almost everywhere, provided the ratios m/n and n/m are bounded. Estimating the right-hand side of the inequality (4.6) and arguing as in §§ 4, 5, we come to the conclusion that

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\{\pi^2\overline{\sigma}_{m,n}(x,y)-\int_{-\pi}^{(\varepsilon)\,\pi}\int_{-\pi}^{(\eta)\,\pi}\frac{f(x+u,y+v)}{2\tan\frac{1}{2}u\cdot 2\tan\frac{1}{2}v}\,du\,dv\right\}=0.$$

The boundedness of the ratios ε/η and η/ε, and (4.4) imply the boundedness of the ratios m/n and n/m. Comparing (7.1) and (7.2) we get the required result.

Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres.

Par

Zygmunt Zahorski (Kraków).

Introduction.

1. Le but de ce travail est de caractériser d'une manière topologique l'ensemble des points singuliers des fonctions d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres.

Etant donné un ensemble Z de nombres réels dense en soi, j'appelle *fonction de classe D_∞ sur Z* toute fonction qui admet en chaque point de Z les dérivées de tous les ordres par rapport à Z. Dans le cas où ces dernières sont finies (donc continues), la fonction sera dite *de classe C_∞ sur Z.*

En particulier, lorsque l'ensemble Z est ouvert, les classes D_∞ et C_∞ coïncident.

Enfin, j'appelle *fonctions de classe C_∞,* tout court, les fonctions qui sont de classe C_∞ sur l'axe des x tout entier.

Si $f(x)$ est une fonction de classe C_∞, on peut former, pour tout x, la série de Taylor:

$$T_f(x,h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots$$

dont le rayon de convergence $r_f(x)$ (en tant que celui de la série en h) est défini par la formule de Cauchy-Hadamard:

$$r_f(x)=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}},$$

en posant $r_f(x)=0$ ou $r_f(x)=+\infty$, suivant que le dénominateur est infini ou s'annule.

Les indices se rapportant à une fonction fixée pourront, bien entendu, être omis; ainsi, j'écrirai, pour abréger, $r(x)$ au lieu de $r_f(x)$, $T_1(x,h)$ au lieu de $T_{f_1}(x,h)$, etc.

J'appelle *points singuliers* (*P*) *ou au sens de* Pringsheim les points x en lesquels $r(x)=0$.

Quand $r(x)>0$, deux cas sont possibles:

1° il existe un nombre $\delta(x)$ tel que $0<\delta(x)\leqslant r(x)$ et que l'inégalité $|h|<\delta(x)$ entraîne l'égalité

$$T(x,h)=f(x+h).$$

Alors le point x sera dit *régulier*;

2° un tel nombre $\delta(x)$ n'existe pas, c'est à dire il existe des valeurs de h arbitrairement petites et telles que

$$T(x,h)\neq f(x+h).$$

Alors le point x sera dit *singulier* (*C*) *ou au sens de* Cauchy.

J'appelle *points singuliers* les points singuliers (*P*) et les points singuliers (*C*).

Une fonction $f(x)$ est dite *holomorphe sur l'ensemble E* lorsqu'il existe une région plane G contenant E et telle que, dans E, $f(x)$ coïncide avec une fonction $g(x)$ qui est dans G holomorphe et univoque. En particulier, $f(x)$ sera dite *holomorphe sur l'ensemble E dans l'entourage U d'un point* $x_0\in EU$ lorsqu'elle est holomorphe sur l'ensemble EU. Le point x_0 sera dit alors *régulier sur E*. 1° entraîne, que le point régulier sur l'axe des x est régulier, et inversement.

La fonction de classe C_∞ est holomorphe sur un entourage de tout point régulier, donc l'ensemble des points reguliers est ouvert, l'ensemble des points singuliers est fermé.

Il résulte des propriétés élémentaires des fonctions analytiques, que $f(x)$ est holomorphe sur l'intervalle I (ouvert ou fermé) lorsque tous les points de I sont réguliers sur I, et dans ce cas seulement.

Je désigne par P l'ensemble des tous les points singuliers (*P*), C l'ensemble des tous les points singuliers (*C*). Je vais démontrer *que P est un G_δ et C est un F_σ de I-e catégorie.* Pringsheim[1]) a donné des exemples de fonctions de classe C_∞ pour lesquelles: 1) l'ensemble P, 2) l'ensemble C, 3) tous les deux, P et C sont denses sur l'axe des x (que je désigne par R). Il effectuait à cet effet les constructions des singularités sur certaines ensembles denses, dénombrables. Cependant dans ces exemples on ne sait rien sur la façon dont cette fonction se comporte *dans les autres points*. L'ensemble $P+C$ de tous les points singuliers étant fermé, l'axe des x ne contient dans le cas considéré que les points singuliers, mais il est difficile en général de dire, si $x\in P$ ou $x\in C$. Quant à l'ensemble P dans les exemples 1), 3) de Pringsheim, on sait qu'il est sur tout segment un G_δ de II-e catégorie (et par suite de puissance du continu); par contre, quant à C on ne sait point s'il est dénombrable ou de puissance du continu. D'ailleurs, on ne savait pas, *si l'ensemble P peut être identique à l'axe des x tout entier.* (Il résulte de la Note de M. Boas[2]) que l'ensemble C ne peut contenir aucun intervalle). Je vais donner la résolution des problèmes de Pringsheim généralisés d'une façon considérable, en construisant *une fonction de classe C_∞ dont les ensembles des points singuliers P et C sont arbitrairement choisis d'avance de la famille d'ensembles satisfaisant aux conditions nécessaires*; *ces conditions sont par suite suffisantes.* En particulier, je vais démontrer que *l'ensemble P peut coïncider avec l'axe des x tout entier.* En considérant la fonction $f(x)$ correspondante, on peut donner la résolution affirmative du problème suivant posé par M. S. Ulam: *Est-ce qu'il existe une fonction $f(x)$ continue de la variable réelle, telle que pour toute fonction analytique $g(x)$ l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ est, dans le domaine de regularité de $g(x)$, au plus dénombrable?* J'obtiens aussi la réponse à la question: quels peuvent être au plus les ensembles C. À savoir: *de la pleine épaisseur* de I-e catégorie; mais en ce cas seulement si P est dense. Au contraire, si le segment I ne contient pas de points de P, l'ensemble *IC peut être de mesure arbitrairement peu différente de* $|I|$, *mais moindre de* $|I|$.

En outre, je démontre un théorème de Pringsheim, dont *la démonstration donnée par l'auteur n'etait pas exacte.* Cette démonstration ne s'appuie que sur le lemme 1.

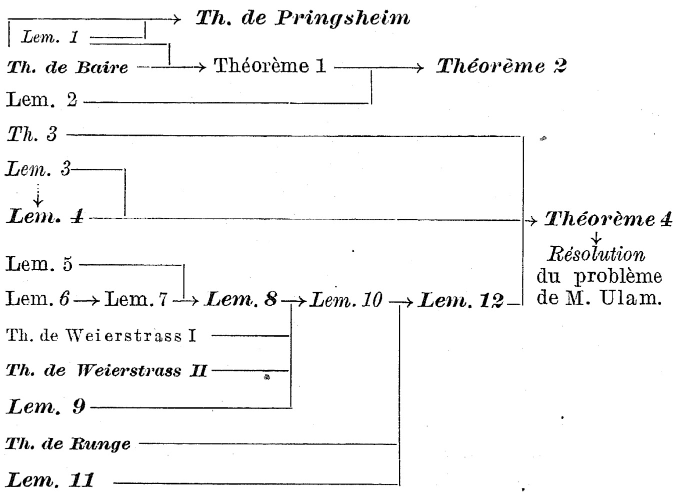
La numération des formules aux chapitres particuliers commence par 1. Pour marquer les formules du même chapitre, j'indique leurs numéros seuls; pour marquer une formule d'un autre chapitre, j'indique aussi ce chapitre, par ex. (11) **5**.

[1]) A. Pringsheim. *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich,* Math. Ann. **42**, 1893, p. 153-184.

[2]) R. P. Boas jr., *A theorem on analytic functions of a real variable,* Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 1935, p. 233-236.

Je désigne par $\bar{A}$ la fermeture de l'ensemble A, par $\{W(x)\}$ l'ensemble de tous les points de l'axe x, satisfaisant à la condition $W(x)$, par (a,b) l'intervalle ouvert $a<x<b$, par $[a,b]$ l'intervalle fermé (segment) $a\leqslant x\leqslant b$, (en écrivant aussi $[a]$ au lieu de $[a,a]$), par $(a,b]$, $[a,b)$ les intervalles $a<x\leqslant b$, resp. $a\leqslant x<b$, par $x\,\epsilon\,A$ „x appartient à A“, $x\,\bar{\epsilon}\,A$ que x n'y appartient pas, par $A\subset B$ „A est une partie de B“ (en particulier $A=B$, resp. $A=0$), par dist(x,A) la borne inférieure de $|x-y|$ où $y\,\epsilon\,A$, par dist(A,B) la borne inférieure de $|x-y|$ où $x\,\epsilon\,A$, $y\,\epsilon\,B$, par $|A|$ la mesure de Jordan de l'ensemble A.

Le schéma de la démonstration.



Les théorèmes qui se trouvent à la première colonne sont indépendants entre eux et peuvent être lus en ordre arbitraire. Les théorèmes écrits en petit texte sont cités dans le présent travail sans démonstration. Les théorèmes élémentaires de la théorie des fonctions et de topologie ne sont pas cités, les théorèmes plus importants[3]) sont imprimés en italiques, les plus importants — en texte gras.

Quant à la résolution du problème de M. Ulam, on peut l'obtenir du lemme 9 lui-même et du théorème de Weierstrass II (de polyn. appr.).

On peut éviter l'application du théorème de Weierstrass I (de maximum) en faisant une modification convenable de la démonstration.

[3]) Les lemmes 5-7, qui sont dus à M. T. Ważewski ont simplifié beaucoup la construction primitive.

Les conditions nécessaires.

2. ***Lemme 1.*** *Pour que $f(x)$ soit holomorphe sur le segment (fermé) I, il faut et il suffit qu'il existe une constante M satisfaisant à la condition:*

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}\leqslant M \qquad \textit{pour } n=1,2,\ldots, \textit{ et pour tout } x\,\epsilon\, I.$$

Démonstration — voir Goursat[4]).

Théorème 1. *Pour que les ensembles P et C de nombres réels soient respectivement: l'ensemble de tous les points singuliers (P) et l'ensemble de tous les points singuliers (C) d'une fonction $f(x)$ de classe C_∞ — il est nécessaire qu'ils satisfassent à la condition:*

(*) *P est un G_δ et il existe un ensemble fermé, non dense Q, tel que $C=\bar{P}-P+Q(R-\bar{P})$.*

Démonstration. Je considère les fonctions:

$$\varphi_n(x)=\max\left[\frac{f'(x)}{1!},\sqrt{\frac{|f''(x)|}{2!}},\ldots,\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}\right],$$

$$\text{(1)}\qquad \varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

Les fonctions $\varphi_n(x)$ étant continues et $\varphi_{n+1}(x)\geqslant\varphi_n(x)$, il en résulte que $\varphi(x)$ est semicontinue inférieurement, par suite de I-e classe de Baire et l'on a par définition $\varphi(x)=\sup\limits_n\sqrt[n]{\dfrac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}$. Comme $f^{(n)}(x)$ sont finies, on a

$$\text{(2)}\qquad \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}=+\infty\right\}=\left\{\sup_n\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}=+\infty\right\}$$

et en vertu de la formule de Cauchy-Hadamard:

$$P=\{r(x)=0\}=\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}=+\infty\right\}.$$

[4]) É. Goursat, *Cours d'analyse math.*, III éd., Paris, Gauthier-Villars 1917-1918, t. I, p. 486 (suff.), t. II, p. 247 (néc.), renvois.

Selon (2) on a donc:

$$P=\{\varphi(x)=+\infty\}=\prod_{n=1}^{\infty}\{\varphi(x)>n\}, \tag{3}$$

$\varphi(x)$ étant semicontinue inférieurement, les ensembles $\{\varphi(x)>n\}$ sont ouverts, c'est-à-dire, en vertu de (3), *P est un G_δ*.

L'ensemble de tous les points singuliers étant fermé, les points de $\overline{P}$ sont singuliers, et par suite les points de $\overline{P}-P$ sont singuliers (C), c. à d. $\overline{P}-P\subset C\overline{P}$, et comme $CP=0$, on a $C\overline{P}\subset\overline{P}-P$, d'où:

$$C\overline{P}=\overline{P}-P. \tag{4}$$

L'ensemble $C(R-\overline{P})=(C+P)(R-\overline{P})$ est fermé dans $R-\overline{P}$, car $C+P$ est fermé; donc

$$C(R-\overline{P})=\overline{C(R-\overline{P})}\cdot(R-\overline{P}). \tag{5}$$

Je désigne $\overline{C(R-\overline{P})}$ par Q et je vais démontrer, que Q est non dense. À cet effet il suffit de démontrer que $C(R-\overline{P})$ est non dense. Il résulte de (3) que:

$$\varphi(x)<+\infty \qquad \text{pour tout} \quad x\in R-P. \tag{6}$$

La fonction $\varphi(x)$ étant de I-e classe de Baire, l'ensemble des points de continuité de cette fonction est dense, en particulier sur l'ensemble ouvert $R-\overline{P}$. Il résulte de (6) qu'au voisinage de tout point de continuité de $\varphi(x)$ dans $R-\overline{P}$, $\varphi(x)$ est bornée [5]; il existe donc une suite de segments I_k tels que $\sum I_k$ est dense sur $R-\overline{P}$ et une suite de constantes M_k telles que

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}\leqslant\varphi(x)\leqslant M_k \quad \text{pour} \quad n=1,2,\dots \text{ et pour tout } x\in I_k.$$

Il résulte du lemme 1 que $f(x)$ est holomorphe sur tout I_k et par suite sur un ensemble ouvert dense sur $R-\overline{P}$. Donc l'ensemble de points singuliers appartenants à $R-\overline{P}$ est non dense sur $R-\overline{P}$ et à fortiori sur R. Cet ensemble est $(P+C)\cdot(R-\overline{P})=C(R-\overline{P})$, donc Q est non dense. Selon (4), (5) on a $C=C\overline{P}+C(R-\overline{P})=$ $=\overline{P}-P+Q(R-\overline{P})$, c. q. f. d.

[5]) Cette idée est due à S. Saks.

Quant à la condition (*), je vais démontrer qu'elle est en même temps suffisante. Cette condition n'est pas cependant symétrique respectivement à P et à C; on ne peut pas déduire aussitôt, p. ex. la réponse à la question si tout ensemble F_σ de I-e catégorie peut être l'ensemble C pour une fonction. C'est pourquoi je vais donner deux conditions qui lui équivalent; dans la seconde l'ensemble C est „la variable indépendante", P est exprimé par C et un ensemble fermé, la troisième est formulée d'une façon symétrique.

Lemme 2. *Les propositions*:

(*) *A est un G_δ et il existe un ensemble fermé, non dense Q tel que $B=\overline{A}-A+Q(R-\overline{A})$,*

(**) *B est un F_σ de I-e catégorie et il existe un ensemble fermé T tel que $A=\overline{B}-B+T(R-\overline{B})$,*

(***) *A est un G_δ, B est un F_σ de I-e catégorie, $AB=0$, $A+B=\overline{A+B}$,*

sont équivalentes.

Démonstration. Je vais démontrer que (**) résulte de (*), (***) résulte de (**) et (*) résulte de (***).

En effet, de (*) résulte

$$AB=A(\overline{A}-A)+AQ(R-\overline{A})=0, \quad A\subset R-B$$

$$A\overline{B}\subset(R-B)\overline{B}=\overline{B}-B, \tag{7}$$

$$A+B=(\overline{A}-A)+A+Q(R-\overline{A})=\overline{A}+Q(R-\overline{A})=$$
$$=\overline{A}+Q\overline{A}+Q(R-\overline{A})=\overline{A}+Q,$$

donc

$$\overline{A+B}=A+B, \tag{8}$$

$$A+B\supset\overline{B}, \quad A\supset\overline{B}-B$$

$$A\overline{B}\supset\overline{B}-B; \tag{9}$$

on en déduit de (7), (9):

$$A\overline{B}=\overline{B}-B. \tag{10}$$

$A(R-\overline{B})=(A+B)(R-\overline{B})=\overline{A+B}(R-\overline{B})$, selon (8) et en désignant $\overline{A+B}$ par T, j'obtiens:

$$A(R-\overline{B})=T(R-\overline{B}). \tag{11}$$

De (10) et (11) résulte

$$A=A\overline{B}+A(R-\overline{B})=\overline{B}-B+T(R-\overline{B}).$$

On déduit de (*) que B est un F_σ, il reste donc de démontrer, que B est de I-e catégorie. Q est non dense et $\bar{A}-A$ est un F_σ, il suffit donc de démontrer qu'il ne contient aucun segment. Supposons que $\bar{A}-A$ contienne un segment I et soit I' un segment concentrique avec I, contenu dans I, $|I'|<|I|$. Alors $AI=0$, $\bar{A}I'=0$, d'autre part $I'\subset I\subset \bar{A}-A$, $\bar{A}I'=I'$, d'où la contradiction. Ainsi B est de I-e catégorie, donc $(*)\to(**)$.

Il résulte de (**) que A est un G_δ et

$$AB=B(\bar{B}-B)+BT(R-\bar{B})=0,$$

$$A+B=(\bar{B}-B)+B+T(R-\bar{B})=\bar{B}+T(R-\bar{B})=\bar{B}+T\bar{B}+T(R-\bar{B})=\bar{B}+T,$$

donc $A+B=\overline{A+B}$, c'est-à-dire $(**)\to(***)$.

Il résulte de (***) que

$$B\bar{A}=\bar{A}(A+B-A)=\bar{A}(\overline{A+B}-A)=\bar{A}-A \tag{12}$$

et $B(R-\bar{A})=(A+B)(R-\bar{A})=\overline{A+B}(R-\bar{A})$, donc

$$B(R-\bar{A})=\overline{B(R-\bar{A})}(R-\bar{A}).$$

En désignant $\overline{B(R-\bar{A})}$ par Q, on a

$$B(R-\bar{A})=Q(R-\bar{A}) \tag{13}$$

et il reste de démontrer que Q est non dense. Supposons que Q contienne un segment L. On a donc

$$L\subset Q\subset \overline{R-\bar{A}}. \tag{14}$$

L'ensemble $\overline{R-\bar{A}}-(R-\bar{A})$ étant le bord de l'ensemble ouvert $R-\bar{A}$, il ne contient aucun segment; comme fermé, il est non dense. Il existe donc un segment L' tel que

$$L'\subset L \tag{15}$$

$$L'[\overline{R-\bar{A}}-(R-\bar{A})]=0, \tag{16}$$

et on a en vertu (15), (14), (16), $L'\subset R-\bar{A}$. Selon (15), (14), (13) $L'\subset Q(R-\bar{A})\subset B$, contrairement à l'hypothèse dans (***), que B est de I-e catégorie, donc Q est non dense. Il résulte de (13) et (12) que

$$B=B\bar{A}+B(R-\bar{A})=\bar{A}-A+Q(R-\bar{A}),\quad (***)\to(*),\quad \text{c. q. f. d.}$$

Du théorème 1 et du lemme 2 résulte aussitôt le

Théorème 2. *Pour que les ensembles P et C de points de l'axe des x soient respectivement l'ensemble de tous les points singuliers (P) et l'ensemble de tous les points singuliers (C) d'une fonction de classe C_∞, il faut que P soit un G_δ, C soit un F_σ de I-e catégorie, $PC=0$, $P+C=\overline{P+C}$.*

Les conditions suffisantes dans le cas $P=0$.

3. Quand $P=0$, la condition (*) se réduit à la condition que C soit un ensemble fermé, non dense. Le cas où l'on a aussi $C=0$, a lieu par ex. pour $f(x)\equiv 0$. Soit $C=Q$, Q étant fermé, non dense et non vide.

Théorème 3. *Pour tout ensemble Q fermé, non dense de points de l'axe des x, il existe une fonction $g(x)$ de classe C_∞, n'admettant pas de points singuliers (P), pour laquelle tout point $x\in Q$ est singulier (C), tout point $x\bar{\in} Q$ est régulier.*

Démonstration. Je désigne par (l_i, m_i) les composantes de l'ensemble $R-Q$. Comme $Q\neq 0$, il y en a au moins deux, aucun n'est identique à l'axe des x et deux au plus sont des demi-droites (c'est-à-dire $l_i=-\infty$ ou $m_i=+\infty$, les points $\pm\infty$ n'appartenant pas à l'axe des x).

