Stefan Mazurkiewicz et son oeuvre scientifique.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Stefan Mazurkiewicz naquit le 25 septembre 1888 à Varsovie. Son père y était un avocat renommé.

Après avoir terminé l'école secondaire à Varsovie, Mazurkiewicz a fait ses études supérieures en mathématiques à Cracovie, à Lwów et à l'étranger: à Münich et Göttingen. Il a obtenu son grade de docteur en philosophie en 1913 à l'Université de Lwów, des mains du professeur W. Sierpiński en vertu de sa Thèse sur les courbes qui remplissent le carré.

En 1915, il devint professeur de mathématique à l'Université de Varsovie. Il occupa ce poste jusqu'à la fin de ses jours. Pendant cette période, il a été revêtu, 9 ans de suite, de la dignité du Doyen de la Faculté des Sciences Mathématiques et Naturelles; depuis 1937 il est Prorecteur de l'Université.

Membre de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, membre de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, il est depuis 1935 Secrétaire Général de cette Société et pendant les années 1933—1935 président de la Société Polonaise de Mathématique. Il est l'un des fondateurs et rédacteurs du périodique „Fundamenta Mathematicae", de-même que membre du Comité de Rédaction des „Monografie Matematyczne" depuis la fondation de cette collection.

Il n'y a pas d'initiative dans le domaine de la mathématique polonaise à laquelle Mazurkiewicz n'eût pris une part active. En même temps, il est tuteur, éducateur et ami de la jeunesse; il est Curateur du Cercle Mathématico-Physique d'Étudiants de l'Université de Varsovie durant les 30 ans depuis la fondation du Cercle jusqu'à sa propre mort.

Il passe à Varsovie les années de la dernière guerre. Malgré les rudes conditions de la vie, il trouve du temps pour travailler à son oeuvre capitale „Théorie des probabilités". Malheureusement, tous ses manuscrits et travaux ont été détruits en automne de 1944 par l'incendie de la ville de Varsovie, brûlée méthodiquement par les Allemands. La copie de quelques chapitres, sauvée par hasard, lui sert au cours de la dernière période de sa vie à reconstituer des fragments de son oeuvre.

Par suite d'horribles conditions d'existence sous l'occupation allemande, la grave maladie dont il est atteint prend un développement rapide. Elle éclate en toute vigueur lorsque, après l'insurrection de Varsovie, Mazurkiewicz — de-même que toute la population de la ville — est impitoyablement chassé à courir le monde sans abri ni domicile. Il meurt à Grodzisk, à 30 km de Varsovie, le 19 juin 1945.

* * *

En 1915, quand Stefan Mazurkiewicz montait la chaire de mathématique à l'Université polonaise de Varsovie, reconstituée après un demi-siècle, il a été le plus jeune des professeurs: il n'avait que 26 ans. Il a su néanmoins grouper autour de lui les jeunes gens les plus actifs qui étudiaient les mathématiques et les guider dans leurs intérêts scientifiques. Parmi ses élèves se trouvaient comme étudiants de première année Knaster, Saks et moi-même. Le Séminaire de Topologie que Mazurkiewicz conduisait en 1916 avec Janiszewski a été probablement le premier dans l'histoire des mathématiques qui fût consacré à cette discipline alors naissante. L'intérêt scientifique du milieu varsovien commence à se dessiner nettement déjà à cette époque: théorie des ensembles, topologie, fondements des mathématiques. Cet intérêt se traduit en 1920 par le fait d'importance capitale pour la mathématique polonaise: Janiszewski, Mazurkiewicz et Sierpiński inaugurent le périodique „Fundamenta Mathematicae" consacré tout particulièrement à ces domaines de la mathématique. Le milieu varsovien, concentré au travail portant en premier lieu sur ces domaines, parvient à un nombre considérable de nouveaux résultats et problèmes; de plus en plus souvent ce milieu est appelé par le monde scientifique „Ecole Mathématique de Varsovie". Les mathématiciens s'y réunissent chaque vendredi pour se communiquer mutuellement leurs résultats et s'informer sur leurs nouvelles idées ou problèmes. Les réunions ne se réduisent pas aux séances officielles de la Société Mathématique, mais sont suivies des discussions menées le plus souvent au café. Mazurkiewicz est l'âme et le vrai chef de ces réunions inofficielles. Combien lance-t-il d'idées nouvelles qui seront ensuite réalisées dans les travaux de lui-même, de ses élèves et de ses collaborateurs; combien pose-t-il de nouveaux problèmes et en résout d'anciens; combien de travaux communs prennent leur origine dans ces discussions!

Il y a fort peu d'auteurs qui, comme Mazurkiewicz, possèdent dans leur bagage scientifique un nombre si important des problèmes résolus, posés par les autres savants et considérés par eux comme particulièrement difficiles. Doué d'une intelligence extraordinaire, d'une rapidité d'orientation et des connaissances très étendues, Mazurkiewicz a été qualifié tout spécialement à ce rôle.

