Corollary[15]. *Let $y=f(x)$ be an arbitrary mapping of $\mathcal{X}$ into a subset of $\mathcal{Y}$ and let $I=\underset{xy}{E}[y=f(x)]$. If $\mathcal{Y}$ is dense in itself, then:*

$$D(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-I)=D(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}).$$

If in addition I possesses the property of Baire, it is of first category in $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

The question whether the theorems 1, 2 and 3 are true also in the case where $\mathcal{Y}$ is an arbitrary metric space remains unsettled.

References.

C. Kuratowski [1]. *Topologie I.* Warszawa-Lwów (1933).

C. Kuratowski [2]. *Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie.* Fund. Math. **5** (1924), pp. 75-86.

C. Kuratowski et St. Ulam [1]. *Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire.* Fund. Math. **19** (1932), pp. 247-251.

[15]) See C. Kuratowski [2], p. 84, C. Kuratowski et St. Ulam [1], p. 250 and C. Kuratowski [1], p. 143.

Une mesurabilité moyenne pour les ensembles de points.

Par

H. Hadwiger (Bern).

La note présente a pour l'objet de proposer en grandes lignes une mesurabilité moyenne pour les ensembles de l'espace euclidien R à k dimensions.

Avant d'aborder le développement même de cette théorie, nous allons exposer d'une manière approximative les intuitions et les notions sur lesquelles repose essentiellement la définition de la mesurabilité moyenne. En même temps, quelques notions auxiliaires et les notations seront introduites.

$P=P(\xi_i)$ désignant des points de R et ξ_i $(i=1,2,...,k)$ leurs coordonnées cartésiennes, soit W un cube (à k dimensions) formé des points $P(\xi_i)$ dont les coordonnées satisfont à la condition

$$0\leqslant\xi_i<\omega \qquad (i=1,2,...,k).$$

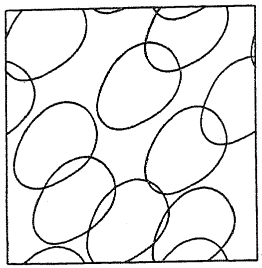
Nous entendrons par *translation X de W en lui-même* toute transformation biunivoque de $W=X(W)$ en lui-même définie par la formule

$$X[P(\xi_i)]=P(\xi_i+\tau_i)$$

où toutes les additions de coordonnées sont entendues mod ω. Les nombres τ_i, fixes pour la translation X, s'appelleront *composantes* de cette translation.

Or, soit $A\subset W$ un sous-ensemble de W mesurable (L) de mesure $L(A)$.

Par n translations X_ν $(\nu=1,2,...,n)$ de W en lui-même, on obtient de A n ensembles $A_\nu=X_\nu(A)$ qui en sont des images égales à la fois „translativement" et en mesure.



Voici la figure illustrant ce procédé, d'ailleurs fondamental pour la théorie en question.

Les images A_ν de A peuvent recouvrir W complètement, de sorte que l'on ait

$$W \subset \sum_1^n A_\nu.$$

Les points P de W se trouvent en général couverts par les A_ν plus d'une fois; soient respectivement $p(n)$ le plus grand et $q(n)$ le plus petit nombre de recouvrements des points P de W. En vertu des propriétés fondamentales connues de la mesure (L), on déduit la relation:

$$q(n)L(W) \leqslant nL(A) \leqslant p(n)L(W).$$

S'il existe une suite A_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ de tels ensembles translativement égaux, assujettie à la condition

$$p(n)-q(n)=o(n) \qquad (n\to\infty),$$

on aura évidemment

$$\frac{L(A)}{L(W)} = \lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{q(n)}{n}.$$

C'est la relation entre $L(A)$ et $L(W)$, établie par cette formule, qui fournit l'idée essentielle de la définition qu'il s'agit d'énoncer pour la mesurabilité moyenne. Cette définition exprime, au fond, le postulat qu'un recouvrement dans le sens envisagé plus haut soit possible — postulat que nous pouvons aussi caractériser à peu près comme il suit: il doit être possible de couvrir le cube W à l'aide de n ensembles A_ν translativement égaux à l'ensemble à mesurer A de façon que la variation du nombre de recouvrements des points P de W soit petite par rapport à n.