Je forme la suite des fonctions:

$$g_i(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-l_i)^2}-\frac{1}{(x-m_i)^2}} \text{ pour tout } x\in(l_i,m_i) \text{ lorsque } -\infty<l_i<m_i<+\infty \\ e^{-\frac{1}{(x-l_i)^2}} \text{ pour tout } x\in(l_i,m_i) \quad \text{lorsque } m_i=+\infty \\ e^{-\frac{1}{(x-m_i)^2}} \text{ pour tout } x\in(l_i,m_i) \quad \text{lorsque } l_i=-\infty \\ 0 \text{ pour tout } x\bar{\in}(l_i,m_i) \end{cases} \tag{1}$$

quand le nombre des composantes est infini; au contraire, lorsqu'il est fini $i=1,2,\ldots,N$, je définis $g_i(x)$ pour $i\leqslant N$ suivant (1), et pour $i>N$ je pose $g_i(x)\equiv 0$. Les fonctions $g_i(x)$ sont de classe C_∞ et pour tout n entier, non négatif on a:

$$g_i^{(n)}(x)=0 \qquad \text{pour tout } x\bar{\in}(l_i,m_i). \tag{2}$$

Je définis la suite de constantes positives M_i comme il suit: $M_i=1$ pour les valeurs de i (deux au plus i_1, i_2) telles que (l_i, m_i) est la demi-droite, et lorsque le nombre de composantes (l_i, m_i)

est N, $M_i=1$ pour tout $i>N$. Pour les valeurs restantes de i le segment $[l_i, m_i]$ est borné, donc les fonctions continues $g_i^{(n)}(x)$, finies, sont bornées dans ce segment et, en tenant compte de (2), bornées sur l'axe des x tout entier,

$$(3) \qquad |g_i^{(n)}(x)| < M_{n,i} < +\infty \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } i \neq i_1,\ i \neq i_2.$$

($M_{n,i}=1$ lorsque le nombre des (l_i, m_i) est fini $=N$ et $i>N$). Je pose

$$(4) \qquad M_i = \max_{0 \leqslant n \leqslant i} M_{n,i} \quad \text{pour tout } i \neq i_1,\ i \neq i_2.$$

La série

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(x)}{2^i M_i}$$

et toutes les séries de dérivées sont uniformément convergentes sur l'axe des x, car on a d'après (3), (4):

$$\frac{|g_i^{(n)}(x)|}{2^i M_i} < \frac{M_{n,i}}{2^i M_i} \leqslant \frac{M_i}{2^i M_i} = \frac{1}{2^i} \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } i \neq i_1,\ i \neq i_2,\ i \geqslant n$$

et par suite

$$(5) \qquad g^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^{(n)}(x)}{2^i M_i} \quad \text{pour tout } x \text{ et } n=0,1,2,\ldots$$

Pour x fixe un, au plus, des termes de la série (5) est selon (2) différent de 0, car les intervalles (l_i, m_i) sont disjoints; en particulier:

$$(6) \qquad g^{(n)}(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in Q,\ n=0,1,2,\ldots$$

$$(7) \qquad g(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in R-Q$$

et les points $x \in R-Q$ sont réguliers, car $x \in (l_{i_x}, m_{i_x})$, toutes les fonctions $g_i(x)$ avec $i \neq i_x$ sont égales à 0 dans (l_{i_x}, m_{i_x}) et $g_{i_x}(x) > 0$ est régulière dans (l_{i_x}, m_{i_x}). Pour $x \in Q$, il résulte de (6) que $r(x)=+\infty$, $T(x,h) \equiv 0$. Comme Q est non dense, tout voisinage d'un $x \in Q$ contient les points $x+h \in R-Q$, auxquels $g(x+h)>0$ en vertu de (7). Donc $T(x,h) \neq g(x+h)$, c'est-à-dire tout point $x \in Q$ est singulier (C) et, suivant (5), $g(x)$ est de classe C_∞, c. q. f. d. [6]).

[6]) Le théorème 3 résulte du travail: H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 1, 1934, p. 63-89.

Les conditions suffisantes dans le cas général.

4. Pour démontrer, dans le cas général, que la condition (*) est suffisante, je vais, de même, construire une fonction qui peut être décomposée en somme de deux fonctions; pour la première l'ensemble Q intervenant dans la condition (*) est vide, c'est-à-dire $C=\overline{P}-P$, et la seconde n'a pas de points singuliers (P). L'existence de la dernière fonction résulte du théorème 3 et il ne reste que de construire la première fonction, qui sera désignée par $\Omega(x)$.

Je vais déterminer $\Omega(x)$ comme la limite d'une suite de polynômes $\omega_n(x)$, uniformément convergente avec toutes les dérivées dans tout intervalle fini; il en résulte que $\Omega(x)$ est de classe C_∞. On obtient les polynômes $\omega_n(x)$ par l'intégration $n-1$-uple des polynômes $w_n(x)=\omega_n^{(n-1)}(x)$, satisfaisant pour tout $(x_1,x_2) \subset (-d_n, d_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$, à la condition

$$(1) \qquad \left| \int_{x_1}^{x_2} [w_{n+1}(t) - w_n'(t)]\, dt \right| < \frac{1}{4^n d_n^n},$$

d'où résulte la convergence uniforme de $\omega_n(x)$ et de leurs dérivées.

Ces polynômes satisfont aussi à des inégalités dans les intervales et aux points d'ensembles non denses, dont je déduis certaines inégalités pour $\Omega^{(n)}(x)$ aux points des ensembles $\overline{P}-P$, P; l'application de la formule de Cauchy-Hadamard permet d'en déduire que $r(x)>0$ resp. $r(x)=0$. Le lemme 3 donne la démonstration de l'existence, pour l'ensemble P, des intervalles $I_{n,l}$, des ensembles non denses et des autres ensembles nécessaires pour la construction des $w_n(x)$. Le lemme 4 donne la démonstration de certaines inégalités aux points des ensembles $\overline{P}-P$, P pour les fonctions satisfaisant aux autres inégalités aux points des intervalles et des autres ensembles, construits au lemme 3. Dans la démonstration du théorème je remplace les fonction intervenant au lemme 4 par les expressions qui figurent dans la formule de Cauchy-Hadamard, contenant $\Omega^{(n)}(x)$. Les lemmes 5-12 servent à construire $w_n(x)$, 3-6 constituent la base topologique de la construction. Le lemme 8 permet de construire une fonction continue satisfaisant aux inégalités données et ensuite je choisis le polynôme d'approximation relatif à cette fonction en m'appuyant sur le théorème de Weierstrass (lemme 10). La régularité de $\Omega(x)$ aux points de $R-\overline{P}$ résulte du théorème de Runge, appliqué aux domaines disjoints ayant la forme du rhombe.

Les domaines, contenant les points de $R-\overline{P}$ forment une suite non décroissante et le polynôme de Runge doit dans ces domaines être à peu près égal à $w_n'(x)$, d'où résulte la convergence uniforme des $\omega_n(x)$, et par suite, l'holomorphie de leur limite dans chacun de ces domaines, dont les diagonales couvrent l'ensemble $R-\overline{P}$. Dans les domaines, contenant les points de $\overline{P}$ (couvrant l'ensemble $\overline{P}[-d_n, d_n]$) le polynôme de Runge doit être à peu près égal au polynôme de Weierstrass, afin que les inégalités auxquelles satisfait ce dernier, soient encore exactes pour le premier. Comme les valeurs du polynôme de Runge en dehors de ces domaines rhomboïdaux sont inconnues, on ne peut rien dire concernant la question si la condition (1), à laquelle satisfait le polynôme de Weierstrass pour tout $(x_1, x_2) \subset (-d_n, d_n)$, y est remplie. Pour qu'elle soit remplie, on ajoute au polynôme de Runge un polynôme $v(z)$ (lem. 11); les valeurs que prend ce polynôme et sa dérivée aux domaines rhomboidaux diffèrent peu de 0. Je construis $v(z)$ en me servant de la fonction $e^{-(z-a)^2 b^2}$; cette fonction et sa dérivée diffèrent peu de 0 dans certains domaines angulaires contenant une partie de l'axe des x (deux demi-droites, le voisinage du point a exclu). Dans la construction de $w_n(x)$ on applique l'induction: j'obtiens $w_{n+1}(x)$ par un changement convenable de $w_n'(x)$; $w_1(x)$ est choisi arbitrairement. La condition $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\Omega^{(n)}(x)|}{n!}} = +\infty$, c'est à dire, $r(x)=0$ pour $x \in P$ s'obtient de l'inégalité $\sqrt[n+1]{\frac{|\Omega^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}} > m_n$ pour x satisfaisant à l'inégalité $\sqrt[n]{\frac{|\Omega^{(n)}(x)|}{n!}} \leqslant m_n$, où $\varlimsup_{n\to\infty} m_n = +\infty$, dans certains intervalles. Lorsque P est identique à l'axe des x, cette inégalité avec (1) sont suffisantes, il n'y a pas besoin d'introduire les polynômes de Runge et les polynômes $v(z)$; la construction se simplifie beaucoup. Cependant je ne l'expose pas ici, car c'est un cas particulier de la construction générale.

5. *Lemme 3.* *À tout ensemble P de points de l'axe des x, du type G_δ, et à toute couple de nombres entiers, positifs n et l, on peut faire correspondre: un ensemble ouvert G_n^*, un segment fermé $I_{n,l}$, un ensemble fermé non dense Φ_n, des ensembles fermés B_n et T_n disjoints, constitués par un nombre fini de segments, ou vides, et des nombres entiers positifs m_n, k_n, d_n, de sorte que:*

(1) $$P = \prod_{n=1}^{\infty} G_n^*$$

(2) $$G_{n+1}^* \subset G_n^*$$

(3) $$\overline{P}-P = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n$$

(4) $$\Phi_{n+1} \supset \Phi_n$$

(5) $$G_n^* = \sum_{l=1}^{\infty} I_{n,l}$$

(6) $$\operatorname{dist}(I_{n,l}, \Phi_n) > 0 \text{ \textit{lorsque} } \Phi_n \neq 0$$

(7) $$I_{m_1,k_1}, I_{m_2,k_2}, \ldots \text{ \textit{contient tous les} } I_{n,l}$$

(8) $$m_n \leqslant n$$

(9) $$[-d_n, d_n] \supset I_{m_n,k_n}$$

(10) $$d_{n+1} > d_n$$

(11) $$\Phi_{n+1} \subset B_n \subset [-d_n, d_n]$$

(12) $$\overline{P}B_n = \overline{P}[-d_n, d_n]$$

(13) $$T_n \subset [-d_n, d_n]$$

(14) $$R-\overline{P} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

(15) $$T_n \subset T_{n+1}.$$

Démonstration. Quand $P \neq 0$ et $P = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, les G_n étant ouverts, je pose $G_n^* = \prod_{k=1}^{n} G_k$ et les conditions (1), (2) sont remplies. Pour la suite $I_{n,l}$ (n étant fixe) je choisis une suite de segments bornés, fermés, tels que (5) soit remplie et:

(16) $$\operatorname{dist}(I_{n,l}, R-G_n^*) > 0 \quad \text{lorsque } R-G_n^* \neq 0$$

pour tout n, l. Je range les intervalles $I_{n,l}$ ($n=1,2,\ldots$, $l=1,2,\ldots$) en une suite simple, de façon que les termes successifs forment les groupes avec la somme des indices $n+l$ constante, cette somme étant non décroissante et l croissant dans les groupes particulières. Je choisis m_n égal au premier indice du n-ième terme de la suite $\{I_{n',l'}\}$, k_n égal au second indice. Ainsi tous les $I_{n,l}$ sont rangés en la suite (7):

$$I_{m_1,k_1}, I_{m_2,k_2}, \ldots (m_1=1, k_1=1, m_2=2, k_2=1,$$

$$\{I_{m_n,k_n}\}=I_{1,1}, I_{2,1}, I_{1,2}, I_{3,1}, I_{2,2}, I_{1,3}, \ldots I_{p,1}, I_{p-1,2}, \ldots I_{1,p}, I_{p+1,1}, \ldots)$$

avec:

$$n=k_n+\frac{(m_n+k_n-1)(m_n+k_n-2)}{2},$$

$$m_n=\frac{E\left(-\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right)E\left(-\frac{\sqrt{8n+1}+1}{2}\right)}{2}-n+1,$$

$$k_n=n-\frac{E\left(-\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2}\right)E\left(-\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right)}{2}.$$

Chaque groupe de termes I_{m_n,k_n} avec la somme m_n+k_n des indices constante contenant au moins un terme, le numéro du groupe $(=m_n+k_n-1)$ n'est supérieur au numéro du terme I_{m_n,k_n} $(=n)$ et comme $k_n\geqslant 1$, j'obtiens $n\geqslant m_n$, c'est-à-dire (**8**). Je définis d_1 comme le plus petit des nombres entiers, positifs, satisfaisant à la condition $[-d_1,d_1]\supset I_{m_1,k_1}=I_{1,1}$. Ensuite on définit d_n par induction: les nombres $d_1,d_2,\ldots,d_{s-1}$ étant définis et satisfaisant pour $1\leqslant i\leqslant s-1$ aux conditions $[-d_i,d_i]\supset I_{m_i,k_i}$ et $d_i>d_{i-1}$ lorsque $i>1$, je définis d_s comme le plus petit nombre entier positif tel que $[-d_s,d_s]\supset I_{m_s,k_s}$ et $d_s>d_{s-1}$. Les nombres $d_1,\ldots,d_{s-1}$ sont déterminés pour $s=2$, et par suite pour tout s et satisfont à (**9**), (**10**).

À chaque point x appartenant à l'ensemble $\overline{P}$ je fais correspondre l'intervalle ouvert $\left(x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}\right)$; soit H_n la somme de ces intervalles. L'ensemble $H_n(-d_n,d_n)$ est vide ou se compose d'un nombre fini d'intervalles ouverts (dont deux au plus ont la longueur inférieure à $1/n$). Soit

(17) $$B_n=\overline{H_n(-d_n,d_n)}.$$

On a donc

(18) $$\overline{P}\subset H_{n+1}\subset H_n$$

(19) $$B_n\subset[-d_n,d_n].$$

L'ensemble B_n est formé par un nombre fini de segments fermés, disjoints, de longueur positive, ou bien est vide. Lorsque $B_n=[-d_n,d_n]$, je pose $T_n=0$, dans le cas contraire l'ensemble $(-d_n,d_n)-B_n$ n'est pas vide et est composé d'un nombre fini d'intervalles ouverts, disjoints, que je vais désigner par $(a_{i,n},b_{i,n})$, $i=1,2,\ldots,t_n$; ces intervalles n'ont pas d'extrémité commune, car l'ensemble B_n ne contient pas de points isolés. Je définis le nombre positif $\varDelta_n$ de la manière suivante: lorsque tous les ensembles $(-d_m,d_m)-B_m$, $m=1,2,\ldots,n$, sont vides, je pose $h_n=1$, dans le cas contraire h_n est égal à la plus petite longueur des segments $(a_{i,m},b_{i,m})$ correspondants aux ensembles non vides $(-d_m,d_m)-B_m$, $m\leqslant n$,

$$\varDelta_n=\frac{\min(1,h_n)}{3n}.$$

Lorsque $B_n\neq[-d_n,d_n]$, je définis T_n comme il suit:

(20) $$T_n=\sum_{i=1}^{t_n}[a_{i,n}+\varDelta_n, b_{i,n}-\varDelta_n].$$

L'ensemble T_n (s'il n'est pas vide) se compose donc d'un nombre fini $(=t_n)$ de segments fermés, disjoints (20); il en résulte (**13**), et lorsque $T_n\neq 0$ et $B_n\neq 0$, on a $\operatorname{dist}(B_n,T_n)=\varDelta_n$. Je vais démontrer que

(21) $$\varDelta_{n+1}<\varDelta_n.$$

Lorsque l'ensemble $(-d_m,d_m)-B_m$, pour un $m\leqslant n$, n'est pas vide, on a $h_{n+1}\leqslant h_n$, donc $\min(1,h_n)\geqslant\min(1,h_{n+1})$ et l'inégalité (21) a lieu. Lorsque tous les ensembles $(-d_m,d_m)-B_m$ pour $m\leqslant n$ sont vides, $h_n=1$ et $\min(1,h_n)=1\geqslant\min(1,h_{n+1})$, indépendamment de la valeur de h_{n+1}, et par suite (21) a aussi lieu. Je pose:

(22) $$\varPhi_1=\overline{P}B_1-G_1^*,\ \varPhi_n=\overline{P}B_{n-1}-G_n^* \text{ pour } n>1$$

et je vais démontrer, que les ensembles $\varPhi_n$, B_n, T_n, $I_{n,l}$ et G_n^* ainsi définis et les nombres m_n, k_n, d_n satisfont à toutes les conditions du lemme 3.

L'ensemble fermé $\varPhi_n$ est non dense, car dans le cas contraire il contiendrait un segment, ce qui est impossible, puisque, selon (22):

(23) $$\varPhi_n\subset\overline{P}(R-G_n^*)\subset\overline{P}\sum_{n=1}^{\infty}(R-G_n^*)=\overline{P}(R-\prod_{n=1}^{\infty}G_n^*)=\overline{P}(R-P)=\overline{P}-P$$

(suivant la formule (**1**) déjà démontrée) où l'ensemble $\overline{P}-P$ est, selon le lemme 2 (avec $Q=0$), de I-e catégorie.

Les propositions (**1**), (**2**), (**5**), (**7**), (**8**), (**9**), (**10**), (**13**) se trouvent établies; de (19) et (22) résulte (**11**), en outre selon (22) $\Phi_n \subset R - G_n^*$, donc

$$\operatorname{dist}(I_{n,l}, \Phi_n) \geqslant \operatorname{dist}(I_{n,l}, R - G_n^*) > 0$$

(selon (16)), lorsque Φ_n n'est pas vide, donc (**6**) a lieu. On a

(24) $$B_n \supset H_n[-d_n, d_n],$$

car $B_n \supset H_n(-d_n, d_n)$ selon (17) et lorsque p. ex. $d_n \in H_n$, l'ensemble H_n étant ouvert, un intervalle (ξ, d_n) appartient à $(-d_n, d_n) H_n \subset B_n$. Comme B_n est fermé, $d_n \in B_n$. De (24) et (18) résulte $B_n \supset \overline{P}[-d_n, d_n]$, $\overline{P}B_n \supset \overline{P}\,\overline{P}[-d_n, d_n]$,

(25) $$\overline{P}B_n \supset \overline{P}[-d_n, d_n].$$

Il résulte de (19) que $\overline{P}B_n \subset \overline{P}[-d_n, d_n]$; en tenant compte de (25) on en déduit (**12**). Il reste à établir: (**3**), (**4**), (**14**), (**15**). En tenant compte de (22), il résulte de la relation prouvée (**12**):

(26) $$\Phi_1 = \overline{P}[-d_1, d_1] - G_1^*, \quad \Phi_2 = \overline{P}[-d_1, d_1] - G_2^*, \quad \Phi_n = \overline{P}[-d_{n-1}, d_{n-1}] - G_n^*$$

pour $n > 1$.

La relation (**2**) et l'inégalité (**10**) étant démontrées, on a $[-d_n, d_n] \supset [-d_{n-1}, d_{n-1}]$, donc (26) entraîne $\Phi_{n+1} \supset \Phi_n$, d'où (**4**).

Quand T_n est vide, on a (**15**). Lorsque T_n est non vide, soit $[a_{i,n} + \Delta_n, b_{i,n} - \Delta_n]$ une composante arbitraire de T_n, contenue dans $(a_{i,n}, b_{i,n})$. Je vais démontrer, que chaque composante $(a_{i,n}, b_{i,n})$ de l'ensemble $(-d_n, d_n) - B_n$ est contenue dans une composante $(a_{j,n+1}, b_{j,n+1})$ de l'ensemble $(-d_{n+1}, d_{n+1}) - B_{n+1}$, c'est-à-dire:

(27) $$(-d_n, d_n) - B_n \subset (-d_{n+1}, d_{n+1}) - B_{n+1}.$$

En effet, lorsque $x \in (-d_n, d_n) - B_n$, on a $x \in (-d_n, d_n)$ et la distance x de l'ensemble fermé B_n est positive, par suite, il résulte de (17) qu'un voisinage U de x, contenu dans $(-d_n, d_n)$, ne contient aucun point de $\overline{H_n(-d_n, d_n)}$, ce qui n'a lieu, que lorsque U ne contient aucun point de $H_n(-d_n, d_n)$. On a donc $UH_n = 0$ et comme $H_{n+1} \subset H_n$, $UH_{n+1} = 0$. Donc U ne contient aucun point de $H_{n+1}(-d_{n+1}, d_{n+1})$, c'est-à-dire $x \in R - B_{n+1}$. Comme $x \in (-d_n, d_n)$, il résulte de l'inégalité (**10**) déjà prouvée que $x \in (-d_{n+1}, d_{n+1})$, donc $x \in (-d_{n+1}, d_{n+1}) - B_{n+1}$ et la relation (27) est vraie. On a donc:

$$a_{j,n+1} \leqslant a_{i,n} < b_{i,n} \leqslant b_{j,n+1},$$

d'où en vertu de l'inégalité (21) résulte:

$$a_{j,n+1} + \Delta_{n+1} < a_{i,n} + \Delta_n < b_{i,n} - \Delta_n < b_{j,n+1} - \Delta_{n+1}.$$

Il existe donc une composante de T_{n+1} qui contient la composante considérée de T_n; d'où $T_n \subset T_{n+1}$, c. à d. (**15**).