Son érudition et la science dont il disposait dépassent considérablement les limites des mathématiques. Il connait parfaitement l'histoire, se donne avec amour à la lecture de la poésie et de la littérature, s'intéresse à tout ce qui concerne les sciences et la culture. En mathématique, il travaille avec la même aisance et la même force créatrice à la topologie qu'au calcul des probabilités, à la théorie des ensembles qu'à la théorie des fonctions analytiques. Il procède par une foule de méthodes propres aux diverses branches des mathématiques et les sait appliquer avec maîtrise pour résoudre les problèmes qui l'intéressent.

Ses communications à la Société Polonaise de Mathématique ressemblent, au point de vue esthétique, aux objets d'art: éblouissantes par l'ingéniosité et la richesse des méthodes, elles produisent sur les auditeurs une impression esthétique très profonde.

La contribution apportée à la science par Stefan Mazurkiewicz ne se réduit pas à la publication de plus d'une centaine de travaux de grande valeur. L'influence exercée sur ses élèves et collaborateurs par l'originalité de son esprit et la grandeur de son talent était si puissante qu'elle persiste encore et continuera à persister.

* * *

L'un des premiers problèmes, très important, auquel Mazurkiewicz s'intéressait dès l'an 1913 était le problème de caractériser d'une façon intrinsèque les continus, nommés plus tard *péaniens*, c. à d. les continus qui admettent une représentation paramétrique

continue sur l'intervalle. Dans deux notes *Sur l'arithmétisation du continu*, parues en 1913 (N° 4 et 5), Mazurkiewicz caractérise les continus péaniens par *la connexité locale et intégrale par arcs*: tout couple x, y de points se laisse unir dans un tel continu par un arc; de plus, cet arc peut être supposé de diamètre arbitrairement petit si les points x et y sont suffisamment voisins. La même idée a été développée plus tard par Mazurkiewicz dans son mémoire du I-er volume des Fundamenta (N° 34). Les notions qui n'avaient qu'un rôle auxiliaire, sont étudiées ici pour elles-mêmes; telles sont, en particulier, les notions qui sont devenues si importantes: de *point de connexité locale* (nommée alors point de premier genre) et de *distance relative* (= borne inférieure du diamètre des arcs unissant deux points donnés), qu'il appliquera à plusieurs reprises, jusqu'à son dernier Mémoire du vol. XXXIII des Fundamenta (sur la théorie des bouts premiers). On doit ainsi à Mazurkiewicz, dans la théorie des continus péaniens, les théorèmes les plus fondamentaux et les notions devenues classiques en Topologie. Quelques-uns de ces théorèmes ont été trouvés indépendamment et simultanément par d'autres auteurs. Ainsi H. Hahn caractérisa les continus péaniens par des conditions très voisines de celles dont s'était servi Mazurkiewicz; le théorème sur l'existence d'un arc unissant deux points donnés d'un continu péanien a été établi indépendamment par M. R. L. Moore (théorème nommé „de Mazurkiewicz — Moore").

Ces coïncidences ne sont point étonnantes, vu que le développement de la Topologie à cette époque imposait la solution des problèmes précités [1]). Rappelons qu'une quinzaine d'années auparavant Peano a découvert qu'un domaine plan, ou même un cube à 3 dimensions, pouvait être obtenu de l'intervalle par une transformation continue. Cette découverte a conduit, d'une part, au problème de caractériser les continus qui se laissent obtenir de l'intervalle par une transformation continue; d'autre part, en bouleversant l'intuition habituelle de la dimension (qui semblait être déterminée par le nombre des paramètres nécessaires pour représenter le continu envisagé), elle imposait aux topologues de définir d'une façon adéquate *la notion de dimension*.

Il est remarquable que, dans cet ordre d'idées, Mazurkiewicz dans sa Thèse (N° 14) propose pour les ensembles compacts une

[1]) Ajoutons que M. Sierpiński, dans un travail paru dans le I-er volume des Fundamenta s'est occupé aussi à caractériser les continus péaniens.

définition de la dimension qui s'est montrée complètement d'accord avec la théorie générale de la dimension, développée plus tard par M. Menger et Urysohn (théorie basée sur les idées de H. Poincaré et de M. L. E. J. Brouwer). A savoir, il proposa de nommer dimension de E le plus petit entier n tel qu'il soit possible d'obtenir l'ensemble E d'un sous-ensemble non dense et fermé de l'intervalle à l'aide d'une fonction n'admettant que des points d'ordre $\leqslant n+1$. Cette définition a été suggérée à Mazurkiewicz par les deux faits suivants qu'il avait établis: 1) toute transformation continue de l'intervalle en un domaine du plan admet nécessairement des points d'ordre $\geqslant 3$ [1]), 2) tout sous-ensemble fermé et non dense du plan se laisse obtenir d'un ensemble linéaire fermé par une transformation n'admettant que des points d'ordre $\leqslant 2$.

