Théorème 6. *Si* $\overline{\overline{F(E)}}=\aleph_0$, *l'ensemble* E *est non mesurable* (au sens de Lebesgue).

Il résulte de l'égalité $\overline{\overline{F(E)}}=\overline{\overline{F(H)}}$ où H est la complémentaire de E, $E\neq 0$ et $H\neq 0$) qu'un ensemble linéaire non vide et distinct de la droite toute entière est singulier en même temps que son complémentaire. Il résulte donc du théorème 5 que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, aucun ensemble singulier distinct de la droite toute entière n'est de mesure nulle ni complémentaire d'un ensemble de mesure nulle; vu le théorème 3, il est donc non mesurable. On a donc:

Théorème 7. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *tout ensemble singulier, distinct de la droite toute entière est non mesurable* (au sens de Lebesgue).

Le théorème 7 peut être aussi déduit immédiatement des théorèmes 1 et 6. En effet, d'après le théorème 1, si E est un ensemble linéaire distinct de la droite toute entière, on a $\overline{\overline{F(E)}}\geqslant\aleph_0$ et, d'après la définition de l'ensemble singulier on a $\overline{\overline{F(E)}}<2^{\aleph_0}$, donc, si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, on a $\overline{\overline{F(E)}}\leqslant\aleph_0$. On a donc $\aleph_0\leqslant\overline{\overline{F(E)}}\leqslant\aleph_0$, d'où $\overline{\overline{F(E)}}=\aleph_0$ et, d'après le théorème 6 l'ensemble E est non mesurable, c. q. f. d.

Remarque. On voit sans peine que dans les théorèmes 5 et 7 l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$) peut être remplacée par l'hypothèse (peut être plus faible) que la droite n'est pas somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles de mesure nulle.

E étant un ensemble linéaire, désignons par E^* l'ensemble de tous les nombres $-x$, où $x\in E$. Désignons par $\Phi(E)$ la famille de tous les ensembles linéaires distincts congruents à E, c. à d. superposables avec E par translation ou rotation. On voit aisément que $\Phi(E)=F(E)+F(E^*)$ et que $\overline{\overline{F(E^*)}}=\overline{\overline{F(E)}}$; on a donc $\overline{\overline{F(E)}}\leqslant\overline{\overline{\Phi(E)}}\leqslant 2\cdot\overline{\overline{F(E)}}$ et il en résulte (à l'aide de l'axiome du choix) que si la famille $F(E)$ est infinie, on a $\overline{\overline{\Phi(E)}}=\overline{\overline{F(E)}}$. On voit donc que tous nos théorèmes restent vrais si au lieu des translations des ensembles (linéaires), on envisage les translations ou rotations (c. à d. si l'on remplace la famille $F(E)$ par $\Phi(E)$).

Sur un problème de la théorie générale des ensembles équivalent au problème de Souslin.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Il y a 30 ans Michel Souslin a posé le problème non résolu jusqu'ici et qui peut être énoncé comme il suit:

Problème *S. Un ensemble* H *ordonné linéairement, dense et tel que toute famille d'intervalles de* H *n'empiétant pas les uns sur les autres est au plus dénombrable, contient-il nécessairement un sous-ensemble au plus dénombrable dense dans* H? [1])

Le but de cette Note est de démontrer que le problème de Souslin équivaut au problème suivant de la théorie générale des ensembles:

Problème *P. Soit* F *une famille infinie d'ensembles jouissant de trois propriétés suivantes:*

1°. X *et* Y *étant deux ensembles de la famille* F, *on a ou bien* $X\subset Y$, *ou bien* $Y\subset X$, *ou bien* $XY=0$.

2°. *Chaque sous-famille de* F *formée d'ensembles disjoints est au plus dénombrable.*

3°. *Chaque sous-famille* F_1 *de* F *telle que, dans chaque couple de ses éléments, il existe un élément qui est contenu dans l'autre, est au plus dénombrable et a un ensemble maximal* (c. à d. contenant tous les autres ensembles de F_1).

La famille F *est-elle nécessairement dénombrable?*

Je démontrerai que *la réponse positive au problème* P *entraîne la réponse positive au problème* S *et inversement.*

---

[1]) Le problème de Souslin a été publié pour la première fois dans le vol. I des Fund. Math., p. 223, problème 3. Pour la littérature concernant ce problème, voir A. Denjoy, *L'énumération transfinie*, Livre I, Paris 1946, pp. XXVII-XXVIII.

I. Admettons que la réponse au problème S soit négative. Il existe donc un ensemble H ordonné linéairement, dense, ne contenant aucun sous-ensemble au plus dénombrable dense dans H, et tel que toute famille d'intervalles de H n'empiétant pas les uns sur les autres est au plus dénombrable.