Il résulte de la définition (20) de T_n que $T_n \subset (-d_n, d_n) - B_n$, et la formule (**12**), déjà démontrée, donne

$$B_n \supset \overline{P}[-d_n, d_n], \quad R - B^n \subset (R - \overline{P}) + (R - [-d_n, d_n]),$$

donc

$$(-d_n, d_n) - B_n = (-d_n, d_n)(R - B_n) \subset (-d_n, d_n)(R - \overline{P}),$$

$$T_n \subset (-d_n, d_n)(R - \overline{P}) \subset R - \overline{P}$$

et par suite

(28) $$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \subset R - \overline{P}.$$

Il résulte de (23) que

(29) $$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \subset \overline{P} - P.$$

Lorsque $R - \overline{P}$ est vide, (28) entraîne (**14**). Lorsque $R - \overline{P}$ n'est pas vide, on a $\operatorname{dist}(x, \overline{P}) = \delta_x > 0$ pour tout $x \in R - \overline{P}$, et par suite $\operatorname{dist}(x, H_n) > \frac{\delta_x}{2} > 0$ pour tout $n > n_1(x) \geqslant \frac{1}{\delta_x}$, donc $x \mathrel{\bar{\in}} \overline{H}_n$, $x \mathrel{\bar{\in}} \overline{H_n(-d_n, d_n)}$, c'est-à-dire $x \in R - B_n$ pour tout $n > n_1(x)$. En tenant compte de la formule (**10**) déjà démontrée, on a $\lim_{n \to \infty} d_n = +\infty$ (suite croissante de nombres entiers), il existe donc un $n_2(x)$ tel que $x \in (-d_n, d_n)$ pour tout $n > n_2(x)$; ainsi qu'un $n_0 > \max(n_1(x), n_2(x))$ tel que $x \in (-d_{n_0}, d_{n_0}) - B_{n_0}$. Je désigne par $\eta(x, n)$ la distance de x à l'extrémité (moins éloignée) de la composante de l'ensemble $(-d_n, d_n) - B_n$, contenant x; en vertu de (27) on a $\eta(x, m) \geqslant \eta(x, n)$ pour tout $m \geqslant n$, en outre $\eta(x, n) > 0$, l'ensemble $(-d_n, d_n) - B_n$ étant ouvert. D'autre part, $\lim_{n \to \infty} \Delta_n = 0$, car $\Delta_n = \min\left(\frac{1}{3n}, \frac{h_n}{3n}\right) \leqslant \frac{1}{3n}$. Il existe donc un nombre entier positif $m_0 \geqslant n_0$ tel que $2\Delta_{m_0} \leqslant \eta(x, n_0) \leqslant \eta(x, m_0)$ et par suite x appartient à la composante de T_{m_0}; car chaque composante de $(-d_{m_0}, d_{m_0}) - B_{m_0}$ contient la composante de T_{m_0}, et la différence des longueurs de ces composantes est égale à $2\Delta_{m_0}$. On a donc $x\in\sum_{n=1}^{\infty}T_n$, c'est-à-dire $R-\overline{P}\subset\sum_{n=1}^{\infty}T_n$, et (28) entraîne (**14**).

Lorsque $\overline{P}-P$ est vide, (29) entraîne (**3**). Lorsque $\overline{P}-P$ n'est pas vide, on a, d'après les propositions (**1**) et (**2**), déjà démontrées, $x\in\overline{P}-G_n^*$ pour tout $x\in\overline{P}-P$, $n>n_3(x)$ et $x\in[-d_{n-1},d_{n-1}]$ pour tout $n>n_4(x)$, donc $x\in\overline{P}[-d_{n-1},d_{n-1}]-G_n^*=\Phi_n$ selon (26) pour tout $n>\max[n_3(x),n_4(x)]$, par suite $x\in\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n$, $\overline{P}-P\subset\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n$ et d'après (29) on a (**3**); toutes les conditions du lemme 3 sont remplies.

Lorsque P est vide, il suffit de choisir pour G_n^* une suite arbitraire d'intervalles ouverts avec une extrémité commune, dont les longueurs tendent vers 0, $\Phi_n=0$, $B_n=0$, $T_n=[-d_n,d_n]$, $I_{n,l}$, m_n, k_n, d_n comme auparavant. Il est facile à vérifier que toutes les conditions du lemme 3 sont dans ce cas remplies.

Lemme 4. *Si les ensembles G_n^*, Φ_n, $I_{n,l}$, B_n et les nombres m_n, k_n, d_n satisfont aux conditions du lemme 3 pour un ensemble P non vide, du type G_δ et chaque couple n, l, et si les fonctions de la variable entière, positive $s(m)$, $q(m)<+\infty$, et les fonctions de la variable réelle $F(x)$, $t_n(x)<+\infty$ satisfont aux inégalités:*

$$(\mathbf{30})\qquad t_n(x)<C<+\infty \textit{ pour tout } x\in\Phi_{m_n} \textit{ et tout } n,$$

$$(\mathbf{31})\qquad t_n(x)<q(m_n) \textit{ pour tout } x\in\Phi_n \textit{ pour tout } n,$$

$$(\mathbf{32})\qquad F(x)>s(m_n) \textit{ pour tout } x\in B_nPI_{m_n,k_n} \textit{ pour tout } n,$$

alors on a les inégalités:

$$(\mathrm{I})\qquad F(x)\geqslant\sup_n s(n) \textit{ pour tout } x\in P,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \sup_n t_n(x)<+\infty \textit{ pour tout } x\in\overline{P}-P.$$

Démonstration. En vertu de (**12**) on a $P\overline{P}B_n=P\overline{P}[-d_n,d_n]$, c'est-à-dire $PB_n=P[-d_n,d_n]$, d'où

$$(33)\qquad PB_nI_{m_n,k_n}=P[-d_n,d_n]I_{m_n,k_n}=PI_{m_n,k_n}$$

suivant (**9**). Pour tout n on a, selon (**5**)

$$(34)\qquad PG_n^*=\sum_{l=1}^{\infty}PI_{n,l}.$$

Considérons la suite d'indices $i_1,i_2,\dots$ des termes de la suite (**7**) identiques à $I_{n,l}$, n étant fixe, de sorte que $I_{n,1}=I_{m_{i_1},k_{i_1}}$, $I_{n,2}=I_{m_{i_2},k_{i_2}},\dots i_l$ est une fonction des n et l. Alors:

$$(35)\qquad k_{i_l}=l,\ m_{i_l}=n \text{ pour tout } l.$$

D'après (**32**), (33) on a

$$F(x)>s(m_{i_l}) \text{ pour tout } x\in PI_{m_{i_l},k_{i_l}} \text{ et tout } l,$$

c. à. d. $F(x)>s(n)$ pour tout $x\in PI_{n,l}$ et tout l (selon (35)),

$$F(x)>s(n) \text{ pour tout } x\in\sum_{l=1}^{\infty}PI_{n,l}=PG_n^* \text{ selon (34)},$$

$$F(x)\geqslant\sup_n s(n) \text{ pour tout } x\in\prod_{n=1}^{\infty}PG_n^*=P \text{ en vertu de } (\mathbf{1}),$$

c. à d. (I) est vrai. Lorsque $x\in\overline{P}-P$, il existe en vertu de (**3**) un $p=p(x)$ tel que $x\in\Phi_p$. Selon les hypothèses du lemme 4, les valeurs $t_1(x),t_2(x),\dots,t_{p-1}(x)$ sont finies. Je vais évaluer $\sup_n t_n(x)$ pour $x\in\Phi_p$. Pour tout n on a l'une des inégalités suivantes:

$$(\wedge)\qquad n<p,$$

$$(\wedge\wedge)\qquad n\geqslant p \text{ et } m_n<p,$$

$$(\wedge\wedge\wedge)\qquad n\geqslant p \text{ et } m_n\geqslant p.$$

Nous avons dans le cas $(\wedge)$

$$(36)\qquad t_n(x)\leqslant\max(t_1(x),t_2(x),\dots,t_{p-1}(x))<+\infty \text{ pour } (\wedge).$$

Dans le cas $(\wedge\wedge)$ on a, en vertu de (**4**), $\Phi_p\supset\Phi_p$, $x\in\Phi_n$ et selon (**31**), $t_n(x)<q(m_n)$, mais comme $m_n<p$, $m_n\in(1,2,\dots,p-1)$

$$(37)\qquad t_n(x)<\max(q(1),q(2),\dots,q(p-1))<+\infty \text{ pour } (\wedge\wedge).$$

Dans le cas $(\wedge\wedge\wedge)$, d'après (**4**) on a $\Phi_{m_n}\supset\Phi_n$, $x\in\Phi_{m_n}$ et selon (**30**)

$$(38)\qquad t_n(x)<C \text{ pour } (\wedge\wedge\wedge).$$

D'après (36), (37), (38), on a

$$t_n(x)\leqslant\max(q(1),q(2)\dots q(p-1),t_1(x),t_2(x)\dots t_{p-1}(x),C)=$$
$$=C(p,x)<+\infty \text{ pour tout } n,$$

par suite $\sup_n t_n(x)\leqslant C(p,x)<+\infty$ pour tout $x\in\Phi_p$, $\sup_n t_n(x)<+\infty$ pour tout $x\in\overline{P}-P$ (selon (**3**)), c. à d. (II) est vrai, c. q. f. d.

6. Lemme 5. *À tout couple d'ensembles $A \subset [0,1]$, $\Phi \subset [0,1]$, l'ensemble Φ étant fermé, non dense, et tout nombre $\delta > 0$ on peut faire correspondre l'ensemble ouvert $\Omega(A,\delta) \supset A$, contenu dans $(-\delta, 1+\delta)$, composé d'un nombre fini $\geqslant 0$ d'intervalles ouverts, disjoints, sans extrémités communes, dont les points sont à distance $< \delta$ de l'ensemble A et tel que l'ensemble Φ est composé de deux parties fermées, disjointes: $N_1 \subset \Omega(A,\delta)$ et $N_2 \subset R - \overline{\Omega}(A,\delta)$.*

Démonstration. Lorsque $A = 0$, il est facile de vérifier que l'ensemble $\Omega = 0$ satisfait à toutes les conditions du lemme 5. Lorsque $A \neq 0$, je désigne par Ω_1 la somme de tous les intervalles ouverts de longueur δ et dont les centres sont dans A. Chaque point de l'ensemble ouvert Ω_1 est à distance $< \frac{\delta}{2}$ d'un point de A. Les composantes de Ω_1 étant de longueur $\geqslant \delta$ et $\Omega_1 \subset \left(-\frac{\delta}{2}, 1+\frac{\delta}{2}\right)$, ces composantes sont en nombre fini. Si les composantes de Ω_1 n'ont pas d'extrémités communes, je pose $\Omega_2 = \Omega_1$; dans le cas contraire, je détermine l'ensemble Ω_2, dont les points sont à distance $< \frac{3}{4}\delta$ de A, de façon que les composantes de Ω_2, dont le nombre est fini, soient sans extrémités communes. À cet effet je définis le nombre h_1, comme le minimum de toutes les distances mutuelles positives des extrémités des composantes de Ω_1 et du nombre δ. Comme le nombre des composantes de Ω_1 est fini, on a $h_1 > 0$. Je définis Ω_2 comme l'ensemble qui s'obtient en remplaçant dans Ω_1 chaque composante par l'intervalle concentrique dont la longueur surpasse de $\frac{h_1}{2}$ celle de la composante; la somme de ces intervalles est l'ensemble Ω_2. Lorsque Ω_2 satisfait aux conditions restantes du lemme 5, je pose $\Omega(A,\delta) = \Omega_2$, ce qui a lieu, en particulier, lorsque $\Phi - \Omega_2 = 0$, car alors $\Phi \subset \Omega_2$, et il suffit d'admettre que $N_1 = \Phi$, $N_2 = 0$. Lorsque Ω_2 ne satisfait pas aux conditions du lemme 5, on a $\Phi - \Omega_2 \neq 0$ et alors l'ensemble $N_1^{\cdot} = \Phi\Omega_2$ n'est pas fermé, ou bien l'ensemble $N_2^{\cdot} = \Phi - \Omega_2$ a des points communs avec la frontière de Ω_2. En prolongeant convenablement les composantes de l'ensemble Ω_2, j'obtiens l'ensemble $\Omega(A,\delta)$ satisfaisant à toutes les conditions du lemme 5. En désignant par $(a_1,b_1), (a_2,b_2), \ldots, (a_n,b_n)$ les composantes de Ω_2, où $b_i < a_{i+1}$ pour $i = 1,2,\ldots,n-1$, $h_2 = \min(a_2-b_1, a_3-b_2, \ldots, a_n-b_{n-1}, \delta)$, on peut trouver dans $\left(a_i - \frac{h_2}{4}, a_i\right)$ et dans $\left(b_i, b_i + \frac{h_2}{4}\right)$ des intervalles (a_i', a_i''),

(b_i', b_i'') ne contenant pas de points de Φ, car selon les hypothèses du lemme 5 l'ensemble Φ est non dense. Je pose $a_i^{\cdot} = \frac{a_i' + a_i''}{2}$ et $b_i^{\cdot} = \frac{b_i + b_i''}{2}$. Il vient

$$\Phi(a_i^{\cdot}, b_i^{\cdot}) = \Phi[a_i^{\cdot}, b_i^{\cdot}],\ \Phi(b_i^{\cdot}, a_{i+1}^{\cdot}) = \Phi[b_i^{\cdot}, a_{i+1}^{\cdot}],\ \Phi(-\infty, a_1^{\cdot}) = \Phi(-\infty, a_1^{\cdot}],$$
$$\Phi(b_n^{\cdot}, +\infty) = \Phi[b_n^{\cdot}, +\infty) \tag{1}$$

pour tout i. Les intervalles $(a_i^{\cdot}, b_i^{\cdot})$ sont ainsi plus longs que (a_i, b_i), mais $b_i^{\cdot} - a_i^{\cdot} < b_i - a_i + \frac{h_2}{2}$. Par suite les $(a_i^{\cdot}, b_i^{\cdot})$ n'ont pas d'extrémités communes et leurs points sont éloignés $< \delta$ de A. Je pose $\Omega(A,\delta) = \sum_{i=1}^{n} (a_i^{\cdot}, b_i^{\cdot})$. D'après (1) on a alors:

$$N_1 = \Phi\Omega(A,\delta) = \sum_{i=1}^{n} \Phi[a_i^{\cdot}, b_i^{\cdot}],\quad N_2 = \Phi(R - \Omega(A,\delta)) = \Phi(-\infty, a_1^{\cdot}] +$$
$$+ \Phi[b_n^{\cdot}, +\infty) + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi[b_i^{\cdot}, a_{i+1}^{\cdot}] = \Phi(-\infty, a_1^{\cdot}) + \Phi(b_n^{\cdot}, +\infty) + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(b_i^{\cdot}, a_{i+1}^{\cdot}) =$$
$$= \Phi[R - \overline{\Omega}(A,\delta)] = \Phi - \overline{\Omega}(A,\delta),$$

c'est-à-dire, $\Omega(A,\delta)$ satisfait à toutes les conditions du lemme 5.

Lemme 6. *À tout couple d'ensembles fermés, non denses N et M, où N est contenu dans un ensemble ouvert, borné G, et à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un système fini d'intervalles disjoints de longueur $< \varepsilon$, $(l_1, m_1) \ldots (l_k, m_k)$ contenus dans G, et un système d'intervalles situés à l'intérieur de ceux-ci: $(l_1', m_1'), \ldots, (l_k', m_k')$, $l_i < l_i' < m_i' < m_i$ pour $i = 1,2,\ldots,k$, tels que:*

$$M \sum_{i=1}^{k} ([l_i, l_i'] + [m_i', m_i]) = 0,$$

$$N \subset \sum_{i=1}^{k} (l_i', m_i'), \tag{2}$$

$$N(l_i', m_i') \neq 0 \text{ pour tout } i = 1,2,\ldots,k, \text{ lorsque } N \neq 0. \tag{3}$$

Démonstration. Lorsque N n'est pas vide, on a $\operatorname{dist}(N, R-G) > 0$, car $N \subset G$, N et $R-G$ sont fermés. Je couvre tout point $x \in N$ par un intervalle ouvert, de centre x et de longueur $\operatorname{dist}(N, R-G)$, la somme de ces intervalles est un ensemble ouvert, ayant un nombre fini de composantes et sa fermeture se compose d'un nombre fini de segments disjoints $[s_1,t_1],\dots,[s_j,t_j]$, dont les points sont situés à distance $\leqslant\frac{\operatorname{dist}(N,R-G)}{2}$ de N, donc $\sum_{i=1}^{j}[s_i,t_i]\subset G$. Comme N est non dense, il existe dans la troisième partie central de $[s_i,t_i]$ un intervalle ouvert ne contenant pas de points de N; en le supprimant de $[s_i,t_i]$, il y reste deux segments fermés de longueur inférieure à $\frac{2}{3}(t_i-s_i)$; en itérant ce procédé n fois, j'obtiens $2^n j$ segments de longueur $<\left(\frac{2}{3}\right)^n\max_i(t_i-s_i)$, par suite, pour n suffisamment grand $<\frac{\varepsilon}{2}$. Je supprime ceux qui ne contiennent pas de points de N et je prolonge les restants de deux côtés de façon qu'ils restent disjoints, contenus dans G et de longueur $<\frac{3}{4}\varepsilon$. En les désignant par $[\bar{l}_1,\bar{m}_1],\dots,[\bar{l}_k,\bar{m}_k]$, on a:

(4) $$N\subset\sum_{i=1}^{k}(\bar{l}_i,\bar{m}_i)$$

(5) $$N(\bar{l}_i,\bar{m}_i)\neq 0 \text{ pour tout } i=1,2,\dots,k.$$

Je désigne par (l_i'',m_i'') des intervalles disjoints, contenus dans G et de longueur $<\varepsilon$ tels que $l_i''<\bar{l}_i<\bar{m}_i<m_i''$. Comme M est non dense, il existe des intervalles fermés $[l_i,l_i']\subset(l_i'',\bar{l}_i)$, $[m_i',m_i]\subset(\bar{m}_i,m_i'')$, ne contenant pas de points de M; alors, comme $(\bar{l}_i,\bar{m}_i)\subset(l_i',m_i')$, $m_i-l_i<m_i''-l_i''$, les conditions (2), (3) sont remplies en vertu de (4) et (5). Lorsque N est vide, il suffit que $k=1$ et $[\bar{l}_1,\bar{m}_1]$ soit un intervalle fermé, contenu dans G, de longueur $<\frac{3}{4}\varepsilon$, d'ailleurs arbitraire; on a évidemment $N(l_1,m_1)=0$.

Définition 1. Une fonction, admettant pour toute valeur de x une dérivée finie et continue s'appelle *fonction de classe* C_1. J'appelle *fonction de classe* $C_{(1)}$ toute fonction de classe C_1, holomorphe sur un nombre fini d'intervalles fermés (qui peuvent devenir des demi-droites ou l'axe des x) sans points intérieurs communs, dont la somme est l'axe des x tout entier.

Il résulte de cette définition que la somme de deux fonctions de classe $C_{(1)}$ est une fonction de classe $C_{(1)}$, et $af(x)$ est de classe $C_{(1)}$ lorsque $f(x)$ est de classe $C_{(1)}$ pour tout a réel.

L'équation $f(x)=0$ (ou $f(x)=a$), où $f(x)$ est de classe $C_{(1)}$, est remplie pour un nombre fini ($\geqslant 0$) de valeurs de x dans chaque intervalle fini et pour tout x appartenant à un nombre fini de segments, car une fonction holomorphe ne s'annulant pas identiquement n'a pas de point d'accumulation de zéros à l'intérieur du domaine de régularité. Par suite les ensembles $\{f(x)\geqslant a\}$, $\{f(x)\leqslant a\}$, $\{|f(x)|\geqslant a\}$ se composent d'un nombre fini d'intervalles (demi-droites, droites) fermés, disjoints et des points isolés, en nombre fini dans chaque intervalle borné.

Je dis que $f(x)$ a constamment le signe $+$ dans $[u,v]$, lorsque $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in[u,v]$, et le signe $-$, lorsque $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in[u,v]$ et il existe un $x=x_1\in[u,v]$ tel que $f(x_1)<0$. Si $f(x)$ est de classe $C_{(1)}$, il existe pour tout u réel un segment $[u,v]$ et un segment $[w,u]$, tel que $f(x)$ ne change pas de signe (a le signe constant) dans $[u,v]$ et dans $[w,u]$.

Lemme 7. *À tout couple d'ensembles fermés non denses N et M, où N est contenu dans un ensemble ouvert borné G, et à tout système de nombres positifs K,λ,ε, on peut associer un système fini d'intervalles disjoints $[l_i',m_i']\subset(l_i,m_i)\subset G$, $i=1,2,\dots,k$, de longueur $<\lambda$, tels que les intervalles $[l_i,l_i']$, $[m_i',m_i]$ ne contiennent pas de points de l'ensemble M, $N\subset\sum_{i=1}^{k}(l_i',m_i')$, $N(l_i,m_i)\neq 0$ lorsque $N\neq 0$, et que pour tout systeme de nombres réels a_i, $|a_i|\leqslant K$, il existe une fonction $h(x)$ de classe $C_{(1)}$ satisfaisant aux conditions:*

(6) $$h(x)=0 \text{ pour tout } x\,\bar{\in}\sum_{i=1}^{k}(l_i,m_i),$$

(7) $$h(x)=a_i \text{ pour tout } x\in[l_i',m_i'],$$

(8) $$\left|\int_{x_1}^{x_2}h(t)\,dt\right|<\varepsilon \text{ pour tout } (x_1,x_2).$$

Je désigne par $h[x,N,M,G,K,\lambda,\varepsilon,a_i,(l_i,m_i)]$ une fonction de ce genre.