La théorie de la dimension attire l'attention de Mazurkiewicz à plusieurs reprises. Dans le vol. X des Fundamenta il résout les problèmes $\varkappa$ et λ d'Urysohn en démontrant l'existence d'un espace complet séparable de dimension n qui n'est connexe entre aucun couple de points. Dans le vol. XIII il établit l'existence d'ensembles faiblement n-dimensionnels (c. à d. dont le noyau dimensionnel est de dimension $<n$) pour tout n. Il montre (N° 61) qu'en enlevant d'une région contenue dans l'espace cartésien à n dimensions un ensemble de dimension $n-2$, on obtient un semi-continu. Il démontre (N° 109) d'une façon particulièrement simple et ingénieuse que tout continu de dimension 2 contient un continu indécomposable (problème de M. Alexandroff). Il établit avec M. Szpilrajn-Marczewski (N° 121) l'existence (sous l'hypothèse du continu) d'un ensemble de dimension n (arbitraire) qui est de I-e catégorie sur tout ensemble parfait (singularité découverte par M. Lusin). Il résout un problème de Topologie combinatoire, posé par M. Alexandroff, concernant la dimension „modulo m" (N° 92).

La théorie des courbes, étroitement liée à celle de la dimension, est l'objet de plusieurs travaux de Mazurkiewicz: dans les notes NN° 57, 66 et 68 il établit des théorèmes concernant la structure des points d'ordre du continu, en résolvant des problèmes posés par M. Menger et par Urysohn.

L'un des problèmes qui s'est imposé il y a 30—40 ans était celui de caractériser d'une façon intrinsèque *les arcs simples*, c. à d. les images biunivoques et continues de l'intervalle (le même problème

[1]) Résultat acquis indépendamment par H. Hahn.

concernant les images continues, pas nécessairement biunivoques, c. à d. concernant les continues péaniens, a été résolu — comme nous avons vu — par Mazurkiewicz). C'est à ce but que fut introduite et étudiée par Zoretti et Janiszewski la notion de continu irréductible entre deux points [1]). L'un des premiers résultats de Mazurkiewicz (N° 1) est une démonstration de l'existence dans tout continu contenant les points a et b d'un continu irréductible entre a et b (ajoutons que dans la même note des Comptes Rendus, Mazurkiewicz introduit la notion importante d'ensemble connexe entre les points a et b, sous le nom „d'ensemble $K(a,b)$"). La théorie des continus irréductibles entre deux points (développée par Janiszewski dans sa Thèse) conduisit à l'étude de l'une des découvertes le plus remarquables en Topologie, à celle des *continus indécomposables* [2]), découverts par M. Brouwer en 1910. C'est dans ce domaine que Mazurkiewicz parvint à de nombreux résultats très profonds et fondamentaux.

En analysant la structure d'un continu indécomposable, il constate que tout continu indécomposable est irréductible entre deux points. Plus encore, a étant un point arbitraire d'un continu indécomposable C, l'ensemble des points x tels que C n'est pas irréductible entre a et x (nommé le composant de a) est de I-e catégorie dans C (N° 32). Il s'en suit que la famille des composants d'un continu indécomposable est indénombrable; plus précisément: elle est de la puissance du continu (N° 55), car il existe dans C un ensemble parfait qui ne contient qu'un seul point, au plus, en commun avec toute composante.

Tout continu indécomposable situé sur le plan jouit de deux propriétés remarquables: ses composants qui contiennent (au moins) un point accessible constituent un ensemble de I-e catégorie (N° 62); celles qui contiennent au moins, deux points accessibles, constituent une famille finie ou dénombrable.

L'étude des continus indécomposables se rattache aussi au problème suivant. Au Congrès de Cambridge, en 1912, Janiszewski annonça, dans une communication très brève, l'existence des continus dépourvus d'arcs simples. Sauf la communication de Janiszewski, qui ne pouvait servir aucunement de définition du con-

[1]) Continu qui ne contient aucun vrai sous-continu unissant ces points.

[2]) Un continu est dit indécomposable s'il n'est pas somme de deux continus différents de lui.

tinu en question, ne parut pendant une dizaine d'années aucune démonstration de l'existence des continus jouissant de cette propriété paradoxale. Le problème fut résolu définitivement par M. Knaster qui dans sa Thèse (Fund. Math. 3, 1922) donna la définition d'un continu plus paradoxal encore: d'un continu qui ne contient que des sous-continus indécomposables (continu nommé „héréditairement indécomposable").