En considérant une grandeur correspondant au quotient des mesures

$$\Phi(A)=L(A)/L(W),$$

on saisira ainsi une mesure relative pour laquelle on aura

$$\Phi(W)=1.$$

Cette précaution est utile car, de cette manière, aussi les ensembles non-bornés se laissent forcément ranger dans la théorie de la mesurabilité. A ce but, nous faisons l'espace R tout entier jouer le rôle du cube W; aux translations de W en lui-même viennent alors correspondre les translations ordinaires.

Il est convenable d'introduire la fonction auxiliaire:

$$\vartheta[G]=\begin{cases} 1 \text{ pour } G\neq 0\\ 0 \text{ pour } G=0,\end{cases}$$

qui se trouve ainsi définie pour tout ensemble $G\subset R$; le signe 0 représente à la fois celui de l'ensemble vide.

En revenant sur les considérations de plus haut, on a évidemment pour tout $P\in W$

$$q(n)\leqslant\sum_1^n\vartheta[PA_\nu]\leqslant p(n).$$

Si le postulat mentionné, concernant la possibilité du recouvrement, est satisfait, on a

$$\Phi(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n\vartheta[PA_\nu].$$

La mesure relative $\Phi(A)$ apparaît de cette manière comme valeur-limite de certaines valeurs moyennes; c'est, entre autres, le motif pour la dénomination „mesurable en moyenne".

Comme le font voir ces remarques préliminaires, la théorie de la mesurabilité moyenne repose seulement sur l'acte élémentaire du recouvrement, et ce recouvrement a recours à l'ensemble même qu'il s'agit de mesurer. Par opposition à bon nombre d'autres théories de la mesure, la définition de la mesurabilité ne suppose aucune autre mesure (p. ex. élémentaire), mais il est à observer que la mesure moyenne cherchée n'a qu'un caractère relatif. Nous avons déjà vu que ce caractère relatif permet, d'autre part, de mesurer les ensembles bornés et non-bornés par le même genre de procédé.

Enfin, il est à remarquer que la mesurabilité moyenne, proposée ici pour les ensembles de points de l'espace euclidien, se laisse transporter dans ses traits essentiels aux groupes abstraits arbitraires. Dans cette note, nous ne pouvons pas envisager de plus près ces connexions générales.

Les matières des considérations qui suivent seront rangées comme voici: dans I, les définitions de la mesurabilité moyenne et de la mesure moyenne seront données pour les ensembles bornés et non-bornés de R; dans II, les théorèmes distincts seront recueillis dans leur connexion sans démonstrations; dans III, nous les ferons suivre de leurs démonstrations respectives, d'abord omises.

I.

Soient: R l'espace euclidien à k dimensions, W le cube $0 \leqslant \xi_i < \omega$ $(i=1,2,\ldots,k)$ et

$$\vartheta[G]=\begin{cases}1 \text{ pour } G \neq 0\\ 0 \text{ pour } G=0\end{cases}$$

la fonction auxiliaire, définie pour tout ensemble $G \subset R$. Une translation X de W en lui-même étant donnée, soit $X(A)$ l'ensemble obtenu par X de l'ensemble $A \subset W$.

Définition. Un ensemble $A \subset W$ s'appelle *mesurable en moyenne relativement à* W, ou *mesurable en moyenne* tout court, lorsqu'il existe un nombre a tel que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de translations X_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$ de W en lui-même assujetties pour tout point $P \in W$ à la condition:

$$\text{(d)} \qquad \left| a - \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \vartheta[P X_\nu(A)] \right| < \varepsilon.$$

Le nombre a sera dit une *mesure moyenne de* A *relativement à* W, ou tout court *mesure relative de* A, et on écrira:

$$a=\Phi(A).$$

Remarque. Dans la définition qui précède, W peut être remplacé par R; les translations de W en lui-même sont alors à remplacer par les translations ordinaires dans R.

L'ensemble de tous les ensembles $A \subset W$ qui sont mesurables en moyenne relativement à W sera désigné par $\mathfrak{M}_\omega$; celui de tous les ensembles $A \subset R$ qui sont mesurables en moyenne relativement à R aura pour signe $\mathfrak{M}_\infty$. Dans les propositions où il est superflu de distinguer entre $\mathfrak{M}_\omega$ et $\mathfrak{M}_\infty$, à savoir qui sont valables dans les deux cas, nous écrirons $\mathfrak{M}$ tout court.