Nous pouvons supposer en outre que l'ensemble H n'ait pas de dernier élément.

L'ensemble ordonné H ne contenant aucun sous-ensemble au plus dénombrable dense dans H, il existe pour tout sous-ensemble au plus dénombrable D de H deux éléments p et q de H, tels que $p \prec q$ (dans H) et que l'intervalle fermé (p,q) (c. à d. les extrémités p et q étant incluses) ne contient aucun élément de D. On définit ainsi par l'induction transfinie une suite transfinie d'intervalles (p_ξ, q_ξ), où $\xi<\Omega$, telle que pour tout $\alpha<\Omega$ l'intervalle fermé (p_α, q_α) ne contient aucun élément p_ξ ni q_ξ pour $\xi<\alpha$.

Désignons, pour $\alpha<\Omega$, par E_α l'ensemble formé de tous les éléments de H appartenant à l'intervalle fermé (p_α, q_α). Soit F la famille de tous les ensembles E_α, où $\alpha<\Omega$. Vu que $p_\alpha \neq p_\beta$ pour $\alpha<\Omega$, $\beta<\Omega$, $\alpha\neq\beta$, on conclut que les ensembles E_α $(\alpha<\Omega)$ sont tous distincts. La famille F est donc indénombrable.

Si $\beta<\alpha<\Omega$, les éléments p_β et q_β ne sont pas contenus dans l'intervalle fermé (p_α, q_α) (vu la définition de cet intervalle). Il en résulte tout de suite que ou bien on a $p_\beta \prec p_\alpha \prec q_\alpha \prec q_\beta$, donc $E_\alpha \subset E_\beta$, ou bien les intervalles fermés (p_α, q_α) et (p_β, q_β) sont disjoints, donc $E_\alpha E_\beta = 0$. La famille F jouit donc de la propriété 1°.

En tenant compte de la propriété de H et du fait que les ensembles de la famille F sont des intervalles de H, on conclut immédiatement que la famille F jouit de la propriété 2°.

Si l'on a pour deux ensembles distincts E_α et E_β de F: $E_\beta \subset E_\alpha$, l'intervalle fermé (p_β, q_β) est contenu à l'intérieur de l'intervalle (p_α, q_α) et on a $p_\alpha \prec p_\beta$. Il en résulte que, si Φ est une sous-famille de F telle que la condition $X, Y \in \Phi$ entraîne soit $X \subset Y$, soit $Y \subset X$, les éléments de Φ ordonnés d'après leur grandeur croissante forment un ensemble semblable à l'ensemble de leurs extrémités gauches ordonnées d'après leur ordre dans H. Vu que toute famille d'intervalles de H n'empiétant pas les uns sur les autres est au plus dénombrable, il en résulte que la famille Φ est au plus dénombrable et a un ensemble maximal. La famille F jouit ainsi de la propriété 3°.

La famille F est donc indénombrable et jouit des propriétés 1°, 2° et 3°, ce qui prouve que la réponse au problème P est négative.

Nous avons ainsi démontré que la réponse positive au problème P entraîne la réponse positive au problème S.

II. Admettons que la réponse au problème P soit négative. Il existe donc une famille indénombrable F d'ensembles jouissant des propriétés 1°, 2° et 3°. Nous pouvons évidemment supposer que les ensembles de la famille F soient non vides.

Soit E un ensemble de la famille F, Φ — la famille de tous les ensembles de F contenant E (on a donc $E \in \Phi$). X et Y étant deux ensembles de la famille Φ, on a $E \subset XY$, donc $XY \neq 0$, par conséquent, d'après 1°, ou bien $X \subset Y$, ou bien $Y \subset X$. Il en résulte d'après 3° que la famille Φ a un ensemble maximal qui est évidemment le plus grand ensemble de la famille F contenant E.

Tout ensemble de F est donc contenu dans un ensemble de F qui n'est pas contenu dans aucun autre ensemble de F.

Tous les ensembles de F qui ne sont pas contenus dans aucun autre ensemble de F sont évidemment, d'après 1°, disjoints et, d'après 2°, leur ensemble est au plus dénombrable. Désignons-les par

$$E_0, E_1, E_2, \ldots: \tag{1}$$

La suite (1) est donc finie ou infinie (dénombrable).

Si E est un ensemble de F autre que chacun des ensembles (1), E est, comme nous le savons, contenu dans un et (évidemment) un seul ensemble de la suite (1).