Mazurkiewicz établit le théorème de M. Knaster d'une façon excessivement simple et ingénieuse (N⁰ 67). Au lieu de définir un continu héréditairement indécomposable bien déterminé, il envisage l'espace E de tous les sous-continus du cercle $x^2+y^2 \leqslant 1$ (cet espace étant métrisé par la distance de Hausdorff) et, dans l'espace E, l'ensemble A des continus qui ne sont pas héréditairement indécomposables; il montre que A est de I-e catégorie dans E, donc $A \neq E$ en vertu d'un théorème de Baire (appliqué à l'espace E compact). Ce procédé donne non seulement la démonstration de l'existence des continus héréditairement indécomposables, mais il met en lumière un fait très instructif et pas moins paradoxal: les continus héréditairement indécomposables, qui pouvaient paraître exceptionnels, sont les continus les plus fréquents parmi tous les continus plans; tous les autres sont des exceptions!

La méthode esquissée ci-dessus, nommée *méthode de catégorie*, s'est montrée extrèmement avantageuse dans maints problèmes d'existence en Topologie et en Analyse. Mazurkiewicz a été l'un des premiers à s'en servir. C'est à l'aide de cette méthode qu'il démontre (en précisant un résultat de MM. Hardy et Littlewood) l'existence d'une fonction continue et périodique $f(x)$ telle que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,dt$$

diverge pour tout x; l'ensemble de toutes les fonctions qui ne jouissent pas de cette propriété étant — comme le prouve Mazurkiewicz (N⁰ 79) — de I-e catégorie dans l'espace fonctionnel.

Par la même méthode peut être démontrée aussi l'existence d'une fonction continue dépourvue de dérivée en chaque point (N⁰ 78) [1].

[1]) Dans le même ordre d'idées, voir une note de Banach, Studia Math. **3** (1931), p. 174.

Dans un ordre d'idées analogue, Mazurkiewicz a obtenu le résultat remarquable suivant. M. Sierpiński a défini un continu S, non dense sur le plan, qui contient une image homéomorphe de tout autre sous-continu non dense du plan. Or Mazurkiewicz démontre que, dans l'espace $(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{J}}$ des transformations continues de l'intervalle $\mathcal{J}=01$ en sous-ensembles du plan, pour toutes les fonctions f — abstraction faite d'un ensemble de I-e catégorie — l'ensemble $f(\mathcal{J})$ est homéomorphe à S; en d'autres termes: en transformant l'intervalle 01 en un sous-ensemble du plan, on obtient „le plus souvent" une courbe homéomorphe à la courbe S (N⁰ 108 et 125).

La méthode de catégorie n'est qu'un chapitre de l'étude des „*hyper-espaces*", tels que l'espace fonctionnel $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, l'espace $2^{\mathcal{X}}$ des sous-ensembles fermés de $\mathcal{X}$, l'espace des sous-continus de $\mathcal{X}$. L'étude de l'espace $2^{\mathcal{X}}$ fait objet de plusieurs travaux publiés par Mazurkiewicz seul ou en collaboration avec M. Borsuk. Dans l'étude de l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, Mazurkiewicz s'occupe, entre autres, des problèmes liés à *la théorie des ensembles projectifs*. Il prouve (N⁰ 115) que dans l'espace $\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$ (espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle 01), les fonctions différentiables constituent un ensemble non borelien projectif (de classe CA); dans l'espace $\mathcal{E}^{(\mathcal{J}^2)}$, les fonctions $f(x,y)$ qui admettent pour un y (au moins) et pour tous les x la dérivée partielle $f_x(x,y)$ constituent un ensemble précisément de classe projective PCA (N⁰ 119). Ces théorèmes montrent que, dans les espaces fonctionnels, les exemples d'ensembles projectifs non boreliens (ou d'ensembles qui sont précisément d'une classe projective donnée) s'imposent d'une façon très naturelle, tandis que dans l'espace des nombres réels les exemples d'ensembles non boreliens s'obtiennent de façon plus ou moins artificielle [1]).

Les résultats de Mazurkiewicz dont il a été question jusqu'ici appartiennent aux domaines des mathématiques qui sont l'objet des Fundamenta. Son oeuvre scientifique dépasse largement ces limites: il enrichit de ses résultats l'Analyse, le Calcul des Probabilités, même la Mécanique classique (N⁰ 52) [2]).

[1]) Un fait analogue a été observé antérieurement par M. Hurewicz dans l'hyper-espace $2^{\mathcal{J}}$; là aussi des ensembles très simples sont non borieliens. Voir Fund. Math. **15** (1930), p. 4.

[2]) Je dois à M. Marczewski les lignes qui suivent sur les travaux de Mazurkiewicz dans le domaine de la Théorie des fonctions et de la Théorie des Probabilités.

Les travaux de Mazurkiewicz dans le domaine de *variable complexe* ont un caractère très varié. Il y en a de caractère purement analytique (tel que son travail sur les fonctions entières, N⁰ 117), il y en a d'autres qui se rattachent par leur sujet à la Topologie et qui font intervenir de nombreux théorèmes topologiques (telle est par exemple sa note sur l'approximation des transformations des dendrites par les polynômes, N⁰ 80; telles sont aussi ses recherches sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction analytique, N⁰ 74).