Evidemment, il n'y a dans $\mathfrak{M}_\omega$ que des ensembles bornés, tandis qu'à $\mathfrak{M}_\infty$ peuvent appartenir aussi bien les ensembles bornés que non-bornés. Un ensemble borné A peut naturellement appartenir à plusieurs $\mathfrak{M}_\omega$ (avec ω différents). Une réponse plus exacte à la question qui s'impose à ce propos doit être fournie par la théorie.

II.

Les propriétés fondamentales de l'opérateur de mesure moyenne sont énoncées dans les théorèmes qui suivent.

T 1. *Pour tout* $A \in \mathfrak{M}$, *la valeur* $\Phi(A)$ *est déterminée d'une façon univoque.*

T 2. *Pour tout* $A \in \mathfrak{M}$, *on a* $\Phi(A) \geqslant 0$.

T 3. *Pour tout* $A \in \mathfrak{M}$, *on a* $X(A) \in \mathfrak{M}$ *et* $\Phi[X(A)]=\Phi(A)$ *quelle que soit la translation* X.

T 4. *Si* $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ *et* $AB=0$, *on a* $A+B \in \mathfrak{M}$ *et* $\Phi(A+B)=\Phi(A)+\Phi(B)$.

Ces quatre premiers théorèmes montrent que l'opérateur Φ de mesure moyenne est, dans le domaine $\mathfrak{M}$ de sa définition, une fonctionnelle *univoque*, *non-négative*, *invariante par rapport aux translations et simplement additive.*

T 5. *On a respectivement* $W \in \mathfrak{M}_\omega$, $\Phi(W)=1$ *et* $R \in \mathfrak{M}_\infty$, $\Phi(R)=1$.

Pour l'ensemble vide 0, *on a* $0 \in \mathfrak{M}$ *et* $\Phi(0)=0$.

Pour tout ensemble $A \in \mathfrak{M}$, *on a* $0 \leqslant \Phi(A) \leqslant 1$.

Ainsi l'opérateur de mesure moyenne est *normé* de façon que l'espace de reférence soit pourvu de la mesure 1.

T 6. *Si* $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ *et* $B \subset A$, *on a aussi* $A-B \in \mathfrak{M}$ *et* $\Phi(A)-\Phi(B)=\Phi(A-B)$.

T 7. *Si* $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ *et* $B \subset A$, *on a* $\Phi(A) \geqslant \Phi(B)$.

Les deux derniers théorèmes expriment que l'opérateur de mesure moyenne est *subtractif* et *monotone.*

T 8. *Si* $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ *et* $AB \in \mathfrak{M}$, *on a aussi* $A+B \in \mathfrak{M}$ *et* $\Phi(A+B)=\Phi(A)+\Phi(B)-\Phi(AB)$.

Ici, il est à remarquer que les seules relations $A \in \mathfrak{M}$ et $B \in \mathfrak{M}$ n'impliquent guère la relation $AB \in \mathfrak{M}$, de sorte que $\mathfrak{M}$ n'est pas nécessairement un corps d'ensembles.

T 9. *Si $A \in \mathfrak{M}_\omega$, on a $W-A \in \mathfrak{M}_\omega$ et $\Phi(W-A)=1-\Phi(A)$. Si $A \in \mathfrak{M}_\infty$, on a $R-A \in \mathfrak{M}_\infty$ et $\Phi(R-A)=1-\Phi(A)$.*

T 10. *Si l'ensemble $A \in \mathfrak{M}$ est somme de s ensembles disjoints et translativement égaux:*

$$A=\sum_1^s A_j,$$

alors on a $A_j \in \mathfrak{M}$ et $\Phi(A_j)=\frac{1}{s}\Phi(A)$ pour $j=1,2,\ldots,s$.

Soit $C \subset W$ ou $C \subset R$ respectivement un ensemble quelconque. Désignons par $\mathfrak{A}(C)$ l'ensemble de tous les A qui couvrent C, c'est à dire tels que $C \subset A$, et par $\mathfrak{B}(C)$ celui de tous les B qui sont couverts par C, c'est à dire tels que $B \subset C$.

Les deux parties communes $\mathfrak{M}\mathfrak{A}(C)$ et $\mathfrak{M}\mathfrak{B}(C)$ sont évidemment non-vides, car la première contient tout au moins W ou R respectivement, et la seconde au moins l'ensemble vide 0.