Or, E étant un ensemble de F qui est un vrai sous-ensemble d'un ensemble H de F, on démontre sans peine, comme ci-dessus qu'il existe un vrai sous-ensemble maximal de H contenant E.

S'il existe pour un entier $k \geqslant 0$ des ensembles de F autres que E_k et contenus dans E_k, il existe donc parmi eux des ensembles qui ne sont pas contenus dans aucun autre ensemble de F autre que E_k et contenu dans E_k, et on voit sans peine que de tels ensembles sont disjoints et forment une suite finie ou dénombrable, que nous désignerons par

$$E_{k,0}, E_{k,1}, E_{k,2}, \ldots$$

Pareillement on obtient les ensembles $E_{k,l,0}, E_{k,l,1}, \ldots$ et, généralement les ensembles

$$E_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ est une suite finie d'entiers $\geqslant 0$. Naturellement pas tous ces ensembles doivent exister, mais s'il existe l'ensemble $E_{l_1,l_2,\ldots,l_n}$, il existe nécessairement tous les ensembles $E_{l_1,l_2,\ldots,l_i}$, où $i=1,2,\ldots,n$, ainsi que tous les ensembles $E_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$, où $0 \leqslant k_j \leqslant l_j$ pour $j=1,2,\ldots,n$.

Soit $k_1, k_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers $\geqslant 0$ tels que chacun des ensembles $E_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$, où $n=1,2,\ldots$, existe. S'il existe des ensembles de F contenus dans chacun de ces ensembles, on démontre sans peine (comme ci-dessus) qu'il existe parmi eux des ensembles qui ne sont pas contenus dans aucun autre ensemble contenu dans $E_{k_1} \cdot E_{k_1,k_2} \cdot E_{k_1,k_2,k_3} \cdot \ldots$) et que de tels ensembles sont disjoints et forment une suite finie ou dénombrable, que nous désignerons par

$$E_{k_1,k_2,\ldots,k_l,\ldots,0}, E_{k_1,k_2,\ldots,k_l,\ldots,1}, \ldots, E_{k_1,k_2,\ldots,k_l,\ldots,k_\omega}, \ldots$$

α étant un nombre ordinal $<\Omega$, on arrive ainsi aux ensembles

$$E_{\{k_\xi\}_{\xi<\alpha}} \tag{2}$$

que nous appellerons ensembles d'ordre α.

Si l'ensemble (2) existe, on a évidemment

$$E_{\{k_\xi\}_{\xi<\alpha}} \subset E_{\{k_\xi\}_{\xi<\eta}} \quad \text{pour} \quad \eta<\alpha, \tag{3}$$

et on voit sans peine que s'il existe plusieurs ensembles d'ordre α, ils sont disjoints. Vu la propriété 2° et vu que $\overline{\alpha} \leqslant \aleph_0$ pour $\alpha<\Omega$, il en résulte que l'ensemble de tous les ensembles d'ordre $\leqslant\alpha$, où α est un nombre ordinal donné $<\Omega$, est au plus dénombrable.

Soit α un nombre ordinal donné $<\Omega$ et E un ensemble de la famille F autre que chacun des ensembles d'ordre $\leqslant\alpha$. Je dis qu'alors E est contenu dans un (et évidemment un seul) ensemble d'ordre α.

Cela est évident pour $\alpha=1$. Soit α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\Omega$, et admettons que cela soit vrai pour tout nombre ordinal $\eta<\alpha$. Si E est un ensemble de la famille F autre que chacun des ensembles d'ordre $\leqslant\alpha$, donc, à plus forte raison, autre que chacun des ensembles d'ordre $\leqslant\eta$ pour $\eta<\alpha$, il existe, d'après notre hypothèse, pour tout nombre ordinal $\eta<\alpha$ un ensemble d'ordre η, soit $E_{\{k_\xi\}_{\xi<\eta}}$, tel que

$$E \subset E_{\{k_\xi^{(\eta)}\}_{\xi<\eta}}.$$

On a donc

$$E \subset E_{\{k_\xi^{(\eta)}\}_{\xi<\eta}} \cdot E_{\{k_\xi^{(\zeta)}\}_{\xi<\zeta}} \quad \text{pour} \quad \eta<\zeta<\alpha$$

et, d'après (3) et vu que $E \neq 0$ et que les ensembles d'ordre η sont disjoints, on trouve

$$k_\xi^{(\eta)} = k_\xi^{(\zeta)} \quad \text{pour} \quad \xi \leqslant \eta, \ \eta<\zeta<\alpha.$$

En posant $k_\xi = k_\xi^{(\xi)}$ pour $\xi<\alpha$, nous aurons donc

$$E \subset E_{\{k_\xi\}_{\xi<\eta}} \quad \text{pour} \quad \eta<\alpha.$$

Tenant compte de la définition des ensembles $E_{\{k_\xi\}_{\xi<\alpha}}$, on en conclut que E est contenu dans un des ensembles d'ordre α. Notre assertion se trouve ainsi démontrée par l'induction transfinie.

