ce cas il existe un entier $q \geqslant 0$ tel que les éléments

$$(4) \qquad \ldots, \chi_4(x), \chi_2(x), \chi_0(x), \chi_1(x), \chi_3(x), \ldots, \chi_{8q+5}(x)$$

existent et les éléments $\chi_{2k-1}(x)$ n'existent pas pour $k \geqslant 4(q+1)$.

3) La suite (1) est finie. Il existe alors des entiers $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$ tels que les éléments

$$(5) \qquad \chi_{8p+4}(x), \chi_{8p+2}(x), \ldots, \chi_0(x), \chi_1(x), \chi_3(x), \ldots, \chi_{8q+5}(x)$$

existent et les autres éléments de la suite (1) n'existent pas.

La suite (5) a $4(p+q)+6=2s$ termes, où s est un nombre impair. Nous les désignerons par $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{2s}(x)$. On a $a_1(x) \in P+Q$ et $a_2(x) \in P+Q$. En effet, si l'on avait $a_1(x) \overline{\in} P+Q$, donc $a_1(x) \in M+N$, les éléments $\varphi a_1(x)$ et $\vartheta a_1(x)$ existeraient, donc, vu que $a_1(x)=\chi_{8p+4}(x)$, l'élément $\chi_{8p+6}(x)$ existerait en tant qu'égal à $\varphi a_1(x)$, soit à $\vartheta a_1(x)$; cependant, comme nous savons, l'élément $\chi_{8p+6}(x)$ n'existe pas. Si l'on avait $a_2(x) \overline{\in} P+Q$, donc $a_2(x) \in M+N$, les éléments $\varphi\vartheta a_2(x)$ et $\vartheta\varphi a_2(x)$ existeraient, donc aussi l'élément $\chi_{8p+6}(x)$ qui est égal soit à $\varphi\vartheta a_2(x)$, soit à $\vartheta\varphi a_2(x)$, cependant χ_{8p+6} n'existe pas. Comme $a_1(x) \in P+Q$ et $a_2(x) \in P+Q$ et comme on a ou bien $a_2(x)=\varphi a_1(x)$, ou bien $a_2(x)=\vartheta a_1(x)$, on a nécessairement $a_2(x)=\varphi a_1(x)$ (puisque $\vartheta a_1(x) \in M+N$ et $(M+N)(P+Q)=0$). Donc $a_3(x)=\vartheta a_2(x)$, $a_4(x)=\varphi a_3(x), \ldots$, donc, s étant un nombre impair, $a_{s+1}(x)=\varphi a_s(x)$. Donc, si $a_s(x) \in M+P$, on a $a_{s+1}(x) \in \varphi(M+P)=N+Q$ et (vu que $(M+P)(N+Q)=0$) on a $a_{s+1}(x) \overline{\in} M+P$, et si $a_s(x) \overline{\in} M+P$, donc $a_s(x) \in N+Q$, on a $a_{s+1}(x) \in \varphi(N+Q)=M+P$. Donc:

(6) On a soit $a_s(x) \in M+P$ et $a_{s+1}(x) \overline{\in} M+P$, soit $a_s(x) \overline{\in} M+P$ et $a_{s+1}(x) \in M+P$.

4) Tous les éléments de la suite (1) existent.

Nous définirons maintenant pour les éléments x de M la fonction $f(x)$ comme il suit.

Si l'on a pour x le cas 1), posons $f(x)=\vartheta(x)$ si $\vartheta(x) \in P$ et $f(x)=\varphi\vartheta(x)$, si $\vartheta(x) \overline{\in} P$ (dans ce dernier cas on a $\vartheta(x) \in Q$ et $\varphi\vartheta(x) \in P$).

Si l'on a pour x le cas 2), posons $f(x)=\vartheta\varphi(x)$ si $\vartheta\varphi(x) \in P$ et $f(x)=\varphi\vartheta\varphi(x)$, si $\vartheta\varphi(x) \overline{\in} P$ (dans ce dernier cas on a $\vartheta\varphi(x) \in Q$ et $\varphi\vartheta\varphi(x) \in P$).