A côté des travaux contenant des théorèmes nouveaux, on en trouve qui contiennent des démonstrations nouvelles, remarquables par leur simplicité. Telles sont ses notes sur le théorème classique de Rouché (N⁰116), ainsi que sur les théorèmes de Pal et de Fekete sur l'existence d'une série qui approche d'une certaine façon toute fonction continue dans l'intervalle 01 (N⁰ 123).

La méthode „de catégorie" dont nous avons déjà parlé, a été appliquée par Mazurkiewicz avec grand succès à la Théorie des fonctions analytiques. C'est ainsi qu'il démontre (N⁰ 120) que, dans l'espace des fonctions holomorphes f définies sur un domaine simplement connexe, pour toute fonction f — abstraction faite d'un ensemble de I-e catégorie — chaque série de Taylor de f est ultraconvergente dans ce domaine. Guidés par les idées de Mazurkiewicz, ses élèves — en particulier Kierst et Szpilrajn-Marczewski — sont parvenus à d'autres résultats remarquables concernant les fonctions analytiques, toujours par la même méthode de catégorie [1]).

De nombreux problèmes sur la Théorie des fonctions sont traités par Mazurkiewicz comme problèmes sur des espaces fonctionnels. Ce procédé exige l'introduction d'une métrique conforme au problème considéré. Comme en Topologie, Mazurkiewicz invente en Théorie des fonctions analytiques des métriques très remarquables; c'est ainsi par exemple qu'il considère l'espace des fonctions méromorphes comme le „carré cartésien" de l'espace des fonctions holomorphes (N⁰ 118).

Dans le *Calcul des Probabilités*, Mazurkiewicz s'intéresse tout d'abord à la loi des grands nombres. Dans un travail publié en polonais et presque inconnu à l'étranger (N⁰ 41), il parvint indépendamment de Cantelli à formuler et à établir le théorème connu sous le nom de la loi forte des grands nombres.

[1]) Cf. Fund. Math. **21** (1933), p. 276.

A partir de 1932 Mazurkiewicz publie plusieurs travaux sur les fondements du Calcul des Probabilités; il esquisse plusieurs méthodes de traiter ce calcul d'une manière axiomatique ou bien de le baser sur la théorie de mesure dans l'Algèbre de Boole ou de le rattacher à la théorie des systèmes déductifs de la Logique mathématique (NN⁰ 91, 102, 105). Dans l'un de ses derniers manuscrits (N⁰129), il démontre que l'espace des variables aléatoires pour le jeu de pile et face peut être complété à un espace séparable „universel" des variables aléatoires; la méthode dont il se sert est une modification de la méthode bien connue de Cantor-Méray dans la théorie des nombres irrationnels; méthode dont il s'est servi avec succès à plusieurs autres occasions.

Toutes ses recherches sur le Calcul des Probabilités Mazurkiewicz a réuni et a développé systématiquement dans son grand traité, que nous avons déjà mentionné (N⁰130). Malheureusement, la majeure partie de cette oeuvre a été perdue pour la science.

La liste des résultats de Mazurkiewicz que nous avons cités est loin d'être complète. Comme nous l'avons indiqué auparavant, une partie considérable de l'oeuvre scientifique de Mazurkiewicz se compose de solutions des problèmes posés par d'autres auteurs et qui appartiennent à des différents domaines de Mathématiques.

Citons-en un qui paraît surtout remarquable. D'après un théorème de M. Sierpiński, aucun continu ne peut être représenté en somme d'une suite infinie d'ensembles fermés et disjoints. D'autre part, le même Auteur a défini dans l'espace euclidien à 3 dimensions un ensemble connexe, fermé, non borné (un „continu non borné" d'après la terminologie d'alors) qui se laisse décomposer en une suite infinie d'ensembles connexes, fermés et disjoints. Le même problème pour le cas du plan a été posé dans le vol. II des Fundamenta (problème 13).

Ce problème — très profond et difficile — fut résolu complètement par Mazurkiewicz. Voici sa solution: il existe sur le plan un ensemble connexe, fermé et décomposable en une suite d'ensembles fermés et disjoints; d'autre part, il n'existe sur le plan aucun ensemble connexe et fermé qui soit décomposable en une suite infinie d'ensembles connexes, fermés et disjoints (N⁰ 47) [1]).

[1]) Le deux ème théorème a été établi indépendamment par M. R. L. Moore, Fund. Math. **6** (1924), p. 189.

Liste des travaux scientifiques de Stefan Mazurkiewicz.

1910.

1. Sur la théorie des ensembles, C. R. — Paris **151**, p. 296-298.

1912.

2. Démonstration de la dénombrabilité des valeurs extrémales d'une fonction, C. R. — Varsovie[1]) **5**.

1913.