Admettons maintenant qu'il existe un ensemble E de la famille F qui est autre que chacun des ensembles $E_{\{k_\xi\}_{\xi<\alpha}}$ quel que soit leur ordre $\alpha<\Omega$. L'ensemble E est donc pour tout $\alpha<\Omega$ contenu dans un ensemble d'ordre α et, on en conclut comme ci-dessus qu'il existe une suite transfinie d'entiers $\geqslant 0$, $\{k_\xi\}_{\xi<\Omega}$, telle que

$$E \subset E_{\{k_\xi\}_{\xi<\alpha}} \quad \text{pour tout} \quad \alpha<\Omega.$$

Or, les ensembles $E_{\{k_\xi\}_{\xi<\alpha}}$, où $\alpha<\Omega$, étant, comme nous le savons, tous distincts, cela contredit la propriété 3° de la famille F.

Il n'existe donc pas d'autres ensembles de la famille F que les ensembles $E_{\{k_\xi\}_{\xi<\alpha}}$.

S'il n'existait pour un nombre ordinal donné $\alpha<\Omega$ aucun ensemble d'ordre $>\alpha$, la famille F serait dénombrable, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc, pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ des ensembles d'ordre $>\alpha$ et, l'existence d'un ensemble $E_{\{k_\xi\}_{\xi<\beta}}$ entraînant l'existence de tous les ensembles $E_{\{k_\xi\}_{\xi<\alpha}}$, où $\alpha<\beta$, il en résulte sans peine qu'il existe des ensembles d'un ordre quelconque $<\Omega$.

Je dis qu'il existe pour tout nombre ordinal $\lambda<\Omega$ des ensembles (2) où $\lambda<\alpha<\Omega$ et $k_\alpha \neq 0$.

En effet, supposons que pour un nombre ordinal $\lambda<\Omega$ de tels ensembles (2) n'existent pas. Quel que soit l'ensemble (2) d'ordre $\alpha>\lambda$, on aurait donc $k_\alpha=0$, et aussi $k_\xi=0$ pour $\lambda<\xi<\alpha$

(puisque l'existence d'un ensemble (2) entraîne celle de tous les ensembles $E_{\{k_\xi\}_{\xi\leqslant\eta}}$, où $\eta<\alpha$). Pour tout ensemble $E_{\{l_\xi\}_{\xi\leqslant\lambda}}$ d'ordre λ les ensembles (2) d'ordre $>\lambda$, tels que $k_\xi=l_\xi$ pour $\xi\leqslant\lambda$, formeraient une famille finie ou transfinie descendante d'ensembles, au plus dénombrable d'après la propriété 3°. Cela étant vrai pour tout ensemble d'ordre λ et l'ensemble de tous les ensembles d'ordre λ étant, comme nous le savons, au plus dénombrable, il en résulterait que la famille F est au plus dénombrable, contrairement à l'hypothèse. Notre assertion est ainsi démontrée.

Il existe donc une infinité indénombrable d'ensembles (2) tels que $k_\alpha\neq 0$. L'ensemble de tous les ensembles d'ordre α étant au plus dénombrable et tout ensemble d'ordre $\beta>\alpha$ étant contenu dans un ensemble d'ordre α, il en résulte qu'il existe pour tout $\alpha<\Omega$ un ensemble d'ordre α, (2), tel qu'il existe une infinité indénombrable d'ensembles $E_{\{l_\xi\}_{\xi\leqslant\beta}}$, où $\alpha<\beta<\Omega$, $l_\xi=k_\xi$ pour $\xi\leqslant\alpha$ et $l_\beta\neq 0$.

Soit maintenant H l'ensemble de toutes les suites transfinies du type Ω des entiers $\geqslant 0$

$$\{k_\xi\}_{\xi<\Omega} \tag{4}$$

tels qu'il existe un nombre ordinal $\alpha<\Omega$ pour lequel $k_\alpha\neq 0$, $k_\xi=0$ pour $\alpha<\xi<\Omega$ et que (2) est un ensemble de la famille F. D'après ce que nous venons de démontrer, l'ensemble H est indénombrable.