Si l'on a pour x le cas 3), posons

$$\begin{array}{llll} f(x)=\vartheta\varphi(x), & \text{si} & \vartheta\varphi(x) \in P, & a_s \in M+P, \\ f(x)=\varphi\vartheta\varphi(x), & \text{si} & \vartheta\varphi(x) \overline{\in} P, & a_s \in M+P, \\ f(x)=\vartheta(x), & \text{si} & \vartheta(x) \in P, & a_s \overline{\in} M+P, \\ f(x)=\varphi\vartheta(x), & \text{si} & \vartheta(x) \overline{\in} P, & a_s \overline{\in} M+P. \end{array}$$

On voit sans peine qu'on aura ici toujours $f(x) \in P$.

Soit M_1 l'ensemble de tous les éléments x de M pour lesquels on a le cas 4) et posons $N_1=\varphi(M_1)$. Désignons par P_1 l'ensemble de tous les éléments y de P pour lesquels il existe un élément x de M_1, tel que y est un terme de la suite (1) et posons $Q_1=\varphi(P_1)$. Je dis que $P_1+Q_1=\vartheta(M_1+N_1)$.

En effet, si $x \in M_1$, on a pour x le cas 4) et $\vartheta(x)=\chi_2(x)$ est un terme de la suite (1). Si $\vartheta(x) \in P$, on a, vu la définition de l'ensemble P_1, $\vartheta(x) \in P_1$, et si $\vartheta(x) \overline{\in} P$, donc $\vartheta(x) \in Q$, on a $\chi_4(x)=\varphi\vartheta(x) \in P$, d'où $\varphi\vartheta(x) \in P_1$ et $\vartheta(x)=\varphi\varphi\vartheta(x) \in \varphi(P_1)=Q_1$, donc $\vartheta(x) \in Q_1$. Il vient $\vartheta(M_1+N_1) \subset P_1+Q_1$.

Or, si $y \in P_1$, on a $y \in P$ et il existe un $x \in M_1$ tel que y est un terme de la suite (1), donc aussi $\vartheta(y)$ est un terme de cette suite. Comme $y \in P_1$ (et comme $\vartheta(y)$ existe) on a $\vartheta(y) \in M_1+N_1$ et (comme $\vartheta(z)$ existe pour tout $z \in M_1+N_1$), on trouve $y=\vartheta\vartheta(y) \in \vartheta(M_1+N_1)$. Si $y \in Q_1=\varphi(P_1)$, on a $y=\varphi(z)$, où $z \in P_1$ et il existe un $x \in M_1$ tel que z, donc aussi $\vartheta\varphi(z)$ est un terme de la suite (1). Or, si $y \in Q_1$, on a $\vartheta\varphi(z) \in M_1+N_1$, d'où $y=\varphi(z)=\vartheta\vartheta\varphi(z) \in \vartheta(M_1+N_1)$. On a donc $P_1+Q_1 \subset \vartheta(M_1+N_1)$.

La formule $P_1+Q_1=\vartheta(M_1+N_1)$ est ainsi établie.

La fonction φ transforme ainsi d'une façon biunivoque l'ensemble M_1 en N_1 et l'ensemble P_1 en Q_1, et la fonction ϑ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble M_1+N_1 en P_1+Q_1. D'après le théorème 1 nous savons nommer une fonction qui transforme d'une façon biunivoque M en P_1: désignons la par $f(x)$.

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour $x \in M$. Je dis qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble M en un sous-ensemble de P.

Comme on voit sans peine, si $x \in M$, on a toujours $f(x) \in P$. Il suffit donc de démontrer que si $x \in M$, $x' \in M$, $x \neq x'$, on a $f(x) \neq f(x')$.

Soient donc x et x' deux éléments distincts de M et supposons qu'on a $f(x)=f(x')$. En supposant que $x \in M_1$ et $x' \in M_1$, on aurait, vu la définition de la fonction f dans M_1, $f(x) \neq f(x')$. Nous pouvons donc supposer qu'on n'a pas à la fois $x \in M_1$ et $x' \in M_1$, donc p. e. que $x \in M-M_1$. On a alors pour x l'un des trois cas 1), 2) ou 3). Or, il résulte de la définition de la fonction $f(x)$ pour $x \in M-M_1$ que $f(x)$ est un terme de la suite (1). Les suites (1) et (2) étant ou bien formées de mêmes éléments (dans le même ordre ou bien dans l'ordre inverse), ou bien n'ayant pas d'élément commun, il résulte sans peine de l'hypothèse $f(x)=f(x')$ (vu la définition de $f(x)$ pour $x \in M_1$) qu'on a pour x et x' le même de trois cas 1), 2), 3).