3. Contribution à la théorie des ensembles, Bull. Acad. Pol., p. 46-55.
4. Sur l'arithmétisation du continu, C. R. — Varsovie **6**, p. 306-310.
5. Sur l'arithmétisation des continus II, C. R. — Varsovie **6**, p. 941-945.
6. Sur l'inversion des fonctions de première classe, Wektor **3**, p. 206-208.

1914.

7. (et W. Sierpiński) Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties, C. R. — Paris **158**, p. 618-619.
8. Sur les séries infinies de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n$. Wektor **4**, 212-214.

1915.

9. Teoria prawdopodobieństwa (Théorie des probabilités), Poradnik dla Samouków 1), p. 426-448.
10. Sur un ensemble plan, C. R. — Varsovie **7**, p. 382-383.
11. Sur la sommabilité des séries de la forme $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n u_n$, C. R. — Varsovie **8**, p. 649-654.
12. Sur le déterminant de Fredholm. I. Les noyaux qui remplissent une condition de Hölder, C. R. — Varsovie **8**, p. 655-661.
13. Sur le déterminant de Fredholm. II. Les noyaux dérivables, C. R. — Varsovie **8**, p. 805-810.
14. Sur les points multiples des courbes qui remplissent une aire plane, Prace M.-F.[2]) **26**, p. 113-120.
15. Sur la relation entre l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{\Delta^3 f(x)}{\Delta x^3}$ et la continuité de la fonction $f(x)$, Prace M.-F. **26**, p. 215-217.
16. Contribution à la théorie des erreurs, Wektor **5**, p. 1-6.

1916.

17. Sur un ensemble fermé, ponctiforme, qui rencontre toute droite passant par un certain domaine, Prace M.-F. **27**, p. 1-10.
18. Sur une fonction dérivable qui admet un ensemble partout dense de traits d'invariabilité, Prace M.-F. **27**, p. 87-91.

[1]) Abréviation pour: Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie.

[2]) Abréviation pour: Prace Matematyczno-Fizyczne.

19. Sur la relation entre l'existence de la limite $\lim\limits_{\Delta x=0} \left(\dfrac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=x_0}$ et la continuité de la fonction $f(x)$, Prace M.-F. **27**, p. 195-201.
20. Sur une classification des points situés sur un continu arbitraire, C. R. — Varsovie **9**, p. 428-441.

1917.

21. Sur un ensemble remarquable, Wektor **6**, p. 41-57.
22. Sur un ensemble fermé ponctiforme, Wektor **6**, p. 108-114.
23. Sur la dérivée première généralisée, Prace M.-F. **28**, p. 79-85.
24. Sur les séries de puissances et les séries trigonométriques non sommables, Prace M.-F. **28**, p. 109-118.
25. Sur les fonctions de classe 1. C. R. — Varsovie **10**, p. 977-982.

1918.

26. Teoria zbiorów G_δ (Théorie des ensembles G_δ), Wektor **7**, p. 1-57.

1919.

27. O pewnym uogólnieniu prawa wielkich liczb (Sur une généralisation de la loi des grands nombres), Wiadomości Matematyczne **22**, p. 69-82.
28. Nouvelle démonstration du théorème sur l'existence des continus irréductibles, Bull. Acad. Pol., p. 44-46.
29. O związku między istnieniem drugiej pochodnej uogólnionej a ciągłością funkcji (Sur les rapports entre l'existence de la II-ème dérivée généralisée et la continuité d'une fonction), Prace M.-F. **30**, p. 225-242.
30. Studya teratologiczne z teoryi mnogości. I. O pewnym łuku prostym (Etudes tératologiques sur la théorie des ensembles. I. Sur un arc simple), Prace M.-F. **30**, p. 139-161.

1920.

31. (et W. Sierpiński) Contribution à la topologie des ensembles dénombrables, Fund. Math. **1**, p. 17-27.
32. Un théorème sur les continus indécomposables, Fund. Math. **1**, p. 35-39.
33. Sur un ensemble G_δ ponctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire, Fund. Math. **1**, p. 61-81.
34. Sur les lignes de Jordan, Fund. Math. **1**, p. 166-209.

1921.

35. Sur la décomposition d'un segment en une infinité d'ensembles non mesurables superposables deux à deux, Fund. Math. **2**, p. 8-14.
36. Sur les fonctions de classe 1, Fund. Math. **2**, p. 28-36.
37. Sur l'existence d'un ensemble plan connexe ne contenant aucun sous-ensemble connexe, borné, Fund. Math. **2**, p. 96-103.
38. Sur l'invariance de la notion d'ensemble $F_{\sigma\delta}$, Fund. Math. **2**, p. 104-111.
39. Un théorème sur les lignes de Jordan, Fund. Math. **2**, p. 119-130.
40. Sur les ensembles quasi-connexes, Fund. Math. **2**, p. 201-205.