Ordonnons les suites transfinies formant l'ensemble H d'après le principe de premières différences, c. à d. $x=\{k_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $y=\{l_\xi\}_{\xi<\Omega}$ étant deux éléments de H, nous conviendrons que $x\prec y$ dans ce cas et seulement dans ce cas, s'il existe un nombre ordinal $\mu<\Omega$, tel que $k_\xi=l_\xi$ pour $\xi<\mu$ et $k_\mu<l_\mu$. On voit sans peine que, si x et y sont deux éléments distincts de H, il existe toujours un nombre ordinal $\mu<\Omega$ qui soit le plus petit nombre tel que $k_\mu\neq l_\mu$, et on a alors $k_\xi=l_\xi$ pour $\xi<\mu$ et $k_\mu<l_\mu$ ou bien $l_\mu<k_\mu$; nous désignerons un nombre μ de ce genre par $[x,y]$.

Comme $x\in H$ et $y\in H$, il existe des nombres ordinaux $\alpha<\Omega$ et $\beta<\Omega$, tels que $k_\alpha\neq 0$, $k_\xi=0$ pour $\alpha<\xi<\Omega$, $l_\beta\neq 0$, $l_\xi=0$ pour $\beta<\xi<\Omega$.

Si $\mu=[x,y]\leqslant\alpha$, posons $Q(x,y)=E_{\{k_\xi\}_{\xi\leqslant\alpha}}$ et si $\mu>\alpha$, posons $Q(x,y)=E_{\{k_\xi\}_{\xi\leqslant\mu}}$. (L'ensemble $E_{\{k_\xi\}_{\xi\leqslant\mu}}$ existe, puisque l'ensemble $E_{\{l_\xi\}_{\xi\leqslant\mu}}$ existe, comme $l_\mu>k_\mu\geqslant 0$ et on a $x\prec y$). On a donc toujours

$$Q(x,y)=E_{\{k_\xi\}_{\xi\leqslant max(\alpha,\mu)}}.$$

Faisons correspondre à l'intervalle (x,y) de l'ensemble ordonné H l'ensemble $Q(x,y)$ de F ainsi défini.

Soient maintenant x_i $(i=1,2,3,4)$ quatre éléments de H, où

$$x_1\prec x_2\leqq x_3\prec x_4,$$
$$x_i=\{k_\xi^{(i)}\}_{\xi<\Omega} \quad \text{pour} \quad i=1,2,3,4,$$
$$k_{\alpha_i}^{(i)}\neq 0, \quad k_\xi^{(i)}=0 \quad \text{pour} \quad \alpha_i<\xi<\Omega \quad (i=1,2,3,4),$$
$$k'_\xi=k''_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\mu(=[x_1,x_2]), \quad k'_\mu<k''_\mu,$$
$$k_\xi^{(3)}=k_\xi^{(4)} \quad \text{pour} \quad \xi<\nu(=[x_3,x_4]), \quad k_\nu^{(3)}<k_\nu^{(4)}\ ^{2}).$$

On a

$$Q(x_1,x_2)=E_{\{k'_\xi\}_{\xi\leqslant max(\alpha_1,\mu)}}, \quad Q(x_3,x_4)=E_{\{k_\xi^{(3)}\}_{\xi\leqslant max(\alpha_3,\nu)}}$$

Distinguons deux cas.

1) $\max(\alpha_3,\nu)\geqslant\mu$. On a $x_1\prec x_3$; il existe donc un nombre ordinal λ tel que $k'_\xi=k_\xi^{(3)}$ pour $\xi<\lambda$ et $k'_\lambda<k_\lambda^{(3)}$ et, comme $x_1\prec x_2\leqq x_3$, l'inégalité $\lambda>\mu$ est en défaut; on a donc $\lambda\leqslant\mu$, d'où $\lambda\leqslant\max(\alpha_3,\nu)$ et les ensembles $E_{\{k'_\xi\}_{\xi\leqslant\lambda}}$ et $E_{\{k_\xi^{(3)}\}_{\xi\leqslant\lambda}}$ sont disjoints (puisque $k'_\lambda<k_\lambda^{(3)}$), et de même les ensembles $Q(x_1,x_2)$ et $Q(x_3,x_4)$ (puisque $\lambda\leqslant\mu\leqslant\max(\alpha_1,\mu)$ et $\lambda\leqslant\max(\alpha_3,\nu)$.

2) $\max(\alpha_3,\nu)>\mu$. En définissant le nombre ordinal λ comme dans le cas 1), on a $\lambda\leqslant\mu$, donc, d'après 2), $\lambda<\max(\alpha_3,\nu)$ et $\lambda\leqslant\mu\leqslant\max(\alpha_1,\mu)$. Les ensembles $Q(x_1,x_2)$ et $Q(x_3,x_4)$ sont donc disjoints.

