Sur la division des types ordinaux.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer plusieurs théorèmes concernant la division des types ordinaux.

1. ***Théorème 1.*** *μ étant un nombre ordinal $\neq 0$ et α et β deux types ordinaux tels que $\mu\alpha=\mu\beta$, on a $\alpha=\beta$.*

Ce théorème a été énoncé sans démonstration par Adolphe Lindenbaum en 1926 [1]). La démonstration de A. Lindenbaum ne fut pas publiée et elle m'est inconnue. Je donne ici celle que j'ai trouvé en 1946.

Démonstration. Soit M l'ensemble de tous les nombres ordinaux ξ, où $0\leqslant\xi<\mu$; on a $\overline{M}=\mu$. Soient A et B deux ensembles disjoints tels que $\overline{A}=\alpha$ et $\overline{B}=\beta$. Soit P l'ensemble de toutes les paires ordonnées (m,a), où $m\in M$, $a\in A$, ordonné d'après le principe de dernières différences et soit Q l'ensemble de toutes les paires ordonnées (m,b), où $m\in M$ et $b\in B$, ordonné d'après le même principe. On a évidemment $\overline{P}=\mu\alpha$, $\overline{Q}=\mu\beta$, donc, d'après $\mu\alpha=\mu\beta$, $\overline{P}=\overline{Q}$. Il existe donc une transformation f de P en Q qui établit la similitude (au sens d'ordre) de ces ensembles. Soit $\overset{-1}{f}$ la transformation inverse (donc de Q en P). Posons, pour $a\in A$, $\varphi(a)=(0,a)$ et, pour $m\in M$, $b\in B$: $\psi(m,b)=b$. Je dis que la fonction $g(a)=\psi f\varphi(a)$ (où $a\in A$) établit la similitude (au sens d'ordre) des ensembles A et B.

En effet, il résulte des définitions des fonctions φ, f et ψ que $\psi f\varphi(a)\in B$ pour $a\in A$. Soit maintenant $a\in A$, $a'\in A$, $a\prec a'$ (dans A). Vu l'ordre établi dans P, on a $(0,a)\prec(0,a')$ dans P, d'où (la fonction f établissant la similitude entre P et Q) $f(0,a)\prec f(0,a')$ dans Q. Comme $f(0,a)\in Q$ et $f(0,a')\in Q$, il vient $f(0,a)=(\xi,b)$ et $f(0,a')=(\eta,b')$, où $\xi\in M$, $\eta\in M$, $b\in B$, $b'\in B$. On a donc $(\xi,b)\prec(\eta,b')$ dans Q, d'où $b=b'$ ou bien $b\prec b'$ dans B.

---

[1]) Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, **19** (1926), p. 321 (théorème 15. (L)).

Admettons que $b=b'$; on a donc $\xi<\eta$ et, pour $0<\tau<\mu$: $(0,a)\prec(\tau,a)\prec(0,a')$, par suite

$$(\xi,b)=f(0,a)\prec f(\tau,a)\prec f(0,a')=(\eta,b')=(\eta,b).$$

On a donc $f(\tau,a)=(\theta_\tau,b)$ pour $0<\tau<\mu$, où $\xi<\theta_\tau<\eta<\mu$ et, comme $\theta_\tau<\theta_{\tau'}$ pour $0<\tau<\tau'<\mu$, cela implique une contradiction, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\mu$ ne pouvant être semblable à un sous-ensemble de son segment (déterminé par le nombre η).

Il est ainsi démontré que $b\neq b'$, donc $b\prec b'$. Par conséquent, si $a\in A$, $a'\in A$ et $a\prec a'$, on a $f(0,a)=(\xi,b)$ et $f(0,a')=(\eta,b')$, où $b\prec b'$ (dans B), ce qui donne (vu la définition de la fonction ψ): $\psi f\varphi(a)\prec\psi f\varphi(a')$ pour $a\in A$, $a'\in A$, $a\prec a'$. Pour démontrer que la fonction $g(a)=\psi f\varphi(a)$ établit une similitude entre les ensembles A et B, il suffira donc de démontrer qu'il existe pour tout élément b de B un élément a de A tel que $g(a)=b$.