Si l'on a pour x et x' le cas 1), on a 4 cas à distinguer.

a) $\vartheta(x) \in P$ et $\vartheta(x') \in P$; dans ce cas on a d'après la définition de la fonction f, $f(x)=\vartheta(x)$ et $f(x')=\vartheta(x')$, donc si $f(x)=f(x')$, on aurait $\vartheta(x)=\vartheta(x')$, d'où (la fonction ϑ étant à valeurs distinctes dans M) $x=x'$, ce qui est impossible.

b) $\vartheta(x)\,\overline{\in}\,P$ et $\vartheta(x')\,\overline{\in}\,P$; dans ce cas on a $f(x)=\varphi\vartheta(x)$, $f(x')=\varphi\vartheta(x')$, d'où $\varphi\vartheta(x)=\varphi\vartheta(x')$ et il vient (la fonction $\varphi\vartheta$ étant à valeurs dinstinctes dans M) $x=x'$, ce qui est impossible.

c) $\vartheta(x)\in P$, $\vartheta(x')\,\overline{\in}\,P$; dans ce cas on a $f(x)=\vartheta(x)$ et $f(x')=\varphi\vartheta(x')$, d'où $\vartheta(x)=\varphi\vartheta(x')$ et $x=\vartheta\vartheta(x)=\vartheta\varphi\vartheta(x')$, d'où $\varphi(x)=\varphi\vartheta\varphi\vartheta(x')$. Or, pour x et x' on a le même cas 1), donc les suites (1) et (2) ont le même ordre (étant toutes les deux infinies du côte droit). On a donc, d'après la formule $x=\vartheta\varphi\vartheta(x')=\chi_6(x')$, $x\precsim x'$ et, d'après la formule $x'=\vartheta\varphi\vartheta(x)=\chi_6(x)$, $x'\precsim x$, d'où la contradiction.

d) $\vartheta(x)\,\overline{\in}\,P$ et $\vartheta(x')\in P$; ce cas se traîte d'une façon analogue au cas c). Il ne peut donc nonplus se présenter.

Si l'on a le cas 2) pour x et x', il y a 4 cas à distinguer:

a) $\vartheta\varphi(x)\in P$ et $\vartheta\varphi(x')\in P$. On a alors $f(x)=\vartheta\varphi(x)$ et $f(x')=\vartheta\varphi(x')$, d'où $\vartheta\varphi(x)=\vartheta\varphi(x')$ et $x=x'$, ce qui est impossible.

b) $\vartheta\varphi(x)\,\overline{\in}\,P$ et $\vartheta\varphi(x')\,\overline{\in}\,P$. On a alors $f(x)=\varphi\vartheta\varphi(x)$ et $f(x')=\varphi\vartheta\varphi(x')$, d'où $\varphi\vartheta\varphi(x)=\varphi\vartheta\varphi(x')$ et $x=x'$, ce qui est impossible.

c) $\vartheta\varphi(x)\in P$ et $\vartheta\varphi(x')\,\overline{\in}\,P$. Dans ce cas, on a $f(x)=\vartheta\varphi(x)$ et $f(x')=\varphi\vartheta\varphi(x')$, d'où $\vartheta\varphi(x)=\varphi\vartheta\varphi(x')$ et $x=\varphi\vartheta\varphi\vartheta\varphi(x')=\chi_9(x')$ et $x'=\varphi\vartheta\varphi\vartheta\varphi(x)=\chi_9(x)$, ce qui donne (les suites (1) et (2) ayant le même le ordre dans notre cas) $x\precsim x'$ et $x'\precsim x$, ce qui est impossible.

d) $\vartheta\varphi(x)\,\overline{\in}\,P$ et $\vartheta\varphi(x)\in P$; ce cas se traîte comme le cas c) et ne peut nonplus se présenter.

Si l'on a pour x et x' le cas 3), les suites (1) et (2) (toutes les deux finies dans ce cas) sont formées de mêmes éléments qui peuvent avoir le même ordre ou l'ordre inverse. Distinguons donc deux cas:

α) Les suites (1) et (2) ont le même ordre, donc $a_s(x)=a_s(x')$. Si $a_s(x)\in M+P$, $f(x)$ et $f(x')$ sont définis comme dans le cas 2) et comme dans ce cas on aboutit à une contradiction.

Si $a_s(x)\,\overline{\in}\,M+P$, $f(x)$ et $f(x')$ sont définies comme dans le cas 1) et comme dans ce cas on aboutit à une contradiction.