Aux intervalles de l'ensemble ordonné H n'empiétant pas les uns sur les autres correspondent donc des ensembles disjoints de la famille F. Vu la propriété 2° de la famille F, on conclut que tout ensemble d'intervalles de H n'empiétant pas les uns sur les autres est au plus dénombrable.

Soit maintenant $x_n=\{k_\xi^{(n)}\}_{\xi<\Omega}$ $(n=1,2,\ldots)$ une suite infinie d'éléments de H. Il existe donc pour tout n naturel un nombre ordinal $\alpha_n<\Omega$ tel que $k_{\alpha_n}^{(n)}\neq 0$, $k_\xi^{(n)}=0$ pour $\alpha_n<\xi<\Omega$ et que

$$E_{\{k_\xi^{(n)}\}_{\xi\leqslant\alpha_n}}\in F.$$

Comme $\alpha_n<\Omega$ pour $n=1,2,\ldots$, il existe, comme on le sait, un nombre ordinal $\alpha<\Omega$, tel que $\alpha_n<\alpha$ pour $n=1,2,\ldots$ Or, comme nous avons démontré ci-dessus, il existe un ensemble d'ordre α, (2), tel qu'il existe une infinité indénombrable d'ensembles $E_{\{l_\xi\}_{\xi\leqslant\beta}}$,

[2]) J'écris ici k' et k'' au lieu de $k^{(1)}$ et $k^{(2)}$.

où $\alpha<\beta<\Omega$, $l_\xi=k_\xi$ pour $\xi\leqslant\alpha$ et $l_\beta\neq 0$. Soit donc $E_{\{l_\xi\}_{\xi\leqslant\beta}}$ un tel ensemble et $E_{\{m_\xi\}_{\xi<\gamma}}$ un autre, donc distinct de $E_{\{l_\xi\}_{\xi\leqslant\beta}}$ et tel que $\alpha<\gamma<\Omega$, $m_\xi=k_\xi$ pour $\xi\leqslant\alpha$ et $m_\gamma\neq 0$.

Les éléments de H, $y_1=\{l_\xi\}_{\xi<\Omega}$, où $l_\xi=0$ pour $\beta<\xi<\Omega$ et $y_2=\{m_\xi\}_{\xi<\Omega}$, où $m_\xi=0$ pour $\gamma<\xi<\Omega$ sont donc distincts, soit $y_1\prec y_2$. Posons encore $y_0=\{l'_\xi\}_{\xi<\Omega}$, où $l'_\xi=l_\xi$ pour $\xi<\beta$ et $l'_\xi=0$ pour $\beta\leqslant\xi<\Omega$. L'ensemble $E_{\{l'_\xi\}_{\xi\leqslant\beta}}$ existe (puisque l'ensemble $E_{\{l_\xi\}_{\xi\leqslant\beta}}$ existe); on a donc $y_0\in H$ et (vu que $l_\beta\neq 0$) on a $y_0\prec y_1\prec y_2$. Or, je dis qu'il n'existe aucun élément x_q de la suite $x_1,x_2,\ldots$, tel que $y_0\prec x_q\prec y_2$.

En effet, si l'on avait $y_0\prec x_q\prec y_2$, on aurait, comme on le voit sans peine, $k_\xi^{(q)}=k_\xi$ pour $\xi\leqslant\alpha$. Or $x_q\succ y_0=\{l'_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et on a $l'_\xi=l_\xi=k_\xi$ pour $\xi\leqslant\alpha$. Il existerait donc un nombre ordinal $\lambda>\alpha$, tel que $k_\lambda^{(q)}>l'_\lambda$, ce qui est impossible, vu que $\lambda>\alpha>\alpha_q$ et $k_\xi^{(q)}=0$ pour $\alpha_q<\xi<\Omega$.

Nous avons ainsi démontré que, quelle que soit la suite infinie $x_1,x_2,\ldots$ d'éléments de H, il existe trois éléments de H, y_0,y_1 et y_2 tels que $y_0\prec y_1\prec y_2$ et qu'aucun élément x_q de la suite $x_1,x_2,\ldots$ ne remplit l'inégalité $y_0\prec y_q\prec y_2$. Cela prouve qu'aucun sous-ensemble dénombrable de H n'est dense dans H.

Or, l'ensemble H peut ne pas être dense. Toutefois les intervalles de H qui ne contiennent dans son intérieur aucun élément de H n'empiètent pas les uns sur les autres et, d'après la propriété démontrée de H, forment un ensemble au plus dénombrable. En plaçant dans chacun de ces intervalles un ensemble ordonné dénombrable dense, on obtient évidemment un ensemble ordonné dense qui fournit une solution négative du problème S.