En vertu de ***T 5***, il existe donc les valeurs finies:

$$\bar{\varphi}(C)=\text{fin inf}\,\Phi(A) \quad \text{pour} \quad A \in \mathfrak{M}\mathfrak{A}(C),$$
$$\underline{\varphi}(C)=\text{fin sup}\,\Phi(B) \quad \text{pour} \quad B \in \mathfrak{M}\mathfrak{B}(C).$$

T 11. *Pour tout $C \subset W$ et $C \subset R$, on a $\bar{\varphi}(C) \geqslant \underline{\varphi}(C)$.*

T 12. *L'égalité $\bar{\varphi}(C)=\underline{\varphi}(C)=\gamma$ se présente toujours si $C \in \mathfrak{M}$ et seulement dans ce cas; on a alors $\Phi(C)=\gamma$.*

La dernière proposition renferme le résultat suivant, important pour certaines applications: tout ensemble qui peut être intercalé entre deux ensembles mesurables en moyenne et qui sont de mesure presque égale est lui-même mesurable en moyenne.

Enfin, nous allons esquisser brièvement les rapports entre la mesurabilité moyenne d'une part et celle au sens respectivement de Peano-Jordan et de Lebesgue d'autre part; pour abréger, nous appellerons les dernières *mesurabilité* (J) et (L) respectivement.

T 13. *Pour tout ensemble $A \subset W$ mesurable (J), on a $A \in \mathfrak{M}_\omega$ et $\Phi(A)=J(A)/J(W)$.*

T 14. *Il y a des ensembles $A \in \mathfrak{M}_\omega$ non-mesurables (J).*

Ces résultats montrent qu'en tout cas la mesurabilité moyenne embrasse la mesurabilité (J). Il n'en est pas ainsi pour la mesurabilité (L), mais on établit le théorème suivant:

T 15. *Si $A \in \mathfrak{M}_\omega$ est mesurable (L), on a $\Phi(A)=L(A)/L(W)$.*

Ici, on peut observer que le dernier résultat se laisse déduire de la même manière pour n'importe quel opérateur de mesure $L^*(A)$ qui est univoque, non-négatif, simplement additif, invariant par rapport aux translations, normé et défini dans un système de sous-ensembles de W; pour s'en convaincre, il suffit de constater que la démonstration de ***T 15*** ne fait intervenir que les propriétés de la mesurabilité (L) énumérées tout à l'heure. Or, comme suivant la solution due à S. Banach[1]) d'un problème de S. Ruziewicz, il existe des opérateurs de mesure $L^*(A)$ de ce genre[2]) tels que l'on a l'inégalité $L^*(A') \neq L(A')$ pour certains ensembles A' mesurables (L), une comparaison facile avec la généralisation qui vient d'être mentionnée permet de conclure sur l'existence des ensembles qui sont mesurables (L) sans être mesurables en moyenne. Par contre, on a encore le théorème

T 16. *Il y a des ensembles $A \in \mathfrak{M}_\omega$ qui ne sont pas mesurables (L).*

III.

Nous donnons dans la suite les 16 démonstrations, numérotées comme les théorèmes correspondants. Nous commençons par établir un lemme qui pourra être utilisé dans plusieurs démonstrations.

Lemme. *S'il existe pour $A \in W$ un système X_ν $(\nu=1,2,\ldots,n)$ et pour $B \in W$ un système Y_μ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ de translations de W en lui-même telles que, pour deux nombres fixes a et β et pour tout point $P \in W$, on a les deux relations:*

$$\text{(a)} \qquad \left|a-\frac{1}{n}\sum_1^n \vartheta[PX_\nu(A)]\right|<\varepsilon,$$

$$\text{(b)} \qquad \left|\beta-\frac{1}{m}\sum_1^m \vartheta[PY_\mu(B)]\right|<\varepsilon,$$

[1]) S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. **4** (1923), p. 7-33.