Admettons donc que, pour un élément b_0 de B, il n'existe aucun élément a de A tel que $g(a)=b_0$. Posons:

$$f^{-1}(0,b_0)=(\alpha_0,a_0),\quad f(0,a_0)=(\beta_1,b_1),$$

et, pour $n=1,2,\ldots$:

$$f^{-1}(0,b_n)=(\alpha_n,a_n),\quad f(0,a_n)=(\beta_{n+1},b_{n+1}).$$

Si l'on avait, pour un $\xi<\mu$, $f^{-1}(\xi,b_0)=(\alpha,a)$, où $a\neq a_0$, on aurait, d'après $f^{-1}(0,b_0)=(\alpha_0,a_0)$, $a_0\prec a$, donc $(\alpha_0,a_0)\prec(0,a)\preceq(\alpha,a)$, d'où

$$(0,b_0)=f(\alpha_0,a_0)\prec f(0,a)\preceq f(\alpha,a)=(\xi,b_0),$$

ce qui donne $f(0,a)=(\eta,b_0)$ (où $0<\eta\leqslant\xi$), donc $g(a)=\psi f\varphi(a)=b_0$, contrairement à la définition de b_0.

On a donc $f^{-1}(\xi,b_0)=(\theta_\xi,a_0)$ pour $\xi<\mu$ (où $\theta_\xi<\mu$) et, comme $f^{-1}(0,b_0)=(\alpha_0,a_0)$, on trouve $\alpha_0\leqslant\theta_\xi$ pour $\xi<\mu$. Or, on a $\theta_0=\alpha_0$ et $\theta_\xi<\theta_{\xi'}<\mu$ pour $\xi<\xi'<\mu$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\mu$ est donc transformé par la fonction θ_ξ semblablement en un sous-ensemble de nombres ordinaux $\geqslant\alpha_0$ et $<\mu$. Il en résulte, comme on sait, que $\mu=\alpha_0+\mu$.

D'après $f^{-1}(0,b_0)=(\alpha_0,a_0)$, on a $(0,b_0)=f(\alpha_0,a_0)$, ce qui donne, vu la définition de b_0: $0<\alpha_0$, et, comme $f(0,a_0)=(\beta_1,b_1)$, on trouve $(\beta_1,b_1)\prec(0,b_0)$, d'où: $b_1\prec b_0$.

S'il existait un élément b tel que $b_1\prec b\prec b_0$, on aurait $(\beta_1,b_1)\prec(\xi,b)\prec(0,b_0)$ pour $\xi<\mu$, d'où:

$$(0,a_0)=f^{-1}(\beta_1,b_1)\prec f^{-1}(\xi,b)\prec f^{-1}(0,b_0)=(\alpha_0,a_0)\qquad\text{pour } \xi<\mu,$$

ce qui donne sans peine $\alpha_0\geqslant\mu$, mais ceci est impossible. L'élément b_1 précède donc immédiatement b_0 dans B. On a par conséquent pour $0<\xi<\alpha_0$:

$$(\beta_1,b_1)=f(0,a_0)\prec f(\xi,a_0)\prec f(\alpha_0,a_0)=(0,b_0),$$

donc, pour $\xi<\alpha_0$: $f(\xi,a_0)=(\eta,b_1)$, où $\beta_1\leqslant\eta<\mu$. D'autre part, si $\beta_1\leqslant\eta<\mu$, on a $(\beta_1,b_1)\preceq(\eta,b_1)<(0,b_0)$, d'où

$$(0,a_0)=f^{-1}(\beta_1,b_1)\preceq f^{-1}(\eta,b_1)\prec f^{-1}(0,b_0)=(\alpha_0,a_0),$$

ce qui prouve que $f^{-1}(\eta,b_1)=(\xi,a_0)$, où $0\leqslant\xi<\alpha_0$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux ξ tels que $0\leqslant\xi<\alpha_0$ est donc semblable à l'ensemble de tous les nombres ordinaux η tels que $\beta_1\leqslant\eta<\mu$, et il en résulte tout de suite que $\mu=\beta_1+\alpha_0$.

Comme $f^{-1}(0,b_1)=(\alpha_1,a_1)$, nous concluons sans peine, comme plus haut, que a_1 précède dans A immédiatement l'élément a_0 et que $\mu=\alpha_1+\beta_1$. Pareillement on trouve ensuite $\mu=\beta_2+\alpha_1$, $\mu=\alpha_2+\beta_2$, $\mu=\beta_3+\alpha_2,\ldots$

On a donc $\mu=\alpha_0+\mu=\alpha_1+\beta_1$, $\beta_1<\mu$, d'où $\alpha_0<\alpha_1$ et, comme $\mu=\beta_1+\alpha_0=\beta_2+\alpha_1$, on trouve $\beta_2<\beta_1$. Pareillement on trouve $\beta_3<\beta_2$, $\beta_4<\beta_3,\ldots$, ce qui est impossible, puisqu'il n'existe aucune suite infinie décroissante de nombres ordinaux.