Nous avons ainsi démontré que la réponse négative au problème P entraîne la réponse négative au problème S.

L'équivalence des problèmes S et P se trouve ainsi démontrée.

La réponse au problème P serait évidemment positive, si elle l'était au problème P_1 suivant:

F étant une famille indénombrable d'ensembles, existe-t-il toujours une sous-famille indénombrable F_1 de F telle que ou bien deux ensembles de F_1 soient toujours disjoints, ou bien ne le soient jamais?

Or, je démontrerai que *la réponse au problème P_1 est négative* [3]).

[3]) Cela fut démontré par une voie un peu différente par M. Marczewski dans Fund. Math. **33**, p. 305. Cf. aussi ma note dans Annali R. Sc. sup. Pisa **2** (1933), p. 285-286, et B. Knaster, Rec. Math. Moscou, t. 16 (58), 1945, p. 285.

D'après le théorème de Zermelo il existe une suite transfinie $\{x_\xi\}_{\xi<\Omega}$ formée de tous les nombres réels distincts, du type φ, où φ est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu.

Désignons, pour $\alpha<\varphi$, par E_α l'ensemble de tous les ensembles à deux éléments $\{\alpha,\xi\}$ (paires non ordonnées), où ξ est un nombre ordinal $<\varphi$ tel que $x_\xi<x_\alpha$ si $\xi<\alpha$ et $x_\xi>x_\alpha$ si $\xi>\alpha$. Soit F la famille de tous les ensembles E_α, où $\alpha<\varphi$.

L'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à un nombre réel donné étant de puissance du continu et φ étant le plus petit nombre ordinal de puissance du continu, il existe évidemment pour $\alpha<\varphi$, $\beta<\varphi$, $\alpha\neq\beta$ un nombre ordinal $\gamma<\varphi$, tel que $\gamma>\alpha+\beta$ et $x_\gamma>x_\alpha$. D'après la définition des ensembles E_α, on aura donc $\{\alpha,\gamma\}\in E_\alpha$ et $\{\alpha,\gamma\}$ non $\in E_\beta$. On a ainsi toujours $E_\alpha\neq E_\beta$ pour $\alpha\neq\beta$. La famille F est donc indénombrable (de puissance du continu).

Supposons que pour deux nombres ordinaux α et β, où $\alpha<\beta<\varphi$, on ait $E_\alpha E_\beta\neq 0$. Il existerait alors des nombres ordinaux $\xi<\varphi$ et $\eta<\varphi$, tels que $\{\alpha,\xi\}=\{\beta,\eta\}\in E_\alpha E_\beta$, ce qui prouverait d'après l'inégalité $\alpha\neq\beta$, que $\xi=\beta$, $\eta=\alpha$, on aurait donc, d'après la formule $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha,\xi\}\in E_\alpha$ et la définition de l'ensemble E_α, $x_\beta>x_\alpha$ (puisque $\beta>\alpha$).

Si $E_\alpha E_\beta\neq 0$ et $\alpha<\beta$, on a donc $x_\alpha<x_\beta$. S'il existait une famille indénombrable $F_1\subset F$ formée d'ensembles tels, que parmi ces ensembles il n'y ait pas d'ensembles disjoints, il existerait donc une suite transfinie indénombrable $\{x_{\alpha_\xi}\}_{\xi<\Omega}$ de nombres réels croissants, ce qui est, comme on le sait, impossible.

Si $\alpha<\beta<\varphi$ et $E_\alpha E_\beta=0$, on ne peut avoir ni $x_\alpha=x_\beta$ (comme $\alpha\neq\beta$) ni $x_\alpha<x_\beta$, puisqu'on aurait alors $\{\alpha,\beta\}\in E_\alpha E_\beta$. Par suite $x_\alpha>x_\beta$. S'il existait une sous-famille indénombrable F_1 de F formée d'ensembles disjoints, il existerait donc une suite transfinie du type Ω, $\{x_{\alpha_\xi}\}_{\xi<\Omega}$ de nombres réels décroissants, ce qui est impossible.

La famille indénombrable F ne contient donc aucune sous-famille indénombrable formée d'ensembles disjoints, ou bien d'ensembles dont chaque couple ait des éléments communs, c. q. f. d.