1922.

41. O pewnej nowej formie uogólnienia twierdzenia Bernouilli'ego (Sur une nouvelle généralisation du théorème de Bernouilli). Wiadomości Aktuarjalne **1**, p. 1-8.

42. Extension du théorème de Phragmén-Brouwer aux ensembles non bornés, Fund. Math. **3**, p. 20-25.
43. Sur les séries de puissances, Fund. Math. **3**, p. 52-58.
44. Sur la décomposition d'un domaine en deux sous-ensembles ponctiformes, Fund. Math. **3**, p. 65-75.

1923.

45. Teoria mnogości w stosunku do innych działów matematyki (La théorie des ensembles et son rapport aux autres domaines des mathématiques), Poradnik dla Samouków **3**, p. 89-98.

1924.

46. Sur les continus homogènes, Fund. Math. **5**, p. 137-146.
47. Sur les continus plans non bornés, Fund. Math. **5**, p. 188-205.
48. Remarque sur un théorème de M. Mullikin, Fund. Math. **6**, p. 37-38.
49. (et W. Sierpiński) Sur un problème concernant les fonctions continues, Fund. Math. **6**, p. 161-169.

1925.

50. Sur les fonctions qui satisfont à une condition de Lipschitz généralisée, Rend. Accad. d. Lincei (6) **2**, p. 108-111.

1926.

51. (et S. Saks) Sur les projections d'un ensemble fermé, Fund. Math. **8**, p. 109-113.
52. Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten Math. Zeitschr. **25**, p. 749-753.

1927.

53. (et S. Straszewicz) Sur les courpures de l'espace, Fund. Math. **9**, p. 205-211.
54. Sur un propriété des ensembles $C(A)$, Fund. Math. **10**, p. 172-174.
55. Sur les continus indécomposables, Fund. Math. **10**, p. 305-310.
56. Sur les problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn, Fund. Math. **10**, p. 311-319.

1928.

57. (et C. Kuratowski) Sur les points d'ordre $\mathfrak{c}$ dans les continus, Fund. Math. **11**, p. 29-34.
58. Sur la dérivée première généralisée, Fund. Math. **11**, p. 145-147.
59. Sur un problème de M. Menger, Fund. Math. **12**, p. 111-117.

1929.

60. Sur un problème de M. Knaster, Fund. Math. **13**, p. 146-151.
61. Sur les ensembles de dimension faible, Fund. Math. **13**, p. 210-217.
62. Sur les points accessibiles de continus indécomposables, **14**, p. 107-115.
63. (und B. Knaster und C. Kuratowski) Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, Fund. Math. **14**, p. 132-137.
64. Un théorème sur l'accessibilité des continus indécomposables, Fund. Math. **14**, p. 271-276.
65. Analiza matematyczna (Analyse mathématique), cours litographié (rédigé par B. Iwaszkiewicz), t. 1 (1929), p. IV, 616 et t. 2 (1930), p. VI, 852.

1930.

66. Sur les points d'ordre $\mathfrak{c}$ dans les continus, Fund. Math. **15**, p. 222-227.
67. Sur les continus absolument indécomposables, Fund. Math. **16**, p. 151-159.
68. Sur les courbes d'ordre $\mathfrak{c}$, Fund. Math. **16**, p. 337-347.
69. Sur les fonctions qui satisfont à la condition (N), Fund. Math. **16**, p. 348-352.
70. Sur les ensembles de dimension faible, Atti Congr. Bologna **2**, p. 241.
71. Sur les images continues des continus, C. R. — Congr. Math. Pays Slaves 1930, p. 66-71.
72. Ein Satz über irreduzible Kontinua, Monatshefte für Mathematik und Physik **37**, p. 163-168.
73. Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionelles linéaires, Stud. Math. **2**, p. 67-91.

1931.

74. Sur les points singuliers d'une fonction analytique, Fund. Math. **17**, p. 26-29.
75. Sur l'ensemble des continus péaniens, Fund. Math. **17**, p. 273-274.
76. Sur les images continues des continus, Fund. Math. **17**, p. 330.
77. Sur un problème de M. Lusin, C. R. — Paris **192**, p. 1525-1527.
78. Sur les fonctions non dérivables, Stud. Math. **3**, p. 92-94.
79. Sur l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,dt$, Stud. Math. **3**, p. 114-118.
80. Über die Approximation stetiger Funktionen einer komplexen Veränderlichen durch Polynome, C. R. — Varsovie **23**, p. 136-142.
81. Sur le noyau n-dimensionel d'un espace métrique séparable, C. R. — Varsovie **22**, p. 51-58.
82. Sur les images continues des ensembles linéaires, C. R. — Varsovie **23**, p. 159-167.

1932.