Notre théorème se trouve ainsi démontré. Il subsiste encore pour $\mu=\omega^*$, $\mu=\omega^*+\omega$ et pour $\mu=\eta+2$, mais il n'est pas vrai pour $\mu=\eta$ puisque $\eta\cdot2=\eta\cdot1$, ni pour $\mu=\eta+1$ puisque $(\eta+1)\cdot2=(\eta+1)\cdot1$.

Or, on démontre sans peine que si μ est un nombre ordinal et α et β deux types ordinaux tels que $\mu+\alpha=\mu+\beta$, on a $\alpha=\beta$. Cela subsiste encore pour $\mu=\omega^*+\omega$ et pour $\mu=\eta+2$, mais non pour $\mu=\omega^*$, puisque $\omega^*+1=\omega^*+2$, ni pour $\mu=\eta$, puisque $\eta+(1+\eta)=\eta+\eta$, ni pour $\mu=\eta+1$, puisque $(\eta+1)+1=(\eta+1)+(\eta+2)$.

2. Dans la *Communication* citée de A. Lindenbaum et A. Tarski on trouve (p. 321, proposition **13** (L)) ce

Théorème 2. *Si α et β sont deux types ordinaux et n un nombre naturel tel que $\alpha\cdot n=\beta\cdot n$, on a $\alpha=\beta$.*

La démonstration de cette proposition n'est pas donnée dans la *Communication* citée [1]); d'après une indication qui s'y trouve, elle s'appuie sur le lemme suivant, énoncé également sans démonstration (proposition 1 (L)).

Lemme 1. *Pour que l'on ait* (pour les types ordinaux α, σ et ϱ) $\alpha=\sigma+\alpha+\varrho$, *il faut et il suffit qu'il existe un type* ξ *tel que* $\alpha=\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*$.

Voici la démonstration de ce lemme.

1) La condition du lemme 1 est nécessaire. En effet, soit $\alpha=\sigma+\alpha+\varrho$ et soit A un ensemble ordonné du type α. Comme $\alpha=\sigma+\alpha+\varrho$ on a $A=S_1+A_1+R_1$, où $\overline{S}_1=\sigma$, $\overline{A}_1=\alpha$, $\overline{R}_1=\varrho$ et où les éléments de S_1 précèdent dans A ceux de A_1, et les éléments de A_1 — ceux de R_1. Comme $\overline{A}_1=\alpha=\overline{A}$, A_1 est semblable au sens d'ordre à A et on trouve $A_1=S_2+A_2+R_2$, où $\overline{S}_2=\sigma$, $\overline{A}_2=\alpha$, $\overline{R}_2=\varrho$.

Par l'induction facile on obtient $A_n=S_{n+1}+A_{n+1}+R_{n+1}$, où $\overline{S}_{n+1}=\sigma$, $\overline{A}_{n+1}=\alpha$, $\overline{R}_{n+1}=\varrho$ pour $n=1,2,\ldots$ et où chaque élément de S_{n+1} précède dans A chaque élément de A_{n+1}, et chaque élément de A_{n+1} précède chaque élément de R_{n+1}.

Chaque élément de $S_1+S_2+S_3+\ldots$ précède donc dans A chaque élément de $\ldots+R_3+R_2+R_1$. Nous pouvons donc poser

$$A=S_1+S_2+S_3+\ldots+X+\ldots+R_3+R_2+R_1, \tag{1}$$

où X est un ensemble qui peut être d'ailleurs vide et où de deux éléments appartenants à des termes distincts de la somme (1) celui est antérieur qui appartient au terme antérieur.

Il résulte tout de suite de la formule (1) que

$$\alpha=\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*,$$

où ξ est le type d'ordre du sous-ensemble X de l'ensemble ordonné A.

2) La condition du lemme 1 est suffisante. En effet, si $\alpha=\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*$, on a

$$\sigma+\alpha+\varrho=\sigma+\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*+\varrho=\sigma(1+\omega)+\xi+\varrho(\omega^*+1)=\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*=\alpha$$

(puisque $1+\omega=\omega$ et $\omega^*+1=\omega^*$).

[2]) Pour $n=2$ la démonstration du théorème 2 se trouve dans mon livre *Zarys teorii mnogości*, 3-me éd. Warszawa 1928 (en polonais), pp. 168-169.