Cependant, on a le théorème suivant:

Théorème. *F étant une famille infinie d'ensembles, il existe toujours une sous-famille infinie F_1 de F telle que ou bien deux ensembles de F_1 sont toujours disjoints ou bien ne le sont jamais.*

Démonstration. Soit F une famille infinie d'ensembles et supposons qu'elle ne contienne aucune sous-famille infinie d'ensembles disjoints. Soit $E_1 \in F$. S'il existe des ensembles de F disjoints de E_1, soit E_2 un d'entre eux. S'il existe des ensembles de F disjoints de E_1 et de E_2 à la fois, soit E_3 un d'entre eux. Généralement supposons que les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ de F soient définis; s'il existe des ensembles de F disjoints de chacun de ces n ensembles, soit E_{n+1} un d'entre eux. La suite $E_1, E_2, \ldots$ ne peut pas être infinie, vu que, d'après notre hypothèse, la famille F ne contient aucune sous-famille d'ensembles disjoints. Il existe donc une suite finie $E_1, E_2, \ldots, E_n$ d'ensembles de F, telle qu'aucun ensemble de F n'est disjoint de chacun des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$; c'est-à-dire, tout ensemble de la famille F a des éléments communs avec un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$. La famille F étant infinie, un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, soit $H_1 = E_k$, a des éléments communs avec une infinité des ensembles de la famille F autres que H. Désignons leur famille par S_1. En raisonnant de la même manière, nous trouverons dans S_1 un ensemble H_2 et une sous-famille infinie S_2 de S_1 formée d'ensembles dont chacun a des éléments communs avec H_2 (et évidemment aussi avec H_1). En raisonnant ainsi de suite, on obtient une suite infinie $H_1, H_2, \ldots$ d'ensembles distincts de la famille F, telle que chaque ensemble de cette suite a des éléments communs avec tout autre ensemble. $F_1 = \{H_1, H_2, \ldots\}$ sera donc une sous-famille infinie de F ne contenant pas d'ensembles disjoints [4]).

[4]) En lisant les épreuves à corriger, j'ai appris que d'après Mme D. Maraham (*Set functions and Souslin's hypothesis*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 1948, p. 587-590), on peut déduire des résultats obtenus par E. W. Miller dans „*A note on Souslin's problem*", Amer. Journ. Math. **65** (1943), pp. 673-678, à l'aide de quelques résultats de Ben Dushnik et E. W. Miller, parus dans Amer. Journ. Math. **63** (1941), pp. 600-610, que la proposition 3° de la p. 165 pourrait être remplacée par la condition 4° que voici:

4° *Chaque sous-famille F_1 de F formée d'ensembles dont aucun couple d'ensembles non vides n'est disjoint est au plus dénombrable.*

Les conditions 2° et 4° sont plus faibles que les conditions 2° et 3°.

Sur un espace compact localement contractile qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Un sous-ensemble E d'un espace [1]) M est dit *contractile* dans M, lorsqu'il existe une fonction $\varphi(x,t)$ définie et continue dans le produit cartésien [2]) $E \times \langle 0,1\rangle$ de E et de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, dont les valeurs appartiennent à M et qui satisfait aux conditions:

$$\varphi(x,0) = x; \quad \varphi(x,1) = \text{const.}, \text{ quel que soit } x \in E.$$

L'espace M est dit *localement contractile* au point $a \in M$, lorsque tout entourage U de a contient un entourage V contractile dans U. L'espace M est dit tout court *localement contractile*, lorsqu'il l'est à chaque point $a \in M$.

Un sous-ensemble A d'un espace M s'appelle *rétracte* de M, lorsqu'il existe une fonction continue r transformant M en A de manière que $r(x) = x$ pour tout $x \in A$. L'ensemble compact A s'appelle *rétracte absolu de voisinage* lorsque pour tout espace $M \supset A$ l'ensemble A est un rétracte d'un certain entourage de A dans M. Les rétractes absolus de voisinage sont des espaces dont la structure topologique est particulièrement simple, ressemblant à celle des polyèdres [3]). En particulier leurs groupes de Betti sont des groupes à un nombre fini de générateurs et pour presque toutes les dimensions ces groupes se réduisent à zéro [4]).

[1]) Tout espace est entendu dans ce travail dans le sens d'espace métrique.

[2]) Par le produit cartésien des espaces X et Y on entend l'ensemble de tous les couples (x,y) où $x \in X$ et $y \in Y$, métrisé par la formule

$$\varrho[(x,y),(x',y')] = \sqrt{\varrho(x,x')^2 + \varrho(y,y')^2}.$$

[3]) C'est pourquoi certains auteurs appellent les rétractes absolus de voisinage quasi-complexes. Voir p. ex. S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, New York 1942, p. 322.

[4]) Voir S. Lefschetz, *On locally connected and related sets*, Ann. of Math. **35** (1934), p. 129 et K. Borsuk, *Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte*, Fund. Math. **21** (1933), p. 97.