Démonstration. En remplaçant, dans le lemme 6, ε par $\min\left(\frac{\varepsilon}{2K},\lambda\right)$, j'obtiens les intervalles (l_i,m_i) et $[l_i',m_i']$ satisfaisant à toutes les conditions du lemme 6, et en particulier de longueur inférieure à $\frac{\varepsilon}{2K}$ et à λ. Il reste à démontrer l'existence de la fonction $h(x)$. Je construis l'image d'une telle fonction à l'aide d'un nombre fini d'arcs de circonférences (sans point singulier) et de segments de droites. Je désigne par $\varphi_i(x)$ une fonction, dont l'image (fig. 1) se compose des demi-droites sur l'axe des x pour $x \overline{\epsilon} (l_i, m_i)$, du segment de la droite $y=a_i$ pour $x \epsilon [l_i', m_i']$, et, dans les intervalles $[l_i, l_i']$, $[m_i', m_i^{\bullet})$, $(m_i^{\bullet}$ étant un point de l'intervalle $(m_i', m_i))$, d'un système de 4 arcs de circonférences, tangentes à l'axe des x et à la droite $y=a_i$, et des deux segments tangents à ces circonférences,

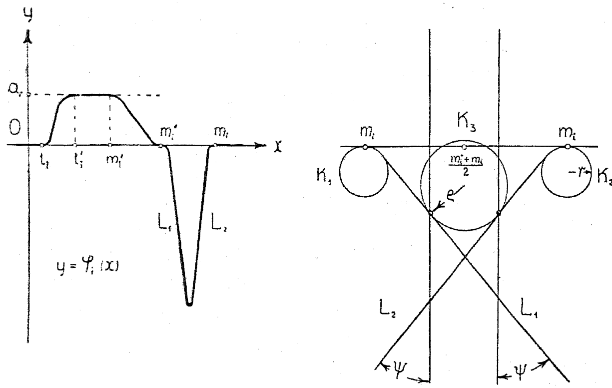


Fig. 1.

toute la figure correspondante à ces deux intervalles étant située entre l'axe des x et la droite $y=a_i$. Pour $x \epsilon [m_i^{\bullet}, m_i]$ l'image de $\varphi_i(x)$ est située d'un autre côté de l'axe des x que pour $x \epsilon [l_i, m_i^{\bullet}]$ et se compose d'arcs des deux circonférences K_1 et K_2, dont les rayons sont égaux à $r < \frac{m_i - m_i^{\bullet}}{2}$, tangents aux points $m_i^{\bullet}$ et m_i à l'axe des x, des deux segments des droits L_1 et L_2 tangents à K_1 et K_2 resp. et formant les angles $\pm\psi$ avec l'axe des y, et d'un arc d'un cercle K_3 tangent à L_1 et L_2, de rayon ϱ, ϱ et ψ étant choisis de sorte que les aires correspondantes à la figure au-dessus de l'axe des x (sur $[l_i, m_i^{\bullet}]$ p. ex.) et au-dessous de l'axe des x (sur $[m_i^{\bullet}, m_i]$) soient égales, c'est-à-dire

$$\int_{l_i}^{m_i} \varphi_i(t)\,dt = 0. \tag{9}$$

Ceci est toujours possible. On peut, en effet, établir la relation entre ϱ et ψ de façon que l'aire limitée par l'axe des x, les deux segments de L_1 et L_2 et les arcs de trois cercles K_1, K_2, K_3 tangents à eux, soit une fonction continue de ψ, décroissante de $+\infty$ à 0 lorsque ψ augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$. En particulier, il existe une et une seule valeur $\psi_0 \epsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pour laquelle cette aire est précisément égale à celle du côté opposé de l'axe des x. À cet effet il suffit de définir ϱ comme il suit: je choisis deux droites (fig. 1) fixes, parallèles à l'axe des y, dont les distances de $\frac{m_i^{\bullet}+m_i}{2}$ sont égales entre elles et inférieures à $\frac{m_i - m_i^{\bullet}}{2} - r$. Les points d'intersection de ces droites avec les tangentes L_1 et L_2 à K_1 et K_2, qui forment des angles $\pm\psi$ avec l'axe des y (plus rapprochés à l'axe des x) soient les points de contact de K_3 avec L_1 et L_2. Ainsi l'aire limitée par l'axe des x, K_1, L_1, K_3, L_2, K_2 est une fonction monotone et continue de ψ. Lorsque $a_i=0$, je pose $\varphi_i(x) \equiv 0$. On a, pour tout (x_1, x_2),

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_i(t)\,dt = 0 \text{ lorsque } (l_i, m_i) \subset (x_1, x_2) \text{ ou } (l_i, m_i)(x_1, x_2) = 0, \tag{10}$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \varphi_i(t)\,dt \right| \leqslant |a_i| (m_i^{\bullet} - l_i) < K(m_i - l_i) < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Car (10) résulte de (9) et de la définition de $\varphi_i(x)$ (qui est égal à 0 pour tout $x \overline{\epsilon} (l_i, m_i)$); lorsque les points de l'intervalle (l_i, m_i) sont situés à l'intérieur et à l'extérieur de l'intervalle d'intégration, l'intégrale est égale à la différence des parties de l'aire positive et négative, variant entre 0 et maximum de l'aire; elle peut être donc évaluée par un maximum, le même pour l'aire positive et négative, égal à l'aire située au-dessus de l'intervalle $(l_i, m_i^{\bullet})$ dans lequel $|\varphi_i(x)| \leqslant a_i$. Je pose $h(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$; les conditions (6), (7) résultent aussitôt de la définition de $h(x)$, et (8) de (10), (11), car deux au plus des intervalles (l_i, m_i) empiètent partiellement sur (x_1, x_2), par ex. pour $i=i'$, $i=i''$, l'intégrale de la somme des $\varphi_i(x)$ restants est nulle. Donc les intervalles (l_i, m_i), (l'_i, m'_i) et la fonction $h(x)$ satisfont à toutes les conditions du lemme 7.

7. Définition 2. $k(x, u_i, v_i, u'_i, v'_i, \Theta, F(x))$ désigne une fonction $k(x)$ de classe $C_{(1)}$, satisfaisant aux conditions

$$(1) \qquad k(x)F(x)\geqslant 0 \text{ pour tout } x,$$

$$(2) \qquad |k(x)|\leqslant\Theta \text{ pour tout } x,$$

$$(3) \qquad |k(x)|=\Theta \text{ pour tout } x\epsilon\sum_{i=1}^{k}[u'_i, v'_i],$$

$$(4) \qquad k(x)=0 \text{ pour tout } x\bar{\epsilon}\sum_{i=1}^{k}(u_i, v_i),$$

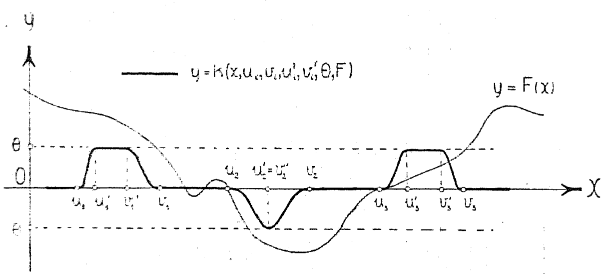


Fig. 2.

(en particulier il peut arriver que $u'_i=v'_i$) où $[u'_i, v'_i]\subset(u_i, v_i)$, (u_i, v_i), $i=1,2,\ldots,k$ sont disjoints et $\Theta\geqslant 0$, $F(x)$ ne change pas de signe dans aucun intervalle (u_i, v_i).

Il est facile de construire une telle fonction: son image qui se compose d'un nombre fini d'arcs des circonférences et de segments des droites représente la figure 2. (J'admets que $k(x)\geqslant 0$ dans $[u_i, v_i]$ lorsque $F(x)=0$ pour tout x dans cet intervalle). Il résulte immédiatement de la définition de $k(x)$ que

$$(5) \qquad \Big|\int_{x_1}^{x_2}k(t)\,dt\Big|\leqslant\Theta\sum_{i=1}^{k}\Big|(u_i, v_i)(x_1, x_2)\Big|.$$

Lemme 8. *À toute fonction continue $f(x)$, tout système de nombres positifs a, c_1, $c_2>a$, δ, ε, tout système d'ensembles fermés non denses $\Phi_1\subset\Phi_2\subset\Phi_3\subset[0,1]$ et tout intervalle fermé $I\subset[0,1]$ tel que $I\Phi_1=0$, on peut faire correspondre une fonction continue $g(x)$ satisfaisant aux conditions:*

$$(6) \qquad |g(x)|<c_1 \text{ pour tout } x\epsilon\Phi_1,$$

$$(7) \qquad |g(x)|<c_2 \text{ pour tout } x\epsilon\Phi_2,$$

$$(8) \qquad |g(x)|\geqslant|f(x)| \text{ pour tout } x\epsilon\{|f(x)|>a\}W[0,1],$$

W étant identique à l'axe des x lorsque Φ_2 est vide, $W=\{\mathrm{dist}(x,\Phi_2)>\delta\}$ lorsque Φ_2 n'est pas vide,

$$(9) \qquad |g(x)|>a \text{ pour tout } x\epsilon\Phi_3 I,$$

$$(10) \qquad \Big|\int_{x_2}^{x_1}[g(t)-f(t)]\,dt\Big|<\varepsilon \text{ pour tout } (x_1, x_2);$$

en outre $g(x)-f(x)$ est de classe $C_{(1)}$.

Démonstration. Dans le cas où en substituant $f(x)$ à $g(x)$ les inégalités (**6**), (**7**) et (**9**) sont réalisées, je pose $g(x)\equiv f(x)$. (Les inégalités (**8**) et (**10**) sont alors vérifiées évidemment). Dans le cas contraire, pour satisfaire à toutes les conditions (**6**)—(**10**), j'ajoute à la fonction $f(x)$ une fonction de classe $C_{(1)}$, dont l'intégrale est suffisamment petite (comme dans le lemme 7 et la définition 2), de façon que ces inégalités soient remplies aux points auxquels la fonction $f(x)$ elle-même ne leur satisfait pas. Je pose

$$(11) \qquad F=\{|f(x)|\geqslant c_1\}\Phi_1+\{|f(x)|\geqslant c_2\}\Phi_2,$$

$$(12) \qquad F_0=\{|f(x)|\leqslant a\}\Phi_3 I.$$

Les ensembles F et F_0 sont fermés, non denses, contenus dans $[0,1]$ et $FF_0=0$, car $\Phi_1 I=0$, d'après l'hypothèse et $\{|f(x)|\leqslant a\}\{|f(x)|\geqslant c_2\}=0$, puisque $c_2>a$. Il existe donc des ensembles ouverts G, G_0 (vides ou non) contenus dans $(-1, 2)$ et tels que

$$F\subset G, \quad F_0\subset G_0,$$

$$(13) \qquad GG_0=0.$$

Soit $\eta>0$ un nombre tel que, lorsque $[x_1,x_2]\subset[-1,2]$,

$$(14)\qquad |f(x_1)-f(x_2)|<\min\left(\frac{\varepsilon}{6},\frac{a}{2},c_1,c_2,\frac{c_2-a}{4}\right) \text{ pour tout } |x_1-x_2|<\eta.$$

Je pose

$$(15)\qquad \delta_1=\min(\delta,\eta,1,d) \text{ avec } d=\frac{\operatorname{dist}(\Phi_1,I)}{3} \text{ lorsque } \Phi_1\neq 0,$$

et $d=1$ lorsque $\Phi_1=0$. Suivant le lemme 5 on peut associer à l'ensemble $S=\{|f(x)|>a\}[0,1]$ l'ensemble ouvert $\Omega(S,\delta_1)\supset S$, dont les points sont à distances $<\delta_1$ des points de S, $\Omega(S,\delta_1)\subset(-\delta_1,1+\delta_1)$ tel que les ensembles $N_1=F_0\Omega(S,\delta_1)$ et $N_2=F_0-\Omega(S,\delta_1)$ sont fermés, non denses et $F_0-\Omega(S,\delta_1)=F_0-\overline{\Omega}(S,\delta_1)$. Par suite on déduit de (14), (15):

$$(16)\qquad |f(x)|>a-\min\left(\frac{\varepsilon}{6},\frac{c_2-a}{4}\right),\quad |f(x)|>\frac{a}{2} \text{ pour tout } x\in\Omega(S,\delta_1).$$

(16*) *Dans tout intervalle contenu dans $\Omega(S,\delta_1)$ la fonction $f(x)$ ne change pas de signe.*

Je désigne les ensembles ouverts $G_0-\overline{\Omega}(S,\delta_1)$, $G_0\Omega(S,\delta_1)$ respectivement par G_2 et G_1. Comme

$$N_1+N_2=F_0\subset G_0,\quad N_1\subset\Omega(S,\delta_1),\quad N_2\subset R-\overline{\Omega}(S,\delta_1),$$

on a

$$N_1\subset G_1,\quad N_2\subset G_2.$$

Il résulte de la définition de G_1 et G_2 et de (13) que les ensembles G, G_1, G_2 sont disjoints deux à deux. Je pose

$$(17)\qquad K=a+c_2+\max_{-1\leqslant x\leqslant 2}|f(x)|.$$

Selon le lemme 7 on peut faire correspondre aux nombres K, δ_1 et $\frac{\varepsilon}{6}$, à l'ensemble fermé non dense $N_1\subset G_1$ (resp. $N_2\subset G_2$, $F\subset G$) et à l'ensemble fermé non dense Φ_3, un système fini d'intervalles disjoints $(u_s,v_s)\subset G_1$, $(s_i,t_i)\subset G_2$, $(l_j,m_j)\subset G$, $s=1,2,\dots,m$, $i=1,2,\dots,k$, $j=1,2,\dots,n$, $[u_s',v_s']\subset(u_s,v_s)$, $[s_i',t_i']\subset(s_i,t_i)$, $[l_j',m_j']\subset(l_j,m_j)$ de longueur $<\delta_1$, tel que

$$(18)\qquad \Phi_3\Big[\sum_{s=1}^{m}([u_s,u_s']+[v_s',v_s])+\sum_{i=1}^{k}([s_i,s_i']+[t_i',t_i])+\sum_{j=1}^{n}([l_j,l_j']+[m_j',m_j])\Big]=0,$$

$$(19)\qquad N_1\subset\sum_{s=1}^{m}(u_s',v_s'),\quad N_2\subset\sum_{i=1}^{k}(s_i',t_i'),\quad F\subset\sum_{j=1}^{n}(l_j',m_j'),$$

$$N_1(u_s',v_s')\neq 0 \text{ lorsque } N_1\neq 0,\quad N_2(s_i',t_i')\neq 0 \text{ lorsque } N_2\neq 0,$$
$$F(l_j',m_j')\neq 0 \text{ lorsque } F\neq 0,$$

pour tout s, i, j, et qu'à tout système de nombres a_i, b_j, dont les valeurs absolues ne surpassent pas K, correspondent deux fonctions

$$h\Big[x,N_2,\Phi_3,G_2,K,\delta_1,\frac{\varepsilon}{6},a_i,(s_i,t_i)\Big],\quad h\Big[x,F,\Phi_3,G,K,\delta_1,\frac{\varepsilon}{6},b_j,(l_j,m_j)\Big].$$

Lorsque $F\neq 0$, tout intervalle (l_j,m_j) contient les points de l'ensemble F, par suite de Φ_2 ou de Φ_1, d'après (11). La numération étant effectuée convenablement, supposons que les p premiers parmi eux et ceux seulement contiennent les points de Φ_1. Comme l'intervalle $[l_j,m_j]$ est de longueur inférieure à δ_1 et, a fortiori, à $\frac{\operatorname{dist}(\Phi_1,I)}{3}$, d'après (15), lorsque Φ_1 n'est pas vide, il ne contient pas simultanément les points des ensembles Φ_1 et I; par suite

$$(20)\qquad [l_j,m_j]I=0 \text{ pour } j=0,1,2,\dots,p.$$

(Les formules correspondant à $j=1,2,\dots,p$ sont superflues — et dépourvues de sens — lorsqu'aucun des segments (l_j,m_j) ne contient des points de Φ_1). Je pose

$$(21)\qquad a_i=-f(s_i)+\frac{a+c_2}{2} \text{ quand } N_2\neq 0,\quad a_i=0 \text{ quand } N_2=0,$$

$$(22)\qquad b_j=\begin{cases}-f(l_j) & \text{pour } j=1,2,\dots,p \text{ quand } F\neq 0,\\ & \quad b_j=0 \text{ quand } F=0\\ -f(l_j)+\dfrac{a+c_2}{2} & \text{pour } j=p+1,p+2,\dots,n \text{ quand } F\neq 0,\\ & \quad b_j=0 \text{ quand } F=0.\end{cases}$$

Les nombres $|a_i|$, $|b_i|$, satisfont à l'inégalité $<K$, selon (17); je pose

$$h(x)=h[x,N_2,\dots,a_i,(s_i,t_i)]+h[x,F,\dots,b_j,(l_j,m_j)]$$

pour les valeurs (21), (22) de a_i, b_j. D'après (**6**)—(**8**), **6**, on a

$$(23)\qquad h(x)=0 \text{ pour tout } x\,\bar{\epsilon}\sum_{i=1}^{k}(s_i,t_i)+\sum_{j=1}^{n}(l_j,m_j),$$

$$(24)\qquad h(x)=-f(s_i)+\frac{a+c_2}{2} \text{ pour tout } x\,\epsilon\,[s_i',t_i'],\ i=1,2,\ldots,k,\ N_2\neq 0,$$

$$(25)\qquad h(x)=-f(l_j)+\frac{a+c_2}{2} \text{ pour } x\,\epsilon\,[l_j',m_j'],\ j=p+1,\ p+2,\ldots,n,\ F\neq 0,$$

$$(26)\qquad h(x)=-f(l_j) \text{ pour tout } x\,\epsilon\,[l_j',m_j'],\ j=1,2,\ldots,p,\ F\neq 0,$$

$$(27)\qquad \Big|\int_{x_1}^{x_2}h(t)\,dt\Big|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ pour tout } (x_1,x_2).$$

La fonction $k[x,u_s,v_s,u_s',v_s',\Theta,f(x)]$ (définition 2), où

$$(28)\qquad \Theta=\min\left(\frac{\varepsilon}{6},\frac{c_2-a}{4}\right) \text{ quand } N_1\neq 0,\ \Theta=0 \text{ quand } N_1=0,$$

sera désignée par $k(x)$. Une telle fonction existe, car en vertu de le relation $(u_s,v_s)\subset G_1\subset\Omega(S,\delta_1)$ et de (16*), la fonction $f(x)$ ne change pas de signe aux (u_s,v_s). De (5) et (28) résulte

$$(29)\qquad \Big|\int_{x_1}^{x_2}k(t)\,dt\Big|<\frac{\varepsilon}{6}\cdot 3=\frac{\varepsilon}{2} \text{ pour tout } (x_1,x_2).$$

Je pose

$$g(x)=f(x)+h(x)+k(x)$$

et je vais démontrer que $g(x)$ satisfait à toutes les conditions du lemme 8. La différence $g(x)-f(x)$ est de classe $C_{(1)}$, comme somme de deux fonctions de classe $C_{(1)}$. De (27), (29) on déduit aussitôt (10). L'inégalité (8) a lieu évidemment pour les valeurs de x telles que $h(x)=k(x)=0$, donc en dehors des intervalles (s_i,t_i), (l_j,m_j), (u_s,v_s). Les intervalles (l_j,m_j) contiennent les points de l'ensemble Φ_2 lorsqu'il n'est pas vide, et comme selon (15) ils sont de longueur $<\delta$, ils appartiennent à l'ensemble $\{\operatorname{dist}(x,\Phi_2)\leqslant\delta\}=R-W$; il n'y donc pas besoin que l'inégalité (8) soit remplie pour x appartenant à ces intervalles. Lorsque Φ_2 est vide, $h(x)=k(x)=0$ pour tout $x\,\epsilon\,(l_j,m_j)$ et l'inégalité (8) est remplie. Comme

$$S=\{|f(x)|>a\}[0,1]\subset\Omega(S,\delta_1),$$

pour $x\,\bar{\epsilon}\,\Omega(S,\delta_1)$ et en particulier pour $x\,\epsilon\,(s_i,t_i)\subset G_2\subset R-\bar{\Omega}(S,\delta_1)$ il n'y a pas besoin que l'inégalité (8) soit remplie. Il ne reste donc qu'à établir (8) pour $x\,\epsilon\,(u_s,v_s)$. Selon (23), (**1**) (avec $f(x)$ au lieu de $F(x)$) on a alors $h(x)=0$, $k(x)$ et $f(x)$ n'ont pas de signes opposés, donc $|g(x)|=|f(x)+k(x)|=|f(x)|+|k(x)|\geqslant|f(x)|$, c'est-à-dire (**8**) a lieu.

Les inégalités (**6**), (**7**), (**9**) seront démontrées séparément pour x appartenant à

$$\sum_{j=1}^{n}(l_j',m_j')+\sum_{i=1}^{k}(s_i',t_i')+\sum_{s=1}^{m}(u_s',v_s')=V$$

et pour $x\,\epsilon\,R-V$. Dans le dernier cas, je ne considère que les points $x\,\epsilon\,\Phi_1$, $x\,\epsilon\,\Phi_2$, $x\,\epsilon\,\Phi_3 I$, donc appartenant à Φ_3; selon (18) x se trouve en dehors des intervalles (l_j,m_j), (s_i,t_i), (u_s,v_s); par suite $h(x)=k(x)=0$. Donc $g(x)$ satisfait aux inégalités (**6**), (**7**), (**9**), puisque $f(x)=g(x)$ leur satisfait (car l'ensemble de tous les points $x\,\epsilon\,\Phi_1$, resp. Φ_2, $\Phi_3 I$, auxquels $f(x)$ ne satisfait pas à ces inégalités, est selon (11), (12), (19), l'ensemble $F+F_0=F+N_1+N_2\subset V$, mais dans le cas considéré $x\,\bar{\epsilon}\,V$). Les inégalités (**6**)—(**10**) sont ainsi démontrées pour $x\,\epsilon\,R-V$.