On déduit tout de suite du lemme 1 ce

Corollaire 1 [3]). *Pour que l'on ait* (pour les types ordinaux α, σ et ϱ) $\alpha=\sigma+\alpha+\varrho$, *il faut et il suffit que* $\alpha=\sigma+\alpha$ *et* $\alpha=\alpha+\varrho$.

Démonstration. Si $\alpha=\sigma+\alpha+\varrho$, on a, d'après le lemme 1, $\alpha=\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*$, d'où:

$$\sigma+\alpha=\sigma+\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*=\sigma(1+\omega)+\xi+\varrho\omega^*=\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*=\alpha,$$

et

$$\alpha+\varrho=\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*+\varrho=\sigma\omega+\xi+\varrho(\omega^*+1)=\sigma\omega+\xi+\varrho\omega^*=\alpha.$$

D'autre part, si $\alpha=\sigma+\alpha$ et $\alpha=\alpha+\varrho$, on a

$$\alpha=\sigma+\alpha=\sigma+(\alpha+\varrho)=\sigma+\alpha+\varrho.$$

Pour démontrer le théorème 2, nous prouverons encore ce

Lemme 2. *Soient U un ensemble ordonné, n un nombre naturel et $U=A_1+A_2+\ldots+A_n=B_1+B_2+\ldots+B_n$, où chaque élément de A_k (resp. de B_k) précède dans U chaque élément de A_l (resp. de B_l) pour $1\leqslant k<l\leqslant n$. Il existe alors un indice p, $1\leqslant p\leqslant n$, tel que $B_p\subset A_p$.*

Démonstration. Admettons que notre lemme n'est pas vrai. L'inclusion $B_1\subset A_1$ est donc en défaut d'où il résulte que $B_1(A_2+A_3+\ldots+A_n)\neq 0$ et $B_2A_1=0$ (puisque, si l'on avait $b\in B_2A_1$, chaque élément de B_1 précéderait b et on aurait $B_1\subset A_1$, contrairement à l'hypothèse). On a donc $B_2\subset A_2+A_3+\ldots+A_n$ et, comme l'inclusion $B_2\subset A_2$ n'a pas lieu, on a $B_2(A_3+A_4+\ldots+A_n)\neq 0$ et $B_3(A_1+A_2)=0$ (puisque si l'on avait $b\in B_3(A_1+A_2)$, on aurait $B_2\subset A_1+A_2$, ce qui est incompatible avec l'inégalité

$$B_2(A_3+A_4+\ldots+A_n)\neq 0,$$

les ensembles $A_1,A_2,\ldots,A_n$ étant disjoints). On a donc

$$B_3\subset A_3+A_4+\ldots+A_n$$

et, comme l'inclusion $B_3\subset A_3$ est en défaut, on trouve

$$B_3(A_4+A_5+\ldots+A_n)\neq 0.$$

En raisonnant ainsi de suite, on trouve $B_n\subset A_n$, contrairement à l'hypothèse. Le lemme 2 est donc vrai.

[3]) Proposition 2 (L) de A. Lindenbaum, l. c., p. 320.

On en déduit tout de suite ce

Corollaire 2. *Si pour deux types ordinaux α et β on a $\alpha\cdot n=\beta\cdot n$, où n est un nombre naturel, il existe deux types ordinaux σ_1 et ϱ_1 tels que $\alpha=\sigma_1+\beta+\varrho_1$.*

En effet, si $\alpha\cdot n=\beta\cdot n$, on peut appliquer le lemme 2, en supposant que $\bar{A}_k=\alpha$ et $\bar{B}_k=\beta$ pour $k=1,2,\dots,n$. D'après le lemme 2 il existe un indice p, $1\leqslant p\leqslant n$, tel que $B_p\subset A_p$. Soit S l'ensemble de tous les éléments de A_p qui précèdent chaque élément de B_p, et soit R l'ensemble de tous les éléments de A_p qui suivent tout élément de B_p. On a donc $A_p=S+B_p+R$ et, comme $\bar{A}_p=\alpha$, $\bar{B}_p=\beta$, en posant $\bar{S}=\sigma_1$, $\bar{R}=\varrho_1$, on aura $\alpha=\sigma_1+\beta+\varrho_1$, c. q. f. d.

Nous allons démontrer maintenant le théorème 2.