β) Les suites (1) et (2) ont l'ordre inverse, donc $a_s(x)=a_{s+1}(x')$ et $a_{s+1}(x)=a_s(x')$. Si $a_s(x)\,\overline{\in}\,M+P$, on a soit $f(x)=\vartheta(x)$, soit $f(x)=\varphi\vartheta(x)$, et, comme alors, d'après (6), $a_s(x')=a_{s+1}(x)\in M+P$, on a soit $f(x')=\vartheta\varphi(x')$, soit $f(x')=\varphi\vartheta\varphi(x')$. Si $a_s(x)\in M+P$, on a soit $f(x)=\vartheta\varphi(x)$, soit $f(x)=\varphi\vartheta\varphi(x)$ et comme alors, d'après (6), $a_s(x')=a_{s+1}(x)\,\overline{\in}\,M+P$, on a soit $f(x')=\vartheta(x')$, soit $f(x')=\varphi\vartheta(x')$. Vu la symétrie de ces deux cas, il suffira d'en traîter un seul, p. e. celui, où $a_s(x)\in M+P$. On a alors 4 possibilités:

a) $\vartheta\varphi(x)=\vartheta(x')$, donc $x'=\varphi(x)$, ce qui est impossible, puisque $x\in M$, $x'\in N$ et $\varphi(x)\in N$.

b) $\vartheta\varphi(x)=\varphi\vartheta(x')$, d'où $x'=\vartheta\varphi\vartheta\varphi(x)=\chi_7(x)$ et $x=\varphi\vartheta\varphi\vartheta(x')=\chi_8(x')$. On a donc dans la suite (1) $x'\succsim x$ et dans la suite (2) $x'\succsim x$, ce qui est impossible, les suites (1) et (2) ayant dans le cas β) l'ordre inverse.

c) $\varphi\vartheta\varphi(x)=\vartheta(x')$, d'où $\vartheta\varphi(x)=\varphi\vartheta(x')$, ce qui est impossible selon b).

d) $\varphi\vartheta\varphi(x)=\varphi\vartheta(x')$, d'où $\vartheta\varphi(x)=\vartheta(x')$, ce qui est impossible selon a).

La fonction f transforme ainsi (d'une façon biunivoque) l'ensemble M en un sous-ensemble de P et le théorème II est démontré.

Supposons maintenant qu'on a deux nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$, tels que $2\mathfrak{m}\leqslant 2\mathfrak{n}$. Il existe donc 4 ensembles disjoints M, N, P et Q, tels que $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}=\mathfrak{m}$, $\overline{\overline{P}}=\overline{\overline{Q}}=\mathfrak{n}$ et $\overline{\overline{M+N}}\leqslant\overline{\overline{P+Q}}$. Il existe donc des fonctions φ, ψ et ϑ satisfaisant aux conditions du théorème II et d'après ce théorème M a même puissance qu'un sous-ensemble de P, d'où $\overline{\overline{M}}\leqslant\overline{\overline{P}}$ et $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$. Donc:

On sait démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que l'inégalité $2\mathfrak{m}\leqslant 2\mathfrak{n}$ *pour les nombres cardinaux* $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{n}$ *entraine* $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$.

Par l'induction il en résulte tout de suite (sans l'aide de l'axiome du choix) que (pour $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ cardinaux)

$$(2^k\mathfrak{m}\leqslant 2^k\mathfrak{n})\rightarrow(\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n})\qquad\text{pour } k=1,2,3,\ldots$$

Or, on apprend de la *Communication* de A. Lindenbaum et A. Tarski publiée dans les *Comptes rendus de séances de la Société des Sciences et des Lettres des Varsovie*, XIX, Classe III (1926), p. 305 que M. A. Tarski a démontré en 1924 sans faire appel à l'axiome du choix que si, pour les nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ on a $2\mathfrak{m}\leqslant 2\mathfrak{n}$, alors $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$, et que A. Lindenbaum a démontré en 1926 (aussi sans faire appel à l'axiome du choix) la proposition plus générale que si, pour les nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ et un nombre naturel k on a $k\mathfrak{m}\leqslant k\mathfrak{n}$, alors $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$. Les démonstrations de A. Tarski et A. Lindenbaum ne furent pas publiées et elles me sont inconnues. La démonstration de la proposition de A. Lindenbaum me semble difficile même pour $k=3$.