D'autre part, pour $[x',x'']\subset\bar{V}$ (en particulier $x'=s_i'$, resp. l_i') les composantes de l'ensemble $\bar{V}$ étant de longueur inférieure à δ_1, et d'après (15), a fortiori, à η, on a $|x''-x'|<\eta$ et il résulte de (25), (14), (24), (26), (**3**), (**4**) que

$$(30)\qquad |g(x')-g(x'')|=|f(x')-f(x'')|<\min\left(c_1,c_2,\frac{c_2-a}{4}\right),$$

$$(31)\qquad g(s_i)=\frac{a+c_2}{2} \text{ pour } i=1,2,\ldots,k,\ N_2\neq 0,$$

$$(32)\qquad g(l_j)=\frac{a+c_2}{2} \text{ pour } j=p+1,\ p+2,\ldots,n,\ F\neq 0,$$

$$(33)\qquad g(l_j)=0 \text{ pour } j=1,2,\ldots,p,\ F\neq 0.$$

De (32), (30), (31) on déduit pour $N_2\neq 0$, $F\neq 0$, que

$$a+\frac{c_2-a}{4}<g(x)<c_2-\frac{c_2-a}{4} \text{ pour tout } x\,\epsilon\sum_{i=1}^{k}[s_i',t_i']+\sum_{j=p+1}^{n}[l_j',m_j'];$$

en particulier on a (**7**) lorsque $x\,\epsilon\,\Phi_2$ et on a (**9**) lorsque $x\,\epsilon\,\Phi_3 I$. Dans le cas considéré x ne peut pas appartenir à Φ_1, car $j>p$. De (30), (33) on déduit pour $F\neq 0$ que

$$|g(x)|<\min(c_1,c_2) \text{ pour tout } x\,\epsilon\sum_{j=1}^{p}[l_j',m_j'];$$

en particulier (**6**), (**7**) ont lieu, lorsque $x \epsilon \Phi_2 \supset \Phi_1$. Il résulte de (20) que $x \bar{\epsilon} I$, donc il n'y a pas besoin que l'inégalité (**9**) soit remplie. Enfin de (**3**), (**1**), (23), (16), (28) on déduit pour $N_1 \neq 0$:

$$|g(x)| = |f(x)| + \Theta > a - \min\left(\frac{\varepsilon}{6}, \frac{c_2 - a}{4}\right) + \Theta = a$$

$$\text{(34)} \qquad \text{pour tout } x \epsilon \sum_{s=1}^{m} [u'_s, v'_s] \subset \Omega(S, \delta_1)$$

(il suffit de considérer le cas $N_1 \neq 0$). Comme l'intervalle $[u_s, v_s]$ contient les points de $\Phi_3 I$ et sa longueur est inférieure à $\dfrac{\operatorname{dist}(\Phi_1, I)}{3}$ pour $\Phi_1 \neq 0$, selon (15), cet intervalle ne contient pas de points de Φ_1 et il n'y a pas besoin que l'inégalité (**6**) soit remplie; d'autre part, pour $x \epsilon \Phi_3 I$, de (34) résulte l'inégalité (**9**). Comme $[u_s, v_s]$ contient un point x_0 de l'ensemble $N_1 \subset F_0$, et d'après (12) on a $|f(x_0)| \leqslant a$, il résulte de (**3**), (28), (30) que

$$|g(x_0)| = |f(x_0)| + \Theta \leqslant a + \frac{c_2 - a}{4},$$

$$|g(x)| \leqslant |g(x_0)| + \frac{c_2 - a}{4} \leqslant a + \frac{c_2 - a}{2} \text{ pour tout } x \epsilon \sum_{s=1}^{m} [u'_s, v'_s]$$

et en particulier on a (**7**) lorsque $x \epsilon \Phi_2$, c. q. f. d.

Nous avons établi les inégalités (**6**), (**7**) et (**9**) pour $x \epsilon V$ dans l'hypothèse que $N_1 \neq 0$, $N_2 \neq 0$ et que $F \neq 0$. Si l'un de ces ensembles est vide, il résulte de (21), (22) et (28) que $\Theta = 0$, $a_i = 0$, respectivement que $b_j = 0$; dans l'intervalle considéré: $(u'_s, v'_s) \subset V$, $(s'_i, t'_i) \subset V$, resp. $(l'_j, m'_j) \subset V$, on a $h(x) + k(x) = 0$, $g(x) = f(x)$. Mais alors la fonction $f(x)$ remplit les inégalités (**6**), (**7**) et (**9**) dans ces intervalles, car l'ensemble de tous les points $x \epsilon \Phi_1$ (resp. $\Phi_2, \Phi_3 I$) dans (l'_j, m'_j) (par exemple) auxquels $f(x)$ ne remplit pas ces inégalités est selon (11) et (12) l'ensemble $(l'_j, m'_j)(F + N_1 + N_2) = (l'_j, m'_j) F = 0$; car $(l'_j, m'_j) \subset G$, $N_1 \subset G_1$, $N_2 \subset G_2$, $GG_1 = GG_2 = 0$, d'où $(l'_j, m'_j) N_1 = (l'_j, m'_j) N_2 = 0$; $F = 0$ par hypothèse. Pour (s'_i, t'_i), (u'_s, v'_s) la démonstration est analogue.

Lemme 9. *À tout système d'intervalles $(a-l, a)$, (a, b), $(b, b+l)$ et aux constantes Θ, ε, M, M_1 positives, on peut faire correspondre une fonction $b(x, M, M_1, a, b, l, \Theta)$ de classe $C_{(1)}$, telle que*

$$\text{(35)} \qquad |b(x)| > M \text{ ou } |b'(x)| > M_1 \text{ pour tout } x \epsilon [a, b],$$

$$\text{(36)} \qquad |b(x)| < \Theta \text{ pour tout } x \epsilon [a-l, a) + (b, b+l],$$

$$\text{(37)} \qquad b(x) = 0 \text{ pour tout } x \bar{\epsilon} (a-l, b+l),$$

$$\text{(38)} \qquad \left|\int_{x_1}^{x_2} b(t)\,dt\right| < \varepsilon \text{ pour tout } (x_1, x_2).$$

En outre, $b(x)$ ne change pas de signe dans $[a-l, a]$ et $[b, b+l]$, ce signe étant donné d'avance. J'emploie le symbole $b(x)$ au lieu de $b(x, M, \ldots)$.

Démonstration. Si $b(x)$ satisfait aux conditions (**35**)—(**38**) la fonction $-b(x)$ leur satisfait aussi. Il suffit donc de construire deux fonctions satisfaisant à ces conditions, à savoir, $b_1(x)$ ayant le signe $+$ dans $[a-l, a]$ et $[b, b+l]$, et $b_2(x)$ ayant le signe $+$ dans $[a-l, a]$ et $-$ dans $[b, b+l]$. Je vais les construire comme les fonctions dont les graphiques (fig. 3) se composent d'un nombre

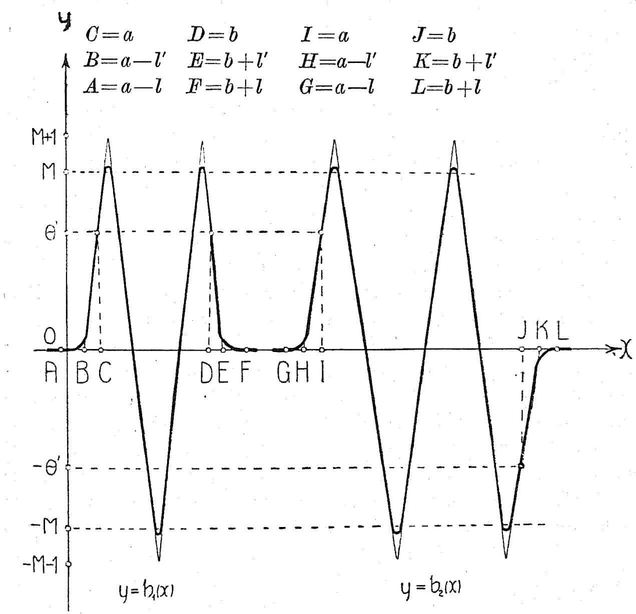


Fig. 3.

fini d'arcs de circonférences et de segments de droites (ou de demi-droites sur l'axe des x), à savoir, des côtés égaux des triangles isocèles égaux, dont les bases n'impiètent pas et se trouvent sur l'axe des x, et les sommets sont situés alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des x; la somme des bases formant un intervalle

$$[a-l', b+l'] \subset (a-l, b+l), \qquad l'>0.$$

Je remplace les tranchants aux sommets des triangles par les arcs des circonférences égales, tangentes aux côtés, et les tranchants aux points d'intersection des côtés du premier et du dernier triangles avec l'axe des x par deux arcs d'autres circonférences, tangentes à l'axe des x et à ces côtés. Je désigne par n le nombre des triangles; pour l'hauteur des triangles je choisis $M+1$, tandis que les arcs remplaçant les portions aux sommets sont choisis assez petits pour qu'ils soient situés en dehors de la région $-M \leqslant y \leqslant M$. Pour n assez grand le coefficient angulaire des côtés est arbitrairement grand et dans $(a-l', b+l')$ la dérivée n'est inférieure à ce coefficient (en valeur absolue) qu'aux points x situés dans la projection des arcs tangents aux côtés. À ces points les valeurs de la fonction sont, en valeur absolue, supérieures à M (sauf les parties initiales et finales du segment $(a-l', b+l')$, qui peuvent être supposées suffisamment petites pour être situés en dehors de $[a,b]$). En dehors du segment $[a,b]$ saillit seulement la projection des parties des côtés du premier et du dernier triangle, tels que les ordonnées des points de ces parties sont en valeur absolue inférieures à Θ. L'arc remplaçant le tranchant entre le côté et l'axe des x est choisi de façon qu'il soit tangent au côté dans cette partie, et le point $a-l''$ de la tangence avec l'axe des x est situé dans $(a-l, a-l')$ ou bien $b+l''$ est situé dans $(b+l', b+l)$. La fonction $b_1(x)$, respectivement $b_2(x)$, ainsi définie, est de signe constant et est monotone dans $[a-l, a]$ et $[b, b+l]$, et y satisfait à (**36**), et pour n suffisamment grand à (**35**). Je choisis le premier triangle à gauche au-dessus de l'axe des x; pour n pair le dernier triangle est situé alors au-dessous de l'axe des x, pour n impair le premier et le dernier triangle sont situés au-dessus de l'axe des x, c. à d. pour $b_2(x)$ il faut choisir n pair, pour $b_1(x)$ impair. Lorsqu'on désigne par p la longueur de la base et $\Theta' = \min(M, \Theta)$ et qu'on exige que l'aire du triangle soit $<\frac{\varepsilon}{4}$, on obtient:

$$b-a+2l' = np,$$

$$2\frac{M+1}{p} l' = \Theta', \tag{39}$$

$$2\frac{M+1}{p} > M_1, \tag{40}$$

(41) $\quad l' < \frac{p}{2}, \qquad$ (42) $\quad l' < l,$

$$\frac{p}{2}(M+1) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{43}$$

Ces conditions permettent de déterminer l', p en fonctions de n, Θ', a, b, M, en posant

$$l' = \frac{1}{2}\frac{(b-a)\Theta'}{(M+1)n-\Theta'}, \quad p = \frac{(b-a)(M+1)}{(M+1)n-\Theta'}. \tag{44}$$

L'inégalité (41) a donc lieu. En substituant (44), j'obtiens d'après (40), (43) et (42):

$$2\frac{(M+1)n-\Theta'}{b-a} > M_1, \quad \frac{(b-a)\Theta'}{(M+1)n-\Theta'} < 2l, \quad \frac{(b-a)(M+1)^2}{(M+1)n-\Theta'} < \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire $(M+1)n-\Theta' > \max\left[\frac{M_1(b-a)}{2}, \frac{(b-a)\Theta'}{2l}, \frac{2(b-a)(M+1)^2}{\varepsilon}\right]$, ce qui est toujours possible (pour tout $n \geqslant n_0$); en particulier on peut choisir n pair ou impair. Je choisis les arcs des circonférences tangentes au premier et dernier côté et à l'axe des x de façon que le changement de l'aire soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$. Comme, à l'exception, peut-être, des aires contenues entre ces arcs, l'axe des x et les côtés des triangles extrêmes, les aires positives et négatives à l'intérieur de l'intervalle d'intégration, contenant plus que deux bases des triangles, se détruisent, nous obtenons pour la limitation de l'intégrale la somme des aires des deux triangles, augmentée de $\frac{\varepsilon}{2}$; c'est-à-dire, en vertu de (43) cette intégrale est $<\varepsilon$. En posant $b(x)=0$ pour tout $x \,\bar{\epsilon}\, (a-l'', b+l'')$, j'obtiens la fonction satisfaisant à toutes les conditions du lemme, à savoir (**36**) résulte de (39), (**38**) résulte de (43); en tenant compte de (40), on a (**35**) et évidemment (**37**).

8. *Lemme 10.* *À tout système composé: de nombres positifs $a, b, c_1, c_2, \delta, \varepsilon, \varrho$, tels que $c_2 > a$, des ensembles fermés non denses*

$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset [0,1]$, *d'un segment fermé* $I \subset [0,1] - \Phi_1$ *et d'une fonction* $f(x)$ *de classe* $C_{(1)}$, — *on peut faire correspondre un polynôme* $g(x)$ *tel que*:

$$|g(x)| > a' > a \text{ ou } |g'(x)| > b' > b \text{ pour tout } x \in I, \tag{1}$$

$$|g(x)| < c_1 \text{ pour tout } x \in \Phi_1, \tag{2}$$

$$|g(x)| < c_2 \text{ pour tout } x \in \Phi_2, \tag{3}$$

$$|g(x)| > |f(x)| - \varrho \text{ pour tout } x \in \{|f(x)| > a\} W[0,1], \tag{4}$$

où $W = \{\operatorname{dist}(x, \Phi_2) > \delta\}$ *lorsque* $\Phi_2 \neq 0$ *et* $W = R$ *lorsque* $\Phi_2 = 0$,

$$|g(x)| > a \text{ pour tout } x \in \Phi_3 I, \tag{5}$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} [g(t) - f(t)]\, dt \right| < \varepsilon \text{ pour tout } (x_1, x_2) \subset (0,1). \tag{6}$$

Démonstration. En vertu du lemme 8, il existe une fonction $g_1(x)$ de classe $C_{(1)}$ telle que:

$$|g_1(x)| \leqslant c_1' < c_1 \text{ pour tout } x \in \Phi_1, \tag{7}$$

$$|g_1(x)| \leqslant c_2' < c_2 \text{ pour tout } x \in \Phi_2, \tag{8}$$

$$|g_1(x)| \geqslant |f(x)| \text{ pour tout } x \in \{|f(x)| > a\} W[0,1], \tag{9}$$

$$|g_1(x)| \geqslant a_1 > a \text{ pour tout } x \in \Phi_3 I, \tag{10}$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} [g_1(t) - f(t)]\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour tout } (x_1, x_2). \tag{11}$$

L'existence des nombres c_1', c_2', a_1 résulte du fait, que la fonction continue $|g_1(x)|$ atteind sur les ensembles fermés $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 I$ sa borne inférieure et supérieure. Lorsque pour tout $x \in I$ on a $|g_1(x)| > a$, je pose $g_2(x) \equiv g_1(x)$. Dans le cas contraire, l'ensemble

$$L = I\{|g_1(x)| \leqslant a\} \tag{12}$$

se compose d'un nombre fini d'intervalles fermés et disjoints $[p_i, q_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ et d'un nombre fini de points isolés $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (car $g_1(x)$ est de classe $C_{(1)}$). Aux points x_i on a

$$|g_1(x_i)| = a. \tag{13}$$

De la continuité de $g_1(x)$ résulte que le signe de $g_1(x)$ est constant dans un voisinage de x_i. D'autre part, dans un voisinage à gauche de p_i et à droite de q_i, le signe de $g_1(x)$ est constant, comme $g_1(x)$ est de classe $C_{(1)}$. Il existe donc $l > 0$ assez petit pour que les intervalles $[p_i - l, q_i + l]$ et $[x_i - l, x_i + l]$ soient disjoints et qu'on puisse définir le signe de $g_1(x)$ sur $[p_i - l, p_i]$, $[q_i, q_i + l]$ et $[x_i - l, x_i + l]$; en outre, suffisamment petit pour que, en designant

$$\vartheta = \min\left(\frac{c_1 - c_1'}{2}, \frac{c_2 - c_2'}{2}\right), \tag{14}$$

on ait

$$2nl\vartheta < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{15}$$

Selon le lemme 9 on peut associer aux nombres: $\vartheta, \frac{\varepsilon}{8s}$, $M = 3a$, M_1, où

$$M_1 = 1 + b + \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} g_1'(x), \tag{16}$$

une fonction $b(x, M, M_1, p_i, q_i, l, \vartheta)$, qui sera désignée par $b_i(x)$, telle que

$$|b_i(x)| > 3a \text{ ou } |b_i'(x)| > M_1 \text{ pour tout } x \in [p_i, q_i], \tag{17}$$

$$b_i(x) g_1(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in [p_i - l, p_i] + [q_i, q_i + l], \tag{18}$$

$$|b_i(x)| \leqslant \vartheta \text{ pour tout } x \in [p_i - l, p_i] + [q_i, q_i + l], \tag{19}$$

$$b_i(x) = 0 \text{ pour tout } x \,\bar{\in}\, (p_i - l, q_i + l), \tag{20}$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} b_i(t)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{8s} \text{ pour tout } (x_1, x_2). \tag{21}$$

Je pose:

$$H(x) = k[x, x_i - l, x_i + l, x_i, x_i, \vartheta, g_1(x)] + \sum_{i=1}^{s} b_i(x), \tag{22}$$

(définition 2). On a donc

$$|H(x_i)| = \vartheta \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n, \tag{23}$$

(24) $$H(x)=0 \text{ pour tout } x\,\bar{\epsilon}\sum_{i=1}^{n}(x_i-l,x_i+l)+\sum_{i=1}^{s}(p_i-l,q_i+l),$$

(25) $$|H(x)|\leqslant\vartheta \text{ pour tout } x\,\bar{\epsilon}\sum_{i=1}^{s}(p_i,q_i),$$

(26) $$H(x)g_1(x)\geqslant 0 \text{ pour tout } x\,\bar{\epsilon}\sum_{i=1}^{s}(p_i,q_i),$$

d'après (**3**) **7**, (**4**) **7**, (**2**) **7**, (**1**) **7**, (20), (19), (18). Je pose

(27) $$g_2(x)=g_1(x)+H(x),$$

$g_2(x)$ est donc une fonction de classe $C_{(1)}$ et, en outre:

(28) $$\left|\int_{x_1}^{x_2}[g_2(t)-g_1(t)]\,dt\right|\leqslant\left|\int_{x_1}^{x_2}k[t,x_i-l,\ldots]\,dt\right|+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\left|\int_{x_1}^{x_2}b_i(t)\,dt\right|<2l\cdot n\cdot\vartheta+s\cdot\frac{\varepsilon}{8s}<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{4}$$

pour tout (x_1,x_2) d'après (21), (5) **7**, (22), (15), (27). Je vais démontrer que la fonction $g_2(x)$ (qui n'est pas en général un polynôme) satisfait aux inégalités (**1**)—(**6**). Il suffit, pour la démonstration des inégalités (**2**)—(**5**), de supposer que $x\,\bar{\epsilon}\,L$, car on a:

(29) $$\Phi_1\subset R-L,$$

(30) $$\Phi_2\subset R-L,$$

(31) $$\{|f(x)|>a\}W[0,1]\subset R-L,$$

(32) $$\Phi_3 I\subset R-L.$$

La formule (12) donne en effet

(33) $$R-L=\{|g_1(x)|>a\}+(R-I).$$

Lorsque $x\,\epsilon\,\Phi_1$ ou $x\,\epsilon\,\Phi_2$, il vient $x\,\epsilon\,\Phi_3$, c'est-à-dire $x\,\epsilon\,\Phi_3 I$ ou $x\,\epsilon\,\Phi_3(R-I)$; dans le second cas on a donc, selon (33), $x\,\epsilon\,R-L$, et de même dans le premier cas, car d'après (10) on a $|g_1(x)|>a$. Lorsque $x\,\epsilon\,\{|f(x)|>a\}W[0,1]$, on a d'après (9) $|g_1(x)|\geqslant|f(x)|>a$, donc selon (33), $x\,\epsilon\,R-L$.

Quand $x\,\bar{\epsilon}\,L$, on a $x\,\bar{\epsilon}\sum_{i=1}^{s}[p_i-l,q_i+l]+\sum_{i=1}^{n}[x_i-l,x_i+l]$ ou bien $x\,\epsilon\sum_{i=1}^{s}\big([p_i-l,p_i)+(q_i,q_i+l]\big)+\sum_{i=1}^{n}\big([x_i-l,x_i+l]-[x_i]\big)$, car $L=\sum_{i=1}^{s}[p_i,q_i]+\sum_{i=1}^{n}[x_i]$.