83. Sur une classe de dendrites, Fund. Math. **18**, p. 88-89.
84. Sur les suites de fonctions continues, Fund. Math. **18**, p. 114-117.
85. Sur l'hyperespace d'un continu, Fund. Math. **18**, p. 171-177.
86. Sur les transformations intérieures, Fund. Math. **19**, p. 198-204.
87. Sur le type de dimension de l'hyperespace d'un continu, C. R. — Varsovie **24**, p. 190-192.
88. (et K. Borsuk) Sur l'hyperespace d'un continu, C. R. — Varsovie **24**, p. 149-152.

1933.

89. Sur les ensembles d'unicité, Bull. Acad. Pol., p. 18-20.
90. (et H. Szmuszkowiczówna) Sur les suites de polynômes, Bull. Acad. Pol., p. 131-136.
91. Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung, C. R. — Varsovie **25**, p. 1-4.
92. Über die dimensionnellen Komponenten, Fund. Math. **20**, p. 47-51.
93. Sur le type c de l'hyperespace d'un continu, Fund. Math. **20**, p. 52-53.
94. Ein Satz über dimensionnelle Komponenten, Fund. Math. **20**, p. 98-99.
95. Über nicht plättbare Kurven, Fund. Math. **20**, p. 281-284.
96. Sur la décomposition du plan en courbes, Fund. Math. **21**, p. 43-45.

97. Sur les ensembles de capacité nulle et les ensembles H, Fund. Math. **21**, p. 59-65.
98. (et B. Knaster) Sur un problème concernant les transformations continues, Fund. Math. **21**, p. 85-90.

1934.

99. Über total zusammenhagslose Mengen, Fund. Math. **22**, p. 267-269.
100. Sur les nombres dérivés, Fund. Math. **23**, p. 9-10.
101. Ein Zerlegungssatz, Fund. Math. **23**, p. 11-14.
102. Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Monatshefte für Math. **41**, p. 343-352.
103. Les moyennes translatives et la loi de Gauss, Bull. Acad. Pol., p. 1-8.
104. Sur un problème de M. Borsuk, C. R. — Varsovie **26**, p. 68-70.
105. Sur les principes de la théorie de probabilité, C. R. — Varsovie **26**, p. 105-107.
106. (et K. Borsuk) Sur les rétractes absolus indécomposables, C. R. — Paris **199**, p. 110-112.

1935.

107. Sur les espaces des continus péaniens, Fund. Math. **24**, p. 118-134.
108. Über die stetigen Abbildungen der Strecke, Fund. Math. **25**, p. 253-260.
109. Sur l'existence des continus indécomposables, Fund. Math. **25**, p. 327-328.
110. (et H. Szmuszkowiczówna) Sur les fonctions quasi-analytiques (B), Bull. Acad. Pol., p. 1-3.
111. (et K. Borsuk) Sur les rétractes absolus, C. R. 2-ème Congr. Math. Pays Slaves 175, Časopis Praha **64**, p. 175.

1936.

112. Über die Zerlegung kompakter Räume in zweipunktige Mengen, Fund. Math. **26**, p. 50-51.
113. Über erreichbare Punkte, Fund. Math. **26**, p. 150-155.
114. Über die Definition der Primenden, Fund. Math. **26**, p. 272-279.
115. Über die Menge der differenzierbaren Funktionen, Fund. Math. **27**, p. 2[illegible] 249.
116. Sur le théorème de Rouché, C. R. — Varsovie **28**, p. 78-79.
117. Sur le terme maximum d'une fonction entière, C. R. — Varsovie **29**, p. 1-6.
118. Sur une classe de fonctions méromorphes, C. R. — Varsovie **29**, p. 7-9.

1937.

119. Eine projektive Menge der Klasse PCA im Funktionalraum, Fund. Math. **28**, p. 7-10.
120. Ultraconvergence et espace fonctionnel, Fund. Math. **28**, p. 289-293.
121. (et E. Szpilrajn) Sur la dimension de certains ensembles singuliers, Fund. Math. **28**, p. 305-308.
122. (et H. Szmuszkowiczówna) Sur les zéros des fonctions quasi-analytiques (B), Bull. Acad. Pol., p. 1-6.
123. Sur l'approximation des fonctions continues d'une variable réelle par les sommes d'une série de puissances, C. R. — Varsovie **30**, p. 25-30.
124. Les fonctions quasi-analytiques dans l'espace fonctionnel, Mathematica **13**, p. 16-21.

1938.

125. Sur les transformations continues des courbes, Fund. Math. **31**, p. 247-258.

1945.

126. Recherches sur la théorie des bouts premiers, Fund. Math. **33**, p. 177-228.
127. Un théorème sur les fonctions caractéristiques, C. R. Acad. Pol. **46**, p. 160.
128. Un théorème sur les polynômes, Ann. Soc. Pol. **18**, p. 113-117.
129. Sur les espaces de variables aléatoires, à paraître.
130. Teoria prawdopodobieństwa (Théorie des probabilités), à paraître.