[2]) Notons que seule l'invariance par rapport aux translations, et non pas celle par rapport aux déplacements quelconques, a été supposée; en admettant la dernière hypothèse, qui est plus restrictive, la validité de la solution de Banach se réduit — comme on sait — aux dimensions $k=1$ et $k=2$.

il existe aussi un système Z_λ ($\lambda=1,2,\ldots,l$) de translations telles que pour tout point $P\in W$ on a simultanément:

$$\text{(c)}\qquad \left|\alpha-\frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(A)]\right|<\varepsilon \quad et \quad \left|\beta-\frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(B)]\right|<\varepsilon.$$

Cet énoncé subsiste en remplaçant partout W par R et les translations de W en lui-même par celles ordinaires dans R.

Démonstration du lemme. Nous remplaçons le point P dans (a) successivement par les points $Y_\mu^{-1}(P)$ où $\mu=1,2,\ldots,m$ et dans (b) par les points $X_\nu^{-1}(P)$ où $\nu=1,2,\ldots,n$. Il vient évidemment:

$$\vartheta[Y_\mu^{-1}(P)X_\nu(A)]=\vartheta[PY_\mu X_\nu(A)],$$
$$\vartheta[X_\nu^{-1}(P)Y_\mu(B)]=\vartheta[PX_\nu Y_\mu(B)],$$

de sorte que nous obtenons le système d'inégalités:

$$\left|\alpha-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\vartheta[PY_\mu X_\nu(A)]\right|<\varepsilon \qquad (\mu=1,2,\ldots,m),$$
$$\left|\beta-\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{m}\vartheta[PX_\nu Y_\mu(B)]\right|<\varepsilon \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

On en tire par addition:

$$\left|m\alpha-\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\vartheta[PY_\mu X_\nu(A)]\right|<m\varepsilon,$$
$$\left|n\beta-\frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\vartheta[PX_\nu Y_\mu(B)]\right|<n\varepsilon.$$

En posant maintenant $X_\nu Y_\mu=Z_\lambda$ où $\lambda=1,2,\ldots,l$, les $nm=l$ produits à gauche étant rénumérotés de n'importe quelle manière, les deux dernières inégalités, divisées par m et n respectivement, donnent les deux relations simultanées (c), qu'il s'agissait de démontrer.

Passons aux démonstrations des théorèmes ***T 1—T 16.***

D 1. α et β étant deux nombres tels que $\alpha=\Phi(A)$ et $\beta=\Phi(A)$, il existe par définition, d'après la condition (d), pour tout $\varepsilon>0$, deux systèmes de translations X_ν et Y_μ pour lesquels les relations (a) et (b) du lemme se trouvent avérées avec $A=B$. On a par conséquent (c) et on en tire $|\alpha-\beta|<2\varepsilon$ d'où $\alpha=\beta$, c. q. f. d.

D 2. Il existe par définition, d'après la condition (d), pour tout $\varepsilon>0$, des nombres $\alpha_n\geqslant 0$ tels que l'on a $|\alpha-\alpha_n|<\varepsilon$; il en résulte que $\alpha\geqslant 0$, c. q. f. d.

D 3. En remplaçant P par $X^{-1}(P)$ dans la condition (d) de la définition, on en déduit en vertu de l'égalité

$$\vartheta[X^{-1}(P)X_\nu(A)]=\vartheta[PX_\nu X(A)]$$

que (d) subsiste encore si l'on y remplace A par $X(A)$. Ceci entraîne la thèse q. f. d.

D 4. Suivant la condition (d) de la définition et en vertu du lemme, il existe un système de translations Z_λ satisfaisant aux relations (c) du lemme. Ajoutées membre à membre, ces relations donnent en vertu de l'égalité

$$\vartheta[PZ_\lambda(A)]+\vartheta[PZ_\lambda(B)]=\vartheta[PZ_\lambda(A+B)]$$

la relation

$$\left|\alpha+\beta-\frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(A+B)]\right|<2\varepsilon,$$

qui entraîne la thèse à établir.

D 5. On a $\vartheta[PW]=1$ et $\vartheta[PR]=1$ pour tout $P\in W$ et $P\in R$ respectivement. La condition (d) de la définition est remplie pour $n=1$, $X=$identité, $\alpha=1$ et $A\in W$ ou $A\in R$ respectivement. Pour l'ensemble vide 0, le raisonnement est analogue avec $\vartheta[P0]=0$. Quel que soit l'ensemble $A\in\mathfrak{M}$, il existe selon (d) pour tout $\varepsilon>0$ des nombres α_n tels que $0\leqslant\alpha_n\leqslant 1$ et $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$. Il en résulte que $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, c. q. f. d.