Dans le premier cas, $H(x)=0$ d'après (24), dans le second $|H(x)|\leqslant\vartheta$ d'après (25), et le signe de $H(x)$ est le même que celui de $g_1(x)$ d'après (26); par suite

(34) $$|g_2(x)-g_1(x)|\leqslant\vartheta \text{ pour tout } x\,\bar{\epsilon}\,L,$$

(35) $$|g_2(x)|=|g_1(x)|+|H(x)|\geqslant|g_1(x)| \text{ pour tout } x\,\bar{\epsilon}\,L.$$

Il résulte de (9), (31), (35) que

(36) $$|g_2(x)|\geqslant|f(x)| \text{ pour tout } x\,\epsilon\,\{|f(x)|>a\}W[0,1];$$

de même, il résulte de (7), (8), (10), (29), (30), (32), (34), (35), que

(37) $$|g_2(x)|\geqslant a_1>a \text{ pour tout } x\,\epsilon\,\Phi_3 I,$$

(38) $$|g_2(x)|\leqslant c_1'+\vartheta<c_1 \text{ pour tout } x\,\epsilon\,\Phi_1,$$

(39) $$|g_2(x)|\leqslant c_2'+\vartheta<c_2 \text{ pour tout } x\,\epsilon\,\Phi_2.$$

Je vais démontrer l'inégalité (**1**) (avec $g_2(x)$ au lieu $g(x)$). Aux points x_i on a

(40) $$|g_2(x_i)|=|g_1(x_i)|+|H(x_i)|=a+\vartheta>a$$

d'après (23), (26), (13); lorsque $x\,\epsilon\,[p_i,q_i]$, on a $|H(x)|>3a$ ou $|H'(x)|>M_1$, d'après (17), (22) et $|g_1(x)|\leqslant a$ d'après (12) (car $x\,\epsilon\,L$); par suite, on a en vertu de (27) et (16), pour tout $x\,\epsilon\sum_{i=1}^{s}[p_i,q_i]$:

(41) $$|g_2(x)|>3a-|g_1(x)|\geqslant 3a-a \text{ ou } |g_2'(x)|>M_1-|g_1'(x)|\geqslant b+1$$

et

(42) $$|g_2(x)|>a \text{ ou } |g_2'(x)|>b+1 \text{ pour tout } x\,\epsilon\,L=IL,$$

d'après (41) et (40). Comme $I(R-L)=I\{|g_1(x)|>a\}$ selon (33), on a d'après (35) pour $x\,\epsilon\,I(R-L)$

$$|g_2(x)|\geqslant|g_1(x)|>a;$$

on en déduit, en tenant compte de (42), que

(43) $$|g_2(x)|>a \text{ ou } |g_2'(x)|>b+1 \text{ pour tout } x\in I.$$

Suivant le théorème de Weierstrass, la fonction continue $|g_2(x)|$ atteind la borne inférieure sur l'ensemble fermé et borné $I\{|g_2'(x)|\leqslant b+1\}$ et selon (43) cette borne est $a''>a$. On a par conséquent

(44) $$|g_2(x)|\geqslant a''>a \text{ ou } |g_2'(x)|>b+1>b \text{ pour tout } x\in I,$$

c. à d. (**1**) avec $g_2(x)$ au lieu de $g(x)$.

En vertu du théorème de Weierstrass, à la fonction continue $g_2'(x)$ correspond un polynôme $g'(x)$ tel que, pour tout $x\in[0,1]$,

(45) $$|g'(x)-g_2'(x)|<\min\left(\varrho,\vartheta,\frac{\varepsilon}{4},a_1-a,\frac{a''-a}{2},\frac{1}{2}\right)=\varepsilon^{\cdot}.$$

Je pose

$$g(x)=g_2(0)+\int_0^x g'(t)\,dt.$$

Il vient, pour tout $x\in[0,1]$,

(46) $$|g(x)-g_2(x)|=\left|\int_0^x g'(t)\,dt-\big(g_2(x)-g_2(0)\big)\right|=\left|\int_0^x g'(t)\,dt-\int_0^x g_2'(t)\,dt\right|$$
$$=\left|\int_0^x\big[g'(t)-g_2'(t)\big]dt\right|\leqslant\int_0^x\left|g'(t)-g_2'(t)\right|dt<\varepsilon^{\cdot}x\leqslant\varepsilon^{\cdot}.$$

et

(47) $$\left|\int_{x_1}^{x_2}\big[g(t)-g_2(t)\big]dt\right|<(x_2-x_1)\varepsilon^{\cdot}<\frac{\varepsilon}{4} \text{ pour tout } [x_1,x_2]\subset[0,1].$$

Le polynôme $g(x)$ satisfait à toutes les conditions du lemme, à savoir (**6**) résulte de (47), (28), (11); (**5**) de (37) et (46), car selon (45) on a $\varepsilon^{\cdot}\leqslant a_1-a$; (**4**) de (36) et (46), car selon (45) on a $\varepsilon^{\cdot}\leqslant\varrho$; (**2**) et (**3**) de (38), (39), (46), car selon (45) on a $\varepsilon^{\cdot}\leqslant\vartheta$, d'après (14) $2\vartheta=\min(c_1-c_1',c_2-c_2')$; (**1**) résulte de (44), (46), (45), car selon (45), $\varepsilon^{\cdot}\leqslant\frac{a''-a}{2}$, $\varepsilon^{\cdot}\leqslant\frac{1}{2}$, donc $a'=\frac{a''+a}{2}$, $b'=b+\frac{1}{2}$.

Lemme 11. *À tout système d'intervalles (a_i,b_i), $i=1,2,\ldots,n$, (c_j,d_j), $j=1,2,\ldots,m$ non empiétants, tels que $\sum_{i=1}^n[a_i,b_i]+\sum_{j=1}^m[c_j,d_j]=[0,1]$, à toute fonction $u(x)$ continue dans $[0,1]$ telle que*

(**48**) $$\left|\int_{x_1}^{x_2}u(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2m} \text{ pour tout } (x_1,x_2)\subset(c_j,d_j),\ j=1,2,\ldots,m,$$

et à tout nombre $\eta>0$ correspond un polynôme $v(x)$ tel que

(**49**) $$\left|\int_{x_1}^{x_2}\big[u(t)+v(t)\big]dt\right|<\varepsilon \text{ pour tout } (x_1,x_2)\subset(0,1),$$

$$|v(z)|<\eta,\ |v'(z)|<\eta \text{ pour tout } z\in\overline{\mathcal{R}}_{(c_j,d_j)},$$

où $\mathcal{R}_{(c_j,d_j)}$ désigne le rhombe ouvert situé dans le plan de la variable complexe avec l'angle aigu $\frac{\pi}{3}$ et la plus grande diagonale (c_j,d_j).

Démonstration. En désignant par M le maximum de $|u(x)|$ dans $[0,1]$, on peut choisir dans les intervalles $[a_i,b_i]$ des points rationnels $a_i'<b_i'$ de façon que les distances $a_i'-a_i$ et b_i-b_i' soient $<\frac{\varepsilon}{32Mn}$. Les intervalles $[a_i',b_i']$ sont alors commensurables et on peut les diviser en intervalles de longueur 2ϑ arbitrairement petite; en particulier, on peut choisir

(50) $$2\delta<\frac{\varepsilon}{32M}$$

assez petit, de façon que pour $x_1\in[0,1]$, $x_2\in[0,1]$,

(51) $$|u(x_1)-u(x_2)|<\frac{\varepsilon}{4} \text{ lorsque } |x_1-x_2|\leqslant 2\delta.$$

En désignant les centres de ces intervalles par x_k, $k=1,2,\ldots,r$, les intervalles eux-mêmes deviennent $[x_k-\delta,x_k+\delta]$. Je définis la fonction $\omega(x)$ comme égale aux constantes h_k dans $(x_k-\delta,x_k+\delta)$ et nulle en dehors de ces intervalles; les contantes h_k seront

$$2\delta h_k=-\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}u(t)\,dt, \text{ c. à d. } \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}[u(t)+\omega(t)]\,dt=0 \text{ pour tout } k=1,2,\ldots,r.$$

Comme $\max\limits_{[x_k-\delta,x_k+\delta]} u(x) \geqslant -h_k \geqslant \min\limits_{[x_k-\delta,x_k+\delta]} u(x)$, la fonction $u(x)+\omega(x)=$ $=u(x)+h_k$ dans $(x_k-\delta, x_k+\delta)$ est en valeur absolue inférieure à $\max\limits_{[x_k-\delta,x_k+\delta]}-\min u(x)$, par suite, en vertu de (51), à $\frac{\varepsilon}{4}$ et on a

$$(52) \quad \left|\int_\Gamma [u(t)+\omega(t)]\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{4}\cdot(z-x), \text{ où } \Gamma=[x,z]\sum_{k=1}^{r}[x_k-\delta, x_k+\delta];$$

$u(x)+\omega(x)=u(x)$ dans $[c_j,d_j]$ et dans $[a_i,a_i']$, $[b_i',b_i]$ et en outre au nombre fini de points $x_k-\delta$, $x_k+\delta$. La somme de longueurs de $[a_i,a_i']$ et de $[b_i',b_i]$ est inferieure à $2\cdot n\cdot\frac{\varepsilon}{32Mn}=\frac{\varepsilon}{16M}$ et

$$(53) \quad \left|\int_H [u(t)+\omega(t)]\,dt\right| < \int_K |u(t)+\omega(t)|\,dt = \int_K |u(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{16M}\cdot M = \frac{\varepsilon}{16},$$

où
$$H=[x,z]\sum_{i=1}^{n}\left([a_i,a_i']+[b_i',b_i]\right), \quad K=\sum_{i=1}^{n}\left([a_i,a_i']+[b_i',b_i]\right);$$

dans (c_j,d_j) on a (**48**), donc

$$(54) \quad \left|\int_L [u(t)+\omega(t)]\,dt\right| = \left|\sum_{j=1}^{m}\int_{L_j} u(t)\,dt\right| < m\cdot\frac{\varepsilon}{2m}=\frac{\varepsilon}{2},$$

où
$$L=[x,z]\sum_{j=1}^{m}(c_j,d_j), \quad L_j=[x,z](c_j,d_j).$$

Il résulte de (54), (53) et (52) que, pour tout $(x,z)\subset(0,1)$,

$$(55) \quad \left|\int_x^z [u(t)+\omega(t)]\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{4}(z-x)+\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{13}{16}\varepsilon,$$

c. à d. (**49**) avec $\omega(t)$ au lieu de $v(t)$. Si $h_k=0$ pour chaque k, je pose $v(x)\equiv\omega(x)\equiv 0$. Dans le cas contraire, je pose

$$(56) \quad v_1(x)=\sum_{k=1}^{r}\beta_k e^{-a^2(x-x_k)^2}, \quad \beta_k=\frac{\delta h_k}{\int_0^\delta e^{-a^2x^2}\,dx},$$

$a>0$ étant choisi suffisamment grand pour que

$$(57) \quad \int_0^\delta e^{-a^2x^2}\,dx > \frac{\sqrt{\pi}}{4a},$$

$$(58) \quad \frac{8a^3}{\sqrt{\pi}}r\delta M e^{-\frac{a^2}{2}\delta^2} < \frac{\eta}{2}, \quad \frac{4a}{\sqrt{\pi}}r\delta M e^{-\frac{a^2}{2}\delta^2} < \min\left(\frac{\varepsilon}{16},\frac{\eta}{2}\right).$$

Ceci est toujours possible, car en tenant compte de

$$\int_0^\delta e^{-a^2x^2}\,dx=\frac{1}{a}\int_0^{a\delta}e^{-t^2}\,dt, \quad \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on a pour $a\delta$ suffisamment grand

$$\int_0^{a\delta}e^{-t^2}\,dt>\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Les inégalités (58) sont aussi remplies pour tout a suffisamment grand. Je pose

$$(59) \quad v_k^*(x)=\begin{cases}\beta_k e^{-a^2(x-x_k)^2} & \text{pour tout } x\in(x_k-\delta,x_k+\delta)\\ 0 & \text{,, ,, } x\,\overline{\in}\,(x_k-\delta,x_k+\delta),\end{cases}$$

$$v_k^{\cdot}(x)=\begin{cases}0 & \text{pour tout } x\in(x_k-\delta,x_k+\delta)\\ \beta_k e^{-a^2(x-x_k)^2} & \text{,, ,, } x\,\overline{\in}\,(x_k-\delta,x_k+\delta).\end{cases}$$

Il vient

$$v_k^*(x)+v_k^{\cdot}(x)\equiv\beta_k e^{-a^2(x-x_k)^2}$$

$$(60) \quad v_1(x)\equiv\sum_{k=1}^{r}v_k^*(x)+\sum_{k=1}^{r}v_k^{\cdot}(x)$$

$$(61) \quad \int_{x_p-\delta}^{x_p+\delta}v_p^*(t)\,dt=\beta_p\int_{-\delta}^{\delta}e^{-a^2t^2}\,dt=\frac{\delta h_p}{\int_0^\delta e^{-a^2x^2}\,dx}\cdot 2\int_0^\delta e^{-a^2t^2}\,dt=$$
$$=2\delta h_p=\int_{x_p-\delta}^{x_p+\delta}\omega(t)\,dt=\int_{x_p-\delta}^{x_p+\delta}\sum_{k=1}^{r}v_k^*(t)\,dt,$$

car dans $(x_p-\delta,x_p+\delta)$ on a $\sum\limits_{k=1}^{r}v_k^*(t)=v_p^*(t)$, $v_p^*(t)$ et $\omega(t)=h_p$ sont des mêmes signes et ces signes sont constants; donc d'après (50) pour tout $(x_1,x_2)\subset(0,1)$,

$$(62)\qquad \Big|\int\limits_{x_1}^{x_2}\Big[\sum_{k=1}^{r}v_k^*(t)-\omega(t)\Big]dt\Big|\leqslant 2\delta h_{k'}+2\delta h_{k''}\leqslant 4\delta M<2M\frac{\varepsilon}{32M}=\frac{\varepsilon}{16},$$

car l'intégrale s'annule dans les intervalles $[x_p-\delta,x_p+\delta]\subset[x_1,x_2]$ d'après (61); en dehors des intervalles $(x_k-\delta,x_k+\delta)$ la fonction intégrée est nulle en vertu de (59) et de la définition de $\omega(x)$; dans deux (au plus) intervalles $(x_{k'}-\delta,x_{k'}+\delta)$, $(x_{k''}-\delta,x_{k''}+\delta)$ empiétants partiellement sur (x_1,x_2), cette intégrale ne s'annule pas et alors elle ne surpasse pas la plus grande des aires

$$\int\limits_D\sum_{k=1}^{r}v_k^*(t)dt \ \text{ et } \int\limits_D\omega(t)dt,$$

où $D=(x_{k'}-\delta,x_{k'}+\delta)(x_1,x_2)$ ou $(x_{k''}-\delta,x_{k''}+\delta)(x_1,x_2)$, (comme leur différence) et aucune d'elles n'est supérieure à l'aire correspondante à l'intervalle $(x_{k'}-\delta,x_{k'}+\delta)$ resp. $(x_{k''}-\delta,x_{k''}+\delta)$ tout entier, égale selon (61) à $2\delta h_{k'}$, resp. $2\delta h_{k''}$, donc, en tenant compte de l'inégalité $|h_k|\leqslant M$ pour tout k, on a (62). Comme

$$\max_{-\infty<x<+\infty}|v_k^{\cdot}(x)|=|\beta_k|e^{-a^2\delta^2}$$

et on a $|\beta_k|<\dfrac{\delta M}{\sqrt{\pi}}\cdot 4a$, d'après (56), (57), donc en vertu de (58),

$$\max_{-\infty<x<+\infty}|v_k^{\cdot}(x)|<\frac{\delta M}{\sqrt{\pi}}4a\,e^{-a^2\delta^2}<\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\delta M e^{-\frac{a^2}{2}\delta^2}<\frac{1}{r}\min\Big(\frac{\varepsilon}{16},\frac{\eta}{2}\Big),$$

$$(63)\qquad \Big|\sum_{k=1}^{r}v_k^{\cdot}(x)\Big|<\frac{\varepsilon}{16},\quad \Big|\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{k=1}^{r}v_k^{\cdot}(t)dt\Big|<\frac{\varepsilon}{16}\ \text{ pour tout } (x_1,x_2)\subset(0,1).$$

Les formules (63), (62) et (60) donnent

$$(64)\qquad \Big|\int\limits_{x_1}^{x_2}\big[v_1(t)-\omega(t)\big]dt\Big|<\frac{\varepsilon}{8}\ \text{ pour tout } (x_1,x_2)\subset(0,1).$$

Tous les rhombes dont la plus grande diagonale est situé sur l'intervalle $[0,1]$ et dont l'angle aigu est $\frac{\pi}{3}$, sont situés dans le cercle de rayon 1, dont le centre est x_k; on a donc dans ces rhombes $|z-x_k|\leqslant 1$, et d'après (56), (57),

$$\Big|\frac{d}{dz}\beta_k e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|=\Big|-2a^2\beta_k(z-x_k)\,e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|\leqslant\frac{2a^2\delta M}{\sqrt{\pi}}4a\Big|e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|.$$

Soit

$$z-x_k=\varrho\,e^{i\varphi},\quad (z-x_k)^2=\varrho^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi),\quad \Big|e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|=e^{-a^2\varrho^2\cos 2\varphi}.$$

Dans le domaine angulaire $-\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi<\varphi<\frac{7}{6}\pi$ on a $\cos 2\varphi>\frac{1}{2}$, donc

$$\Big|\frac{d}{dz}\beta_k e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|<\frac{8a^3}{\sqrt{\pi}}\delta M e^{-\frac{a^2}{2}\varrho^2},\quad \Big|\beta_k e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|<\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\delta M e^{-\frac{a^2}{2}\varrho^2}.$$

Les seconds membres de ces inégalités sont des fonctions décroissantes de ϱ; en particulier, selon (58) on a:

$$\Big|\frac{d}{dz}\beta_k e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|<\frac{\eta}{2r},\quad \Big|\beta_k e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|<\frac{1}{r}\min\Big(\frac{\varepsilon}{16},\frac{\eta}{2}\Big)$$

pour tout $|z-x_k|=\varrho\geqslant\delta$. Dans ce domaine angulaire, à l'extérieur du cercle $|z-x_k|=\delta$ sont situés, en particulier, tous les rhombes mentionnés dans le lemme, dont les diagonales n'ont pas de points communs avec $(x_i-\delta,x_i+\delta)$, par ex. dont la plus grande diagonale est $[c_j,d_j]$. Par suite

$$|v_1'(z)|=\Big|\sum_{k=1}^{r}\frac{d}{dz}\beta_k e^{-a^2(z-x_k)^2}\Big|<r\cdot\frac{\eta}{2r}=\frac{\eta}{2}\ \text{ pour tout } z\in\sum_{j=1}^{m}\mathcal{R}_{(c_jd_j)},$$

$$|v_1(z)|<r\cdot\frac{1}{r}\min\Big(\frac{\varepsilon}{16},\frac{\eta}{2}\Big)\leqslant\frac{\eta}{2}\qquad ,,\quad ,,\qquad ,, .$$

La fonction $v_1(z)$ étant une fonction entière, il existe dans le cercle $|z|<2$ un polynôme

$$v(z)=\sum_{n=0}^{N}v_1^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!}$$

(la somme des $N+1$ termes du développement de $v_1(z)$ en série de puissances), tel que

(65) $|v(z)-v_1(z)|<\min\left(\frac{\varepsilon}{16},\frac{\eta}{2}\right)$, $|v'(z)-v_1'(z)|<\frac{\eta}{2}$ pour tout $|z|<2$,

d'où $|v(z)|<\eta$, $|v'(z)|<\eta$ pour tout $z\in\overline{\mathcal{R}}_{(c_j,d_j)}$. Il résulte de (55), (64) et (65) que, pour tout $(x_1,x_2)\subset(0,1)$,

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[u(t)+v(t)\right]dt\right|\leqslant\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[u(t)+\omega(t)\right]dt\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[v_1(t)-\omega(t)\right]dt\right|+$$
$$+\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[v(t)-v_1(t)\right]dt\right|<\frac{13}{16}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{16}(x_2-x_1)\leqslant\varepsilon,$$

c. à d. $v(x)$ satisfait à toutes les conditions du lemme 11.

Lemme 12. *À tout système de nombres positifs $a,b,c_1,c_2,\delta,\varepsilon,\varrho$ tels que $c_2>a$, des ensembles fermés disjoints $B\subset[-d,d]$, $T\subset[-d,d]$, composés d'un nombre fini de segments fermés ou vides, des ensembles fermés non denses $\Phi_1\subset\Phi_2\subset\Phi_3\subset B$, à un segment fermé $I\subset[-d,d]$ tel que $\Phi_1 I=0$ et à tout polynôme $f(x)$, correspond un polynôme $g(x)$ tel que*

(66) $|g(x)|>a$ *ou* $|g'(x)|>b$ *pour tout* $x\in IB$,

(67) $|g(x)|<c_1$ *pour tout* $x\in\Phi_1$,

(68) $|g(x)|<c_2$ *pour tout* $x\in\Phi_2$,

(69) $|g(x)|>|f(x)|-\varrho$ *pour tout* $x\in BW\{|f(x)|>a\}$,

avec $W=\{\operatorname{dist}(x,\Phi_2)>\delta\}$ *lorsque* $\Phi_2\neq0$, *et* $W=R$ *lorsque* $\Phi_2=0$,

(70) $|g(x)|>a$ *pour tout* $x\in\Phi_3 I$,

(71) $|g(z)-f(z)|<\varepsilon$ *pour tout* $z\in\overline{\mathcal{R}}_T$,

(72) $\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[g(t)-f(t)\right]dt\right|<\varepsilon$ *pour tout* $(x_1,x_2)\subset(-d,d)$,

$\mathcal{R}_T$ désignant la somme des rhombes avec l'angle aigu $\frac{\pi}{3}$ et dont la plus grande diagonale est située sur T.

En particulier, on peut admettre que pour tout n entier positif, on ait, avec les notations du lemme 3,

$B=B_n$, $T=T_n$, $d=d_n$, $\Phi_1=\Phi_{m_n}$, $\Phi_2=\Phi_n$, $\Phi_3=\Phi_{n+1}$, $I=I_{m_n,k_n}$

(car en tenant compte de la relation $m_n\leqslant n$, **(8) 5**, on a $\Phi_{m_n}\subset\Phi_n$ et $\Phi_{m_n}\cdot I_{m_n,k_n}=0$ d'après **(6) 5**).