Soit maintenant k un nombre naturel et $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal, tel que $2^{\aleph_0}\leqslant k\mathfrak{n}$. On a évidemment $2^{\aleph_0}=2^k\cdot 2^{\aleph_0}$ et $k\mathfrak{n}\leqslant 2^k\mathfrak{n}$; l'inégalité admise donne donc $2^k\cdot 2^{\aleph_0}\leqslant 2^k\cdot\mathfrak{n}$, ce qui implique, comme nous avons démontré, $2^{k-1}\cdot 2^{\aleph_0}\leqslant 2^{k-1}\cdot\mathfrak{n}$, ensuite $2^{k-2}\cdot 2^{\aleph_0}\leqslant 2^{k-2}\cdot\mathfrak{n}$, et ainsi de suite, enfin $2^{\aleph_0}\leqslant\mathfrak{n}$. On a donc $(k\mathfrak{n}\geqslant 2^{\aleph_0})\rightarrow(\mathfrak{n}\geqslant 2^{\aleph_0})$. Par conséquent: *on peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que si un ensemble de puissance* $\geqslant 2^{\aleph_0}$ *est décomposé en un nombre fini de parties disjointes de même puissance, chacune d'elles est de puissance* $\geqslant 2^{\aleph_0}$.

Il est à remarquer qu'à l'aide de l'axiome du choix nous savons démontrer ce

Théorème III. *M, N, P et Q étant 4 ensembles disjoints, $\varphi = \varphi^{-1}$ une transformation biunivoque donnée de l'ensemble M en N et de l'ensemble P en Q et ϑ une transformation biunivoque donnée de l'ensemble $M+N$ en un sous-ensemble de $P+Q$, il existe une décomposition de M en 4 ensembles disjoints M_1, M_2, M_3 et M_4, telle que $\vartheta(M_1)$, $\varphi\vartheta(M_2)$, $\vartheta\varphi(M_3)$ et $\varphi\vartheta\varphi(M_4)$ sont des sous-ensembles disjoints de P* [2]).

Il résulte sans peine du théorème III que si l'on a 4 ensembles de points (dans un espace métrique) A, B, C, D, tels que $A \underset{f}{=} B$, $C \underset{f}{=} D$ et $A+B \underset{f}{=} E$, où $E \subset C+D$, il existe un ensemble $B_1 \subset B$, tel que $A \underset{f}{=} B_1$ ($A \underset{f}{=} B$ désigne que l'ensemble A est équivalent par décomposition finie avec l'ensemble B) [3]).

Or, je ne sais pas démontrer cette proposition sans faire appel à l'xiome du choix.

---

[2]) Cf. C. Kuratowski, Fund. Math. **6** (1924), p. 240.

[3]) Pour la définition de l'équivalence par décomposition finie voir S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6**, p. 246.

Sur l'inversion du théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

On appelle théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé la proposition suivante:

Si l'espace métrique M est séparable, chaque suite infinie d'ensembles contenus dans M contient une sous-suite convergente [1]).

Le but de cette Note est de démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu le théorème inverse. Je démontrerai ici la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et si M est un espace métrique tel que chaque suite infinie d'ensembles contenus dans M contient une sous-suite convergente, l'espace M est séparable.

Démonstration. Soit M un espace métrique non séparable. Pour démontrer notre proposition, il suffira évidemment de prouver que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une suite infinie d'ensembles contenus dans M qui ne contient aucune sous-suite convergente.

L'espace métrique M étant non séparable, il existe, comme on sait, un nombre positif d et une suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ du type Ω formée de points de M tels que $\varrho(p_\xi, p_\eta) \geqslant d$ pour $\xi < \eta < \Omega$, $\varrho(p, q)$ désignant la distance des points p et q de M.

Or, la famille de toutes les suites infinies de nombres naturels étant de puissance du continu, il résulte de l'hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie du type Ω, $\{s^\xi\}_{\xi<\Omega}$, formée de toutes les suites infinies de nombres naturels. Soit (pour $\xi < \Omega$) s^ξ la suite

---

[1]) Voir: C. Kuratowski, *Topologie I* (Monografie Matematyczne, t. III) Warszawa-Lwów 1933, p. 156; F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 148. $A_1, A_2, A_3, \ldots$ étant une suite infinie d'ensembles d'un espace métrique M, on dit qu'elle est convergente, si, p étant un point donné quelconque de M et S une sphère au centre p, il existe toujours un nombre naturel μ (dépendant de p et de S), tel qu'on a ou bien $SA_n \neq 0$ pour $n > \mu$, ou bien $SA_n = 0$ pour $n > \mu$.