D 6. Suivant la condition (d) de la définition et en vertu du lemme, il existe un système de translations Z_λ satisfaisant aux relations (c) du lemme. Comme on a pour $B\subset A$

$$\vartheta[PZ_\lambda(A)]-\vartheta[PZ_\lambda(B)]=\vartheta[PZ_\lambda(A-B)],$$

la soustraction des relations (c) membre à membre donne la relation

$$\left|\alpha-\beta-\frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(A-B)]\right|<2\varepsilon,$$

qui entraîne la thèse à établir.

D 7. $B\subset A$ équivaut à $A=B+(A-B)$. On n'a qu'à appliquer ***T 6***, puis ***T 4*** et enfin ***T 2***, pour obtenir la thèse q. f. d.

D 8. Vu l'identité

$$A+B=(A-AB)+(B-AB)+AB,$$

on n'a qu'à appliquer ***T 6*** et ***T 4*** d'une manière convenable.

D 9. Le théorème est un simple corollaire de ***T 6*** et ***T 5***.

D 10. Pour un A_0 convenable et pour s translations Y_μ dûment choisies, on peut écrire $A_\mu=Y_\mu(A_0)$ où $\mu=1,2,\ldots,s$, donc aussi

$$A=\sum_{1}^{s}Y_\mu(A_0).$$

En le substituant dans la condition (d) de la définition, on obtient d'abord

$$\left|\alpha-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\vartheta\left[P\sum_{\mu=1}^{s}X_\nu Y_\mu(A_0)\right]\right|<\varepsilon$$

ou

$$\left|\alpha-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{s}\vartheta[PX_\nu Y_\mu(A_0)]\right|<\varepsilon.$$

En posant $X_\nu Y_\mu=Z_\lambda$ où $\lambda=1,2,\ldots,l$, les $ns=l$ produits à gauche étant numérotés comme on veut, on peut écrire

$$\left|\frac{\alpha}{s}-\frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(A_0)]\right|<\frac{\varepsilon}{s},$$

d'où $A_0\in\mathfrak{M}$ et, en vertu de ***T 3***, la thèse q. f. d.

D 11. Pour deux ensembles quelconques $A\in\mathfrak{M}\mathfrak{A}(C)$ et $B\in\mathfrak{M}\mathfrak{B}(C)$, on a en vertu de ***T 7***, vu que $B\subset A$, la relation $\Phi(A)\geqslant\Phi(B)$, d'où la thèse q. f. d.

D 12. Soit d'abord $C\in\mathfrak{M}$ et $\Phi(C)=\gamma$; on a évidemment $\bar{\varphi}(C)\leqslant\gamma$ et $\underline{\varphi}(C)\geqslant\gamma$; en vertu de ***T 11***, il en résulte que $\bar{\varphi}(C)=\underline{\varphi}(C)=\gamma$, c. q. f. d.

Soit, réciproquement, $\bar{\varphi}(C)=\underline{\varphi}(C)=\gamma$; il existe alors pour tout $\varepsilon>0$ deux ensembles $A\in\mathfrak{M}$ et $B\in\mathfrak{M}$ tels que $B\subset C\subset A$ et qu'en posant $\alpha=\Phi(A)$ et $\beta=\Phi(B)$, on ait

$$\gamma-\varepsilon<\beta\leqslant\gamma\leqslant\alpha<\gamma+\varepsilon.$$

Suivant la condition (d) de la définition et en vertu du lemme, il existe un système de translations Z_λ tel que l'on a les relations:

$$\left|\alpha-\frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(A)]\right|<\varepsilon,\qquad\left|\beta-\frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(B)]\right|<\varepsilon.$$

Evidemment:

$$\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(B)]\leqslant\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(C)]\leqslant\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(A)],$$

ce qui donne en raison de toutes les inégalités mentionnées

$$\left|\gamma-\frac{1}{l}\sum_{1}^{l}\vartheta[PZ_\lambda(C)]\right|<2\varepsilon,$$

d'où $C\in\mathfrak{M}$ et $\Phi(C)=\gamma$, c. q. f. d.

D 13. Considérons d'abord le cube partiel $0\leqslant\xi_i<\frac{\omega}{2^p}$ $(i=1,2,\ldots,k)$ de W où $p\geqslant1$. Désignons-le par W_p.