D é m o n s t r a t i o n. La transformation $y^*=y$, $x^*=\frac{x+d}{2d}$, transforme l'ensemble $[-d,d]$ en $[0,1]$, les ensembles B, T, Φ_i, I, en B^*, T^*, Φ_i^*, I^* le polynôme $y=f(x)$ en $f^*(x^*)=f(2dx^*-d)$, l'ensemble $\{|f(x)|>a\}$ en $\{|f^*(x^*)|>a\}$, $\{|f'(x)>b\}$ en $\{|f^{*\prime}(x^*)|>2db\}$, $\{\operatorname{dist}(x,\Phi_2)>\delta\}$ en $\left\{\operatorname{dist}(x^*,\Phi_2^*)>\frac{\delta}{2d}\right\}$, $\mathcal{R}_T$ en $\mathcal{R}_{T^*}$. S'il existe pour les valeurs $a^*=a$, $b^*=2db$, $c_1^*=c_1$, $c_2^*=c_2$, $\delta^*=\frac{\delta}{2d}$, $\varepsilon^*=\min\left(\frac{\varepsilon}{2d},\varepsilon\right)$, $\varrho^*=\varrho$ un polynôme $g^*(x^*)$ satisfaisant aux conditions du lemme ainsi transformées, le polynôme $g(x)=g^*\left(\frac{x+d}{2d}\right)$ satisfait alors aux conditions **(66)**—**(72)**. Par suite on peut remplacer dans la démonstration $[-d,d]$ par $[0,1]$. Je désigne par m le nombre d'intervalles fermés de l'ensemble $B+T$. D'après le lemme 10, au système de nombres a, b, c_1, c_2, δ, $\frac{\varepsilon}{4m}$, $\frac{\varrho}{2}$, d'ensembles Φ_1, Φ_2, Φ_3, I et au polynôme $f(x)$ correspond un polynôme $g_1(x)$ tel que:

(73) $|g_1(x)|>a'>a$ ou $|g_1'(x)|>b'>b$ pour tout $x\in I$,

(74) $|g_1(x)|\leqslant c_1'<c_1$ pour tout $x\in\Phi_1$,

(75) $|g_1(x)|\leqslant c_2'<c_2$ pour tout $x\in\Phi_2$,

(76) $|g_1(x)|>|f(x)|-\frac{\varrho}{2}$ pour tout $x\in\{|f(x)|>a\}W[0,1]$,

(77) $|g_1(x)|>a_1>a$ pour tout $x\in\Phi_3 I$,

(78) $\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[g_1(t)-f(t)\right]dt\right|<\frac{\varepsilon}{4m}$ pour tout $(x_1,x_2)\subset(0,1)$.

Les rhombes $\overline{\mathcal{R}}_B$ et $\overline{\mathcal{R}}_T$ peuvent être placés dans m rhombes ouverts, dont les fermetures sont disjointes. D'après le théorème de Runge il existe un polynôme $g_2(z)$ tel que

(79) $$|g_2(z)-g_1(z)|<\frac{\eta}{2},\ |g_2'(z)-g_1'(z)|<\frac{\eta}{2} \text{ pour tout } z\in\overline{\mathcal{R}}_B,$$

(80) $$|g_2(z)-f(z)|<\frac{\eta}{2} \text{ pour tout } z\in\overline{\mathcal{R}}_T,$$

où

(81) $$\eta=\min\left(a'-a,\ a_1-a,\ b'-b,\ \frac{\varrho}{2},\ c_1-c_1',\ c_2-c_2',\ \frac{\varepsilon}{2m+1}\right).$$

Le polynôme $g_2(z)$ satisfait d'après (80) à la condition

(82) $$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[g_2(t)-f(t)\right]dt\right|<\frac{\eta}{2}(x_2-x_1)\leqslant\frac{\eta}{2} \text{ pour tout } (x_1,x_2)\subset T\subset[0,1]$$

et d'après (79) et (78), pour tout $(x_1,x_2)\subset B\subset[0,1]$,

(83) $$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[g_2(t)-f(t)\right]dt\right|<\frac{\varepsilon}{4m}+\frac{\eta}{2}(x_2-x_1)\leqslant\frac{\varepsilon}{4m}+\frac{\eta}{2}.$$

Il résulte de (82), (83) et de l'inégalité $\eta<\frac{\varepsilon}{2m}$, qui suit de (81), que

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[g_2(t)-f(t)\right]dt\right|<\frac{\varepsilon}{2m} \text{ pour tout } (x_1,x_2)\subset B+T.$$

En vertu du lemme 11, aux segments de l'ensemble $B+T$, aux intervalles du complémentaire de $B+T$ à $(0,1)$, au polynôme $g_2(x)-f(x)$ et au nombre $\frac{\eta}{2}$, on peut faire correspondre un polynôme $v(z)$ tel que

(84) $$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[v(t)+g_2(t)-f(t)\right]dt\right|<\varepsilon \text{ pour tout } (x_1,x_2)\subset(0,1),$$

(85) $$|v(z)|<\frac{\eta}{2},\ |v'(z)|<\frac{\eta}{2} \text{ pour tout } z\in\overline{\mathcal{R}}_{B+T}.$$

Je pose

$$g(x)\equiv g_2(x)+v(x).$$

Le polynôme $g(x)$ satisfait à toutes les conditions du lemme 12, à savoir, la condition (84) équivaut à (**72**) avec $(0,1)$ au lieu $[-d,d]$; les conditions (80), (85) entraînent (**71**), car d'après (81) $\eta\leqslant\varepsilon$; de (85), (79), (77) résulte (**70**), car $\Phi_3 I\subset B$ et d'après (81) $a_1-a\geqslant\eta$; de (85), (79), (76) résulte (**69**), car d'après (81) $\eta\leqslant\frac{\varrho}{2}$; de (85), (79), (74), (75) résulte (**67**) et (**68**), car $\Phi_1\subset\Phi_2\subset B$ et d'après (81) $\eta\leqslant c_1-c_1'$; $\eta\leqslant c_2-c_2'$; de (85), (79), (73) résulte (**66**), car d'après (81) $\eta\leqslant a'-a$, $\eta\leqslant b'-b$.

9. *Théorème 4.* *Si les ensembles P et C de points de l'axe des x satisfont à la condition (***): P est un G_δ, C est un F_σ de I-e catégorie, $PC=0$, $P+C=\overline{P+C}$, il existe alors une fonction $f(x)$ de classe C_∞ telle que P est l'ensemble de tous les points singuliers (P) pour $f(x)$, C est l'ensemble de tous les points singuliers (C), et $R-(C+P)$ est l'ensemble de tous les points réguliers.*

Démonstration. (Pour la condition (*) équivalente selon lemme 2). Aux nombres $a=2=1!\,1^1+1$, $b=9=2!\,b_2^2+1$ où $b_2=\max(m_1,m_2)=\max(1,2)=2$, $c_1=2=1!\,3^1-1$, $c_2=3=1!\,4^1-1$, $\delta=\delta_1=1$, $\varepsilon_1=\frac{1}{4d_1}$, $\varrho_1=1$, aux ensembles B_1, T_1, $\Phi_1\subset\Phi_1\subset\Phi_2\subset B_1$, au segment $I_{1,1}$ (avec les notations du lemme 3) et au polynôme arbitraire $w_1'(x)$ (par ex. $w_1(x)\equiv 0$), correspond, selon le lemme 12 un polynôme $w_2(x)$ tel que:

$$|w_2(x)|>2 \text{ ou } |w_2'(x)|>9 \text{ pour tout } x\in I_{1,1}B_1,$$

$$|w_2(x)|<2 \text{ pour tout } x\in\Phi_1,$$

$$|w_2(x)|<3 \text{ pour tout } x\in\Phi_1,$$

$$|w_2(x)|>|w_1'(x)|-1 \text{ pour tout } x\in B_1W_1\{|w_1'(x)|>2\},$$

où $W_1=\{\operatorname{dist}(x,\Phi_1)>1\}$ lorsque $\Phi_1\neq 0$, $W_1=R$ lorsque $\Phi_1=0$,

$$|w_2(x)|>2 \text{ pour tout } x\in\Phi_2 I_{1,1},$$

$$|w_2(z)-w_1'(z)|<\frac{1}{4d_1} \text{ pour tout } z\in\overline{\mathcal{R}}_{T_1},$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left[w_2(t)-w_1'(t)\right]dt\right|<\frac{1}{4d_1} \text{ pour tout } (x_1,x_2)\subset(-d_1,d_1).$$

Je considère les ensembles correspondants à l'ensemble donné P du type G_δ du lemme 3 et, pour appliquer l'induction, je suppose que pour une valeur de n on ait déterminé les polynômes $w_n(x)$, $w_{n+1}(x)$ et un nombre positif δ_n satisfaisant aux conditions:

(1) $$|w_{n+1}(x)| > n!\, m_n^n + 1 \text{ ou } |w'_{n+1}(x)| > (n+1)!\, b_{n+1}^{n+1} + 1 \text{ pour tout } x \in B_n I_{m_n,k_n},$$

(2) $$|w_{n+1}(x)| < n!\, 3^n - 1 \text{ pour tout } x \in \Phi_{m_n},$$

(3) $$|w_{n+1}(x)| < n!\, (m_n+3)^n - 1 \text{ pour tout } x \in \Phi_n,$$

(4) $$|w_{n+1}(x)| > |w'_n(x)| - \frac{1}{2^{n-1}} \text{ pour tout } x \in B_n W_n\{|w'_n(x)| > n!\, m_n^n + 1\},$$

où $W_n = \{\operatorname{dist}(x, \Phi_n) > \delta_n\}$ lorsque $\Phi_n \neq 0$, $W_n = R$ lorsque $\Phi_n = 0$,

(5) $$|w_{n+1}(x)| > n!\, m_n^n + 1 \text{ pour tout } x \in \Phi_{n+1} I_{m_n,k_n},$$

(6) $$|w_{n+1}(z) - w'_n(z)| < \frac{1}{4^n d_n^n} \text{ pour tout } z \in \overline{\mathcal{R}}_{T_n},$$

(7) $$\left|\int_{x_1}^{x_2} [w_{n+1}(t) - w'_n(t)]\, dt\right| < \frac{1}{4^n d_n^n} \text{ pour tout } (x_1, x_2) \subset (-d_n, d_n),$$

où $b_{n+1} = \max(m_n, m_{n+1})$. Ces conditions sont remplies pour $n=1$. Je définis δ_{n+1} comme il suit: s'il existe des points $x \in \Phi_{n+1}$ n'appartenant pas à $I_{m_n k_n}$, je pose $A_n = (-d_n - 1, d_n + 1) - I_{m_n k_n}$; dans le cas contraire $A_n = 0$.

$$\Phi_{n+1} \subset A_n + (-d_n - 1, d_n + 1)\{|w_{n+1}(x)| > n!\, m_n^n + 1\} = D_n,$$

car $\Phi_{n+1} - I_{m_n,k_n} \subset A_n$, pour $x \in \Phi_{n+1} I_{m_n,k_n}$ on a $x \in \{|w_{n+1}(x)| > n!\, m_n^n + 1\}$ d'après (5), en outre $\Phi_{n+1} \subset [-d_n, d_n] \subset (-d_n - 1, d_n + 1)$ d'après (**11**) **5**, (**10**) **5**. L'ensemble D_n est ouvert, borné ou vide. Dans le cas où $\Phi_{n+1} \neq 0$, sa distance à la frontière de D_n est positive; en désignant sa moitié par δ_{n+1}, on a donc

(8) $$\{\operatorname{dist}(x, \Phi_{n+1}) \leqslant \delta_{n+1}\} \subset D_n.$$

Si $\Phi_{n+1} = 0$, je pose $\delta_{n+1} = 1$. D'après le lemme 12, aux nombres positifs

$$a = (n+1)!\, m_{n+1}^{n+1} + 1, \quad b = (n+2)!\, b_{n+2}^{n+2} + 1,$$

où $$b_{n+2} = \max(m_{n+1}, m_{n+2}), \quad c_1 = (n+1)!\, 3^{n+1} - 1,$$

$$c_2 = (n+1)!\, (m_{n+1}+3)^{n+1} - 1, \quad \delta = \delta_{n+1}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4^{n+1} d_{n+1}^{n+1}}, \quad \varrho = \frac{1}{2^n},$$

satisfaisant à la condition $c_2 > a$, c'est-à-dire que

$$(n+1)!\, [(m_{n+1}+3)^{n+1} - m_{n+1}^{n+1}] > 2,$$

aux ensembles B_{n+1}, T_{n+1}, $\Phi_{m_{n+1}} \subset \Phi_{n+1} \subset \Phi_{n+2} \subset B_{n+1}$, $I_{m_{n+1},k_{n+1}}$ du lemme 3, contenus dans $[-d_{n+1}, d_{n+1}]$ et au polynôme $w'_{n+1}(x)$, correspond un polynôme $w_{n+2}(x)$ satisfaisant aux conditions (1)—(7) pour $n+1$ au lieu de n; par suite les polynômes $w_n(x)$ sont déterminés par induction pour toute valeur de n. Je pose:

(9) $$w_{n,0}(x) \equiv w_n(x),$$

(10) $$w_{n,i+1}(x) \equiv w_{n-1,i}(0) + \int_0^x w_{n,i}(t)\, dt,$$

(11) $$\omega_n(x) = w_{n,n-1}(x);$$

par suite $\omega_n^{(k)}(x) = w_{n,n-k-1}(x)$ pour $k < n$. La suite $\omega_n^{(k)}(x)$, $k = \text{const.}$, est uniformément convergente dans tout segment fini I.

En effet, selon (7), (9) et (10) on a

(12) $$\begin{aligned} |w_{n+1,1}(x) - w_{n,0}(x)| &= \left|w_{n,0}(0) + \int_0^x w_{n+1,0}(t)\, dt - w_{n,0}(x)\right| = \\ &= \left|\int_0^x [w_{n+1}(t) - w'_n(t)]\, dt\right| < \frac{1}{4^n d_n^n} \text{ pour tout } |x| \leqslant d_n. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un $i \geqslant 0$ tel que

$$|w_{n+1,i+1}(x) - w_{n,i}(x)| < \frac{1}{4^n d_n^{n-i}} \text{ pour tout } x \in [-d_n, d_n];$$

on a alors

$$(13)\qquad |w_{n+1,i+2}(x)-w_{n,i+1}(x)| = \Big|w_{n,i+1}(0)+\int_0^x w_{n+1,i+1}(t)\,dt - w_{n,i+1}(x)\Big|$$

$$= \Big|\int_0^x \big[w_{n+1,i+1}(t)-w'_{n,i+1}(t)\big]dt\Big| = \Big|\int_0^x \big[w_{n+1,i+1}(t)-w_{n,i}(t)\big]dt\Big|$$

$$< \frac{|x|}{4^n d_n^{n-i}} \leqslant \frac{1}{4^n d_n^{n-i-1}} \quad \text{pour tout } |x|\leqslant d_n,$$

c. à d. l'inégalité est vraie aussi pour $i+1$; elle se trouve ainsi établie par induction pour tout i; en particulier, pour $i=n-k-1$, c. à d. d'après (11):

$$(14)\qquad |\omega_{n+1}^{(k)}(x)-\omega_n^{(k)}(x)| < \frac{1}{4^n d_n^{k+1}} \quad \text{pour tout } x\in[-d_n, d_n],\ n>k.$$

Puisque pour n suffisamment grand l'intervalle $[-d_n, d_n]$ contient le segment fini I, la convergence y est uniforme. Posons

$$\Omega_k(x) = \lim_{n\to\infty} \omega_n^{(k)}(x);$$

comme $\omega_n^{(k+1)}(x) = \dfrac{d}{dx}\omega_n^{(k)}(x)$, il résulte de la convergence uniforme que $\Omega_{k+1}(x)=\Omega'_k(x)$; posons

$$\Omega(x)\equiv\Omega_0(x), \text{ donc } \Omega_k(x)\equiv\Omega^{(k)}(x),$$

c. à d. *$\Omega(x)$ appartient à classe C_∞*. D'après (14) on a:

$$|\omega_{p+1}^{(k)}(x)-\omega_{k+1}^{(k)}(x)| < \sum_{n=k+1}^{p} \frac{1}{4^n d_n^{k+1}} < \frac{1}{d_{k+1}^{k+1}} \sum_{n=k+1}^{p} \frac{1}{4^n}$$

pour tout $x\in[-d_{k+1}, d_{k+1}]$, car $[-d_n, d_n]\supset[-d_{k+1}, d_{k+1}]$ pour $n>k$, **(10) 5**. En passant à la limite pour $p\to\infty$, il vient

$$|\Omega^{(k)}(x)-\omega_{k+1}^{(k)}(x)| \leqslant \frac{1}{d_{k+1}^{k+1}} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \quad \text{pour tout } x\in[-d_{k+1}, d_{k+1}].$$

Comme $\omega_{k+1}^{(k)}(x) = w_{k+1,0}(x) = w_{k+1}(x)$, j'obtiens, en changeant l'indice k en n:

$$(15)\quad |\Omega^{(n)}(x)-w_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{d_{n+1}^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} < \frac{1}{4^n} \quad \text{pour tout } x\in[-d_{n+1}, d_{n+1}].$$

Chaque point $x\in R-\overline{P}$ est situé, d'après **(14) 5**, à l'intérieur d'un rhombe $\mathcal{R}_{T_{n_0}}$ (où n_0 dépend de x). Selon **(15) 5** la suite des rhombes $\mathcal{R}_{T_n}$ est non décroissante. Je vais démontrer que dans les rhombes $\mathcal{R}_{T_n}$ la fonction $\Omega(z)$ est holomorphe.

C'est une notation inexacte pour les prolongements analytiques de $\Omega(x)$ aux domaines $\mathcal{R}_{T_n}$, dont je me sers afin de simplifier le raisonnement; il n'y a d'ailleurs aucun danger d'ambiguité. En réalité, on ne sais pas si les fonctions $\omega_n(z)$ convergent vers la même fonction analytique dans des différents $\mathcal{R}_{T_n}$.

Dans les rhombes $\mathcal{R}_{T_n}$ on a

$$|w_{n+1,i+1}(z)-w_{n,i}(z)| < \frac{1}{4^n d_n^{n-i-1}}$$

pour tout $i\geqslant 0$; la démonstration s'effectue comme dans le cas de l'inégalité (12) et (13), c. à d. elle consiste en des limitations des intégrales $\int_0^z \big[w_{n+1}(t)-w'_n(t)\big]dt$, $\int_0^z \big[w_{n+1,i+1}(t)-w_{n,i}(t)\big]dt$ le long de la ligne brisée, composée d'un intervalle de l'axe réel et d'un segment perpendiculaire à cet axe, situé dans un rhombe de $\mathcal{R}_{T_n}$. Il est aisé de voir que la ligne d'intégration a la longueur $<d_n$. La limitation de la première intégrale étendue au segment de l'axe réel s'obtient d'après (7); dans le rhombe — d'après (6); dans la suite de la démonstration on applique l'induction. En particulier, pour $i=n-1$, il vient

$$|\omega_{n+1}(z)-\omega_n(z)| < \frac{1}{4^n} \quad \text{pour tout } z\in\mathcal{R}_{T_n},$$

donc pour tout $z\in\mathcal{R}_{T_{n_0}}$ et $n\geqslant n_0$; la suite $\omega_n(z)$ est donc uniformément convergente dans $\mathcal{R}_{T_{n_0}}$ et sa limite $\Omega(z)$ est holomorphe dans $\mathcal{R}_{T_{n_0}}$. Par conséquent:

tout point $x\in R-\overline{P}$ est régulier pour $\Omega(x)$.

Soit $x\in PB_nI_{m_n,k_n}$ et

$$(16)\qquad |w_{n+1}(x)|\leqslant n!\, m_n^n+1.$$

La condition (1) donne alors

$$(17)\qquad |w'_{n+1}(x)| > (n+1)!\, b_{n+1}^{n+1}+1 \geqslant (n+1)!\, m_{n+1}^{n+1}+1,$$

et, d'après (12) 5, $x \in B_{n+1} \supset \overline{P}[-d_{n+1}, d_{n+1}]$, car $x \in \overline{P}$ et $x \in B_n \subset [-d_n, d_n]$. Il est impossible que l'on ait $x \in D_n$, car $x \in I_{m_n, k_n}$ entraîne $x \,\overline{\epsilon}\, A_n$; de même, d'après (16), $x \,\overline{\epsilon}\, \{|w_{n+1}(x)| > n!\, m_n^n+1\}$; donc, d'après (8):

$$\operatorname{dist}(x, \Phi_{n+1}) > \delta_{n+1} \text{ lorsque } \Phi_{n+1} \neq 0,$$

c. à d.

$$x \in B_{n+1} W_{n+1}\{|w'_{n+1}(x)| > (n+1)!\, m_{n+1}^{n+1}+1\}$$

selon (17). Lorsque $\Phi_{n+1}=0$, on a $\delta_{n+1}=1$, $W_{n+1}=R$ et l'on a

$$x \in B_{n+1} W_{n+1}\{|w'_{n+1}(x)| > (n+1)!\, m_{n+1}^{n+1}+1\}.$$

On déduit de (4), en remplaçant n par $n+1$:

$$|w_{n+2}(x)| > |w'_{n+1}(x)| - \frac{1}{2^n} > (n+1)!\, b_{n+1}^{n+1}+1-\frac{1}{2^n} \geqslant (n+1)!\, m_n^{n+1}+1-\frac{1}{2^n},$$

d'après (17), et comme $b_{n+1}=\max(m_n, m_{n+1}) \geqslant m_n$, c. à d. selon (16): pour tout $x \in PB_nI_{m_n,k_n}$, on a

$$|w_{n+1}(x)| > n!\, m_n^n+1 \text{ ou } |w_{n+2}(x)| > (n+1)!\, m_n^{n+1}+1-\frac{1}{2^n};$$

pour les mêmes x, on a

$$|\Omega^{(n)}(x)| > n!\, m_n^n+1-\frac{1}{4^n} \text{ ou } |\Omega^{(n+1)}(x)| > (n+1)!\, m_n^{n+1}+1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^{n+1}},$$

d'après les conditions (15) et $[-d_{n+2}, d_{n+2}] \supset [-d_{n+1}, d_{n+1}] \supset B_n$, c. à d.

$$\sqrt[n]{\frac{|\Omega^{(n)}(x)|}{n!}} > m_n \text{ ou } \sqrt[n+1]{\frac{|\Omega^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}} > m_n \text{ pour tout } x \in PB_nI_{m_n,k_k},$$

$$\varphi(x) = \sup_k \sqrt[k]{\frac{|\Omega^{(k)}(x)|}{k!}} > m_n \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,$$

pour tout n. On en déduit, en vertu du lemme 4, I (en remplaçant $F(x)$ par $\varphi(x)$ et en posant $s(x) \equiv x$)

$$\varphi(x) \geqslant \sup_n n = +\infty, \text{ c. à d. } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|\Omega^{(k)}(x)|}{k!}} = +\infty,\ r(x)=0$$

pour tout $x \in P$ (*singularité* (P)). Les formules (2), (3) et (15) donnent

$$|\Omega^{(n)}(x)| < n!\, 3^n-1+\frac{1}{4^n} \text{ pour tout } x \in \Phi_{m_n},$$

$$|\Omega^{(n)}(x)| < n!\, (m_n+3)^n-1+\frac{1}{4^n} \text{ pour tout } x \in \Phi_n,$$

$$\sqrt[n]{\frac{|\Omega^{(n)}(x)|}{n!}} < 3 \text{ pour tout } x \in \Phi_{m_n},\quad \sqrt[n]{\frac{|\Omega^{(n)}(x)|}{n!}} < m_n+3 \text{ pour tout } x \in \Phi_n,$$

et tout n, et en vertu du lemme 4, II (où $C=3$, les fonctions finies $q(x) \equiv x+3$, $t_n(x) \equiv \sqrt[n]{\frac{|\Omega^{(n)}(x)|}{n!}}$) on a $\varphi(x) < +\infty$ pour tout $x \in \overline{P}-P$, c. à d. $r(x) > 0$. Comme élément de $\overline{P}$, x ne peut pas être régulier, et par suite il est *singulier* (C). Ainsi le théorème est démontré lorsque $Q=0$ (lem. 2, cond. (*)).

Dans le cas général, lorsque $C = \overline{P}-P+Q(R-\overline{P})$, $Q \neq 0$, je désigne par $\Psi(x)$ la fonction ne possédant que les singularités (C) aux points de Q et régulière aux points de $R-Q$; cette fonction existe d'après le théorème 3. La fonction

$$f(x) \equiv \Omega(x)+\Psi(x)$$

satisfait à toutes les conditions du théorème 4. Je désigne $r_f(x)$, $r_\Omega(x)$, $r_\Psi(x)$ respectivement par $r(x)$, $r_1(x)$, $r_2(x)$. On a $r(x_0) > 0$ lorsque $r_1(x_0) > 0$, $r_2(x_0) > 0$, car le rayon de convergence est déterminé par les dérivées, qui sont les mêmes que celles des fonctions $\overline{\Omega}(x)$, $\overline{\Psi}(x)$, $\overline{f}(x)$, déterminées par les séries $T_\Omega(x_0, x-x_0)$, $T_\Psi(x_0, x-x_0)$, $T_f(x_0, x-x_0)$, $T_f \equiv T_\Omega + T_\Psi$, et $\overline{\Omega}(x)$, $\overline{\Psi}(x)$ étant holomorphes, on a $r(x_0) > 0$ pour la fonction holomorphe $\overline{f}(x) = \overline{\Omega}(x)+\overline{\Psi}(x)$. En appliquant un raisonnement analogue à la différence $\overline{f}(x)-\overline{\Psi}(x) = \overline{\Omega}(x)$ et en réduisant à la contradiction, on démontre que $r(x)=0$ lorsque $r_1(x)=0$, c. à d. les points de l'ensemble P et ceux seulement sont *singuliers* (P) pour $f(x)$, donc les points de $\overline{P}-P$ sont *singuliers* (C). Les points de l'ensemble $Q-\overline{P} = Q(R-\overline{P})$ sont aussi *singuliers* (C), car $\Psi(x)$ y possède les singularités (C) ($\overline{\Psi}(x) \mp \Psi(x)$) et $\Omega(x)$ est régulière ($\overline{\Omega}(x) = \Omega(x)$); par suite $\bar{f}(x) = \overline{\Omega}(x) + \overline{\Psi}(x) \mp \Omega(x) + \Psi(x) = f(x)$ pour un certain x dans tout voisinage de $x_0 \epsilon Q - \overline{P}$. Enfin aux points de l'ensemble $R-(P+C) = (R-\overline{P})(R-Q)$ les fonctions $\Omega(x)$, $\Psi(x)$ sont holomorphes; par suite ces points sont *réguliers* pour $f(x)$, c. q. f. d.

Corollaire 1. *Tout ensemble G_δ est l'ensemble de tous les points singuliers (P) pour une fonction de classe C_∞.*

Corollaire 2. *Tout ensemble F_σ de I-e catégorie est l'ensemble de tous les points singuliers (C) pour une fonction de classe C_∞.*

Cela résulte du th. 4 et du lemme 2.

Corollaire 3. *Le problème de M.* Ulam *se résoud positivement.*

En effet, soit $P=R$, c. à d. $r(x)\equiv 0$ pour la fonction $f(x)$. Je vais démontrer que, $g(z)$ étant une fonction analytique, l'ensemble des solutions de l'équation

$$g(x) = f(x)$$

est isolé dans le domaine de la régularité de $g(z)$. Supposons par contre, que x_0 est un point d'accumulation de $\{g(x) = f(x)\}$ et que x_0 est un point régulier pour $g(z)$; on a donc

(18) $$r_g(x_0) > 0.$$

Il résulte facilement du théorème de Rolle (par induction) que x_0 est aussi un point d'accumulation des solutions de l'équation

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$$

pour tout n. Par suite de la continuité de $g^{(n)}(x)$ et $f^{(n)}(x)$ on déduit que

$$g^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \text{ pour tout } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et d'après la formule de Cauchy-Hadamard on a:

$$r_g(x_0) = r_f(x_0),$$

contrairement à (18), car $r_f(x) \equiv 0$.

Une fonction analytique arbitraire $f(x)$ possède cette propriété relativement à toute fonction analytique $g(z) \not\equiv f(z)$.

Il est aisé de voir, en considérant la fonction $a \sin\frac{1}{x}$ que, si l'on exige dans le problème de M. Ulam que l'équation $g(x) = f(x)$ ait un nombre fini de solutions, la réponse est négative.

Démonstration d'un théorème de A. Pringsheim.

10. I désignant le segment $a \leqslant x \leqslant b$, soit $f(x)$ une fonction admettant sur I les dérivées finies de tout ordre $n=1,2,\ldots$ (qui peuvent être unilatérales aux points a et b). On peut former alors la série de Taylor

$$T(x,h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n$$

en chaque point $x \epsilon I$; soit $r(x)$ son rayon de convergence.

Or, d'après un exemple de Cauchy, pour l'holomorphie de la fonction $f(x)$ sur I, la condition que l'on ait $r(x) > 0$, quel que soit $x \epsilon I$, n'est pas suffisante. Cependant, selon un théorème publié par A. Pringsheim (l. c. 1, p. 180),

(i) *la fonction $f(x)$ est holomorphe sur le segment I,*

lorsque

(ii) *il existe un $r_1 > 0$ tel que $r(x) \geqslant r_1$ pour tout $x \epsilon I$.*

La démonstration de Pringsheim est inexacte. Je la réproduis ici:

„Angenommen nämlich, es convergire die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu \frac{\varphi^{(\nu)}(t)}{\nu!} r^\nu$ für $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ und $r \leqslant r_1$, so hat man sicher für alle Werthepaare (t,r) aus dem angegebenen Bereiche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi^{(n)}(t)}{n!} r^n = 0$$

und daher insbesondere, wenn ϱ die kleinere der beiden Grössen $(t_1 - t_0)$ und r_1 bezeichnet:

(9) $$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi^{(n)}(t_0 + \vartheta\varrho)}{n!} \varrho^n = 0 \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

Nun gilt aber mit Benützung der Lagrange'schen Restform die Entwickelung:

$$\psi(t_0+h)=\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}h^\nu+\frac{\psi^{(n)}(t_0+\vartheta h)}{n!}h^n \tag{10}$$

und man erkennt aus Gl. (9), dass dieses Restglied für $h\leqslant\varrho$ mit unendlich wachsendem n verschwindet, sodass also in der That die Beziehung gilt:

$$\psi(t_0+h)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}h^\nu \qquad \text{für } h<\varrho\text{“.} \tag{11}$$

L'erreur du raisonnement consiste dans le passage par l'implication directe de l'égalité initiale (non numérotée), valable pour t fixe, à l'égalité (9), où $t=t_0+\vartheta\varrho$ est variable et dépend, entre autres, de n (en même temps que ϑ en dépend). Le reste de Lagrange est

$$R_n(t_0,h)=\frac{\psi^{(n)}(t_0+\vartheta_n h)}{n!}h^n, \qquad 0<\vartheta_n<1$$

où $\vartheta_n=\vartheta(n,t_0,h;\psi)$. Comme on voit, Pringsheim désigne ϑ_n par ϑ et $t_n=t_0+\vartheta_n\varrho$ par t; cependant, pour que sa démonstration soit exacte, il faut bien avoir l'égalité

$$\lim_{n=\infty}\frac{\psi^{(n)}(t_n)}{n!}r^n=0.$$

Or, les exemples fort simples de la convergence non uniforme suffisent à montrer que cette égalité ne résulte pas de la sienne du début: ainsi, p. ex. pour $F(t,n)=nt^2e^{-nt^2}$, on a $\lim_{n=\infty}F(t,n)=0$ quel que soit t, tandis que $\lim_{n=\infty}F(t_n,n)=e^{-1}\neq0$ lorsque $t_n=1/\sqrt{n}$.

11. Le but de ce chapitre est de donner une démonstration rigoureuse du théorème de Pringsheim. Je vais établir un peu plus, à savoir l'équivalence des trois propriétés: (i), (ii) et

(iii) *quel que soit* $x\in I$, *on a* $r(x)>0$, *et quel que soit l'intervalle* $c<x<d$ *contenu dans* I, *l'holomorphie de* $f(x)$ *sur cet intervalle entraîne celle sur le segment* $c\leqslant x\leqslant d$.

L'implication (i) $\to$ (ii) est connue des théorèmes fondamentaux sur les fonctions analytiques.

D'autre part, on a l'implication (ii) $\to$ (iii), car en admettant (ii), on a $r(x)>0$ pour tout $x\in I$, et si la fonction $f(x)$ était holomorphe sur un intervalle $c<x<d$ de I sans l'être sur le segment $c\leqslant x\leqslant d$, le point c ou d serait un point singulier d'une fonction analytique, et en conséquence $r(x)$ convergerait vers 0 avec x tendant vers ce point, contrairement à (ii). Reste donc à montrer que (iii) $\to$ (i).

En rappelant l'hypothèse faite au début du chap. **10** sur la fonction $f(x)$, ainsi que les définitions admises (chap. **1**) et le lemme 1, l'implication (iii) $\to$ (i) en résulte comme il suit.

Soit H l'ensemble de tous les points $x\in I$ réguliers sur I, c'est-à-dire dans l'entourage desquels la fonction $f(x)$ est holomorphe sur I (au sens précisé dans **1**). On voit aisément que H est un ensemble ouvert dans I. Il s'agit de montrer que, en admettant (iii), l'ensemble fermé $I-H$ est vide.

Remarquons d'abord que $I-H$ est dépourvu des points isolés. En effet, si $p\in I-H$ en était un, on aurait, en raison de (iii), $a\neq p\neq b$ et p serait une extrémité commune de deux sous-intervalles contigus de I. La fonction $f(x)$ étant holomorphe sur eux, elle le serait encore, en vertu de (iii), sur les deux segments contigus en p qui en sont les fermetures respectives. Les deux prolongements analytiques de $f(x)$ auraient en p, par suite de la continuité des dérivées, les mêmes dérivées de tout ordre $n=1,2,\ldots$, de sorte qu'ils seraient identiques et le point p serait régulier, donc appartiendrait à H, contrairement à l'hypothèse.

Comme ensemble fermé sans points isolés, $I-H$ est donc un ensemble parfait.

Considérons la fonction $\varphi(x)=\sup\limits_n\sqrt[n]{\dfrac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}$. D'après (1) **2**, la fonction φ est sur I de I-e classe de Baire.

Or, on a en vertu de (iii)

$$\limsup_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}<+\infty,$$

puisque $r(x)>0$. Les dérivées $f^{(n)}(x)$ étant finies par hypothése, on a $\sup\limits_n\sqrt[n]{\dfrac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}<+\infty$, c'est-à-dire

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}\leqslant\varphi(x)<+\infty \quad \textit{pour tout } x\in I \text{ et pour } n=1,2,\ldots \tag{1}$$

Ceci établi, supposons que $I-H\neq 0$. En vertu du théorème de Baire, $\varphi(x)$ admet par rapport à l'ensemble parfait $I-H$ une infinité de points de continuité $x\in I-H$. Choisissons-en un, $x_0\in I-H$, situé à l'intérieur de I. Il en résulte en vertu de (1) l'existence à l'intérieur de I d'un segment $x_0-\varepsilon\leqslant x\leqslant x_0+\varepsilon$ — désignons-le par I_0 — tel que $\varphi(x)$ est une fonction bornée sur I_0-H, c'est-à-dire que l'on a en vertu de (1) pour un certain $M_0>0$:

$$(2)\qquad \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}\leqslant M_0 \quad \textit{pour}\quad n=1,2,\ldots \quad \textit{et pour tout}\quad x\in I_0-H.$$

Considérons, parmi les intervalles de I qui sont des composantes de l'ensemble (ouvert dans I) $H-(a)-(b)$ et qui empiètent sur I_0, tous ceux dont la longueur est $\geqslant 1/2M_0$. Il n'y en a évidemment qu'un nombre fini et comme ils sont formés de points de H, la fonction $f(x)$ est holomorphe sur eux, donc, en vertu de (iii), aussi sur leurs fermetures $I_1,I_2,\ldots,I_k$. En vertu du lemme 1, il existe donc des constantes positives $M_1,M_2,\ldots,M_k$ telles que

$$(3)\qquad \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}\leqslant M_i$$

pour $n=1,2,\ldots$ *et pour tout* $x\in I_i$ *où* $i=1,2,\ldots,k$.

Soit $c<x<d$ un intervalle quelconque, composante de $H-(a)-(b)$, empiétant sur I_0, mais dont la longueur est $<1/2M_0$. Comme sous-ensemble de H, cet intervalle ne contient pas I_0 puisque $x_0\in I_0-H\neq 0$; mais comme il empiète sur I_0, on a soit $c\in I_0$, soit $d\in I_0$. D'autre part, comme composante de $H-(a)-(b)$, il a les deux extrémités sur $I-H+(a)+(b)$. Ainsi l'une d'elles au moins — désignons-la par x_1 — se trouve située sur $I_0-H+[(a)+(b)]I_0$, donc sur I_0-H, puisque le segment I_0 a été fixé à l'intérieur de I. On a par conséquent en vertu de (2):

$$(4)\qquad \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_1)|}{n!}}\leqslant M_0 \qquad \textit{pour}\quad n=1,2,\ldots$$

Il en résulte en vertu de la formule de Cauchy-Hadamard que $r(x_1)\geqslant 1/M_0$. Comme par hypothèse $d-c<1/2M_0$, le segment $c\leqslant x\leqslant d$ — désignons-le par J — est contenu dans le cercle de convergence de $T(x_1,h)$ de centre x_1 et l'on a $|x-x_1|<1/2M_0$ pour tout $x\in J$. L'holomorphie de $f(x)$ sur l'intervalle $c<x<d$ entraînant en

vertu de (iii) celle sur sa fermeture J, on tire de la formule de Taylor et de (4) pour $n=1,2,\ldots$ et pour tout $x\in J$:

$$f^{(n)}(x)=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(x-x_1)^{j-n}}{(j-n)!}f^{(j)}(x_1),$$

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant\sum_{j=n}^{\infty}\frac{|x-x_1|^{j-n}}{(j-n)!}\cdot j!\,M_0^j<\sum_{j=n}^{\infty}\frac{j!\,M_0^j}{2^{j-n}M_0^{j-n}(j-n)!}=$$

$$=M_0^n\sum_{j=n}^{\infty}\frac{j!}{(j-n)!\,2^{j-n}}=M_0^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=1/2}=M_0^n\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\bigg|_{x=1/2}=2^{n+1}M_0^n n!,$$

d'où

$$(5)\qquad \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}<2M_0\sqrt[n]{2}\leqslant 4M_0$$

pour $n=1,2\ldots$ *et pour tout* $x\in J$.

Or, on a par définition la décomposition suivante du segment I_0:

$$I_0=I_0-H+I_0H=I_0-H+\sum_{i=1}^{k}I_0I_i+\Sigma' I_0J,$$

où Σ' s'étend sur tous les J de longueur $d-c<1/2M_0$. Les formules (2), (3) et (5) donnent:

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}}\leqslant \max\,(M_0,M_1,M_2,\ldots,M_k,4M_0)=M<+\infty$$

pour $n=1,2,\ldots$ et pour tout $x\in I_0$, de sorte que, en vertu du lemme 1, la fonction $f(x)$ serait holomorphe sur le segment I_0. Cependant c'est impossible, puisque, par hypothèse, elle ne l'est pas au voisinage du point $x_0\in I-H$, intérieur à I_0. Ainsi l'ensemble parfait $I-H$ est bien vide, c. q. f. d.

L'équivalence des propriétés (i), (ii) et (iii), qui vient d'être établie, entraîne en particulier l'implication (ii)$\to$(i), qui est précisément le théorème en question de A. Pringsheim.

Il résulte facilement du th. de Pringsheim et du lemme 1 que l'on a pour $\delta<1$, si (ii) est rempli,

$$\lim_{n=\infty}\frac{f^{(n)}(t)}{n!}h^n=0,$$

la convergence étant uniforme pour $t\in I$, $|h|\leqslant r_1\delta$.

Pringsheim n'en donne pas de démonstration ni ne fait aucune mention de l'uniformité. De plus, cette convergence uniforme étant équivalente à l'holomorphie de la fonction $f(x)$ dans I, la démonstration de Pringsheim contient une prémisse non démontrée et équivalente à la thèse du théorème, de sorte qu'elle présente un „cercle vicieux".

J'ai rédigé ce travail en 1940—1941, en particulier: le problème de M. Ulam au moins de juin 1940, les chapitres **2** et **3** en septembre 1940, le théorème de Pringsheim en octobre 1941, les chapitres **4**—**9** en novembre 1941.

Le théorème de Pringsheim a été démontré par M. Boas (l. c. 2); je l'ai appris en octobre 1945 du compte-rendu dans Jahrb. Fortschr. Math. (de 1935), sans pouvoir prendre connaissance de la Note de M. Boas, qui ne m'a pas été accessible. L'auteur de ce compte rendu considère contrairement à l'avis de M. Boas et au mien la démonstration primitive de Pringsheim, qui est particulièrement simple, comme complètement correcte.

Les problèmes analogues.

12. 1) Caractériser les ensembles des points singuliers des fonctions de plusieurs variables de classe D_∞ ou C_∞ (dans le cas de deux variables ces classes ne sont pas identiques même lorsque $Z=$le plan xy tout entier).

2) Quelles fonctions de II-e classe de Young peuvent être considérées comme $r(x)$ pour une fonction de classe C_∞?

3) Le problème de M. Ulam pour les fonctions de la variable complexe.

4) Existe-t-il une fonction continue $f(x)$ telle que, $g(x)$ étant une fonction arbitraire de classe C_∞ (ou C_n, D_n), l'ensemble $\{f(x)=g(x)\}$ est au plus dénombrable?

5) Est-ce qu'il existe une fonction continue $f(x)$ de la variable réelle telle que, G étant un domaine (arbitaire) dans le plan de la variable complexe tel que $\bar{G}R$ soit non dénombrable et $g(z)$ une fonction analytique arbitraire dans G telle qu'il existe $g_1(x)=\lim\limits_{z\to x} g(z)$ pour tout $x\in M\subset\bar{G}R$ (M dépend de $g(z)$ et G), l'ensemble $\{f(x)=g_1(x)\}\subset M$ soit au plus dénombrable?

6) Est-ce qu'il existe une fonction continue $f(x)$ de la variable réelle, telle que $g(z)$ étant une fonction analytique arbitraire et I un intervalle (arbitraire) tel que $\{f(x)>g(x)\}I\neq 0$ et $\{f(x)<g(x)\}I\neq 0$, l'ensemble $\{f(x)=g(x)\}I$ soit de la puissance du continu?

MM. H. Steinhaus et E. Marczewski ont posé la question, si pour une métrisation convenable de l'espace des fonctions de classe C_∞, l'ensemble des fonctions telles que $r(x)\equiv 0$ est résiduel (c. à d. est le complémentaire d'un ensemble de I-e catégorie)? Plus encore: existe-t-il un ensemble fermé et non dense C sur l'axe X tel que l'ensemble des fonctions ayant en tout point de C la singularité (C) soit résiduel?

Comme la fonction $\Omega(x)$ peut être construite dans l'entourage d'un polynôme $w_1(x)$ arbitraire (cf. p. 231), cette hypothèse paraît très vraisemblable.

Il me semble que la réponse aux problèmes 4) et 5) est négative et qu'au problème 6) la réponse est positive.