Le cube total W peut être décomposé en $s=2^{pk}$ cubes partiels disjoints et translativement égaux à W_p. En vertu de ***T 10*** et ***T 5***, on a $W_p\in\mathfrak{M}$ et $\Phi(W_p)=1/2^{pk}$.

Pour une réunion A_u de u cubes disjoints et translativement égaux à W_p, on a en vertu de ***T 4*** aussi $A_u\in\mathfrak{M}$ et

$$\Phi(A_u)=\frac{u}{2^{pk}}=\frac{J(A_u)}{J(W)}.$$

A étant mesurable (J), il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $p\geqslant1$ et deux ensembles A_u et A_v du type envisagé tout à l'heure tels que $A_v\subset A\subset A_u$ et

$$J(A)-\varepsilon J(W)<J(A_v)\leqslant J(A)\leqslant J(A_u)<J(A)+\varepsilon J(W).$$

En posant encore

$$\gamma=\frac{J(A)}{J(W)},$$

on peut écrire

$$\gamma-\varepsilon<\Phi(A_v)\leqslant\gamma\leqslant\Phi(A_u)<\gamma+\varepsilon.$$

On en conclut que $\bar{\varphi}(A)=\underline{\varphi}(A)=\gamma$, ce qui entraîne en vertu de ***T 12*** la thèse q. f. d.

D 14. Soit A l'ensemble des points $P(\xi_i)\in W$ où $\xi_i=\omega r_i$, $0\leqslant r_i<1$, r_i étant rationnel $(i=1,2,\ldots,k)$. Comme on sait, A n'est pas mesurable (J). Or, il existe une suite θ_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ de nombres irrationnels telle que $\theta_\nu-\theta_\mu \pmod 1$ est toujours irrationnel pour $\nu\neq\mu$.

Considérons la suite des translations $X_\nu=X_\nu(\tau_i^\nu)$ où $\tau_i^\nu=\theta_\nu$ $(i=1,2,\ldots,k)$. On a évidemment $X_\nu(A)X_\mu(A)=0$ pour $\nu\neq\mu$; par conséquent, on aura pour tous les P

$$0\leqslant\sum_1^n\vartheta[PX_\nu(A)]\leqslant 1,$$

ce qui donne pour n suffisamment grand

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n\vartheta[PX_\nu(A)]\right|<\varepsilon.$$

On a donc $A\in\mathfrak{M}$ et $\Phi(A)=0$, d'où la thèse q. f. d.

D 15. On a en vertu de la condition (d) de la définition

$$\left|a-\frac{1}{n}\sum_1^n\vartheta[PX_\nu(A)]\right|<\varepsilon.$$

Posons pour $P=P(\xi_i)$ variable dans W

$$\Delta(\xi_i)=a-\frac{1}{n}\sum_1^n\vartheta[P(\xi_i)X_\nu(A)].$$

Cette fonction est intégrable (L), car il en est ainsi des fonctions qui y figurent comme sommandes: on a en effet

$$\int_0^\omega\ldots\int_0^\omega\vartheta[P(\xi_i)X_\nu(A)]d\xi_1\ldots d\xi_k=L(A),$$

la fonction à intégrer étant l'ainsi dite fonction caractéristique de l'ensemble $X_\nu(A)$. Il s'en suit ainsi que

$$\int_0^\omega\ldots\int_0^\omega\Delta(\xi_i)d\xi_1\ldots d\xi_k=aL(W)-L(A),$$

de sorte que l'on obtient $|aL(W)-L(A)|<\varepsilon L(W)$, c'est à dire

$$\left|a-\frac{L(A)}{L(W)}\right|<\varepsilon.$$

On a donc $a=L(A)/L(W)$, c. q. f. d.

D 16. L'ensemble W peut être décomposé d'une manière connue [3]) en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints et translativement égaux:

$$W=\sum_0^\infty A_\nu.$$

On prouve par un raisonnement analogue à celui de ***D 14*** que $A_0\in\mathfrak{M}_\omega$ et $\Phi(A_0)=0$. L'ensemble A_0 est naturellement non-mesurable (L)!

[3]) Cf. p. ex. W. Alexandrow, *Elementare Grundlagen für die Theorie des Masses*, Thèse, Zürich 1916, Anhang.