Soient n un nombre naturel et α et β deux types ordinaux, tels que $\alpha\cdot n=\beta\cdot n$. Les types α et β sont donc simultanément des segments et des restes du type $\gamma=\alpha\cdot n=\beta\cdot n$. (Un type α est dit *segment* du type γ, s'il existe un type ϱ tel que $\gamma=\alpha+\varrho$, et le type α est dit *reste* du type γ, s'il existe un type σ tel que $\gamma=\sigma+\alpha$). Or, comme on sait, de deux segments (restes) d'un même type ordinal toujours un au moins est un segment (reste) de l'autre. On a donc un au moins de 4 cas suivants:

1) α est un segment de β et β un reste de α.

Il existe donc deux types σ et ϱ tels que $\beta=\alpha+\varrho$ et $\alpha=\sigma+\beta$. Il en résulte que $\beta=\sigma+\beta+\varrho$, d'où, d'après le corollaire 1: $\beta=\sigma+\beta$, donc $\beta=\alpha$.

2) β est un segment de α et α un reste de β.

Comme dans le cas 1) on trouve $\alpha=\beta$.

3) α est un segment de β et α est un reste de β.

Il existe donc deux types σ et ϱ tels que

$$\beta=\alpha+\varrho=\sigma+\alpha. \tag{1}$$

Or, d'après le corollaire 2 il existe deux types ordinaux σ_1 et ϱ_1 tels que

$$\alpha=\sigma_1+\beta+\varrho_1. \tag{2}$$

Il résulte de (1) et (2) que

$$\beta=\sigma+\alpha=\sigma+\sigma_1+\beta+\varrho_1,$$

d'où, d'après le corollaire 1:

$$\beta=\beta+\varrho_1. \tag{3}$$

Or, d'après (2) et (1):

$$\alpha=\sigma_1+\beta+\varrho_1=\sigma_1+\alpha+\varrho+\varrho_1,$$

d'où, d'après le corollaire 1: $\alpha=\alpha+\varrho+\varrho_1$, donc, d'après (1):

$$\alpha=\beta+\varrho_1. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) donnent $\alpha=\beta$.

4) β est un segment de α et β est un reste de α.

Comme dans le cas 3) on trouve $\alpha=\beta$.

Dans chacun de 4 cas on a donc l'égalité $\alpha=\beta$ et le théorème 2 est démontré.

Le théorème 2 cesse évidemment d'être vrai lorsqu'on y remplace le nombre n par ω (puisque $1\cdot\omega=2\cdot\omega$). Or, il est vrai, lorsqu'on y remplace ω par $\omega+1$.

Admettons, en effet, qu'on a pour deux types ordinaux α et β, $\alpha(\omega+1)=\beta(\omega+1)$. Il existe alors un ensemble ordonné U tel que

$$U=A_1+A_2+\dots+A_n+\dots+A_\omega=B_1+B_2+\dots+B_n+\dots+B_\omega,$$

où $\bar{A}_i=\alpha$ et $\bar{B}_i=\beta$ pour $i=1,2,\dots,\omega$, et où chaque élément de A_k (resp. de B_k) précède dans U chaque élément de A_l (resp. de B_l) pour $1\leqslant k<l\leqslant\omega$.

Je dis qu'il existe alors un nombre ordinal p, $1\leqslant p\leqslant\omega$, tel que $B_p\subset A_p$.

En effet, comme dans la démonstration du lemme 2 on prouve que, si ce n'est pas le cas, on a

$$B_k(A_{k+1}+A_{k+2}+\dots+A_\omega)\neq 0 \quad\text{pour } k \text{ naturels.} \tag{5}$$

Si l'on avait, pour un n naturel, $B_\omega A_n\neq 0$, on aurait, comme on voit sans peine, $A_{n+1}+A_{n+2}+\dots+A_\omega\subset B_\omega$, donc, vu que $B_nB_\omega=0$, on aurait $B_n(A_{n+1}+A_{n+2}+\dots+A_\omega)=0$, contrairement à (5) (pour $k=n$). On a donc $B_\omega A_n=0$ pour n naturels, d'où $B_\omega\subset A_\omega$.

Notre assertion est donc vraie. On en déduit l'égalité $\alpha=\beta$ de la même façon que le théorème 2 a été déduit du lemme 2.

Plus généralement, on pourrait démontrer que *le théorème 2 reste vrai, lorsqu'on y remplace n par un nombre ordinal de première espèce et devient faux lorsqu'on y remplace n par un nombre ordinal de seconde espèce.*

Pour $n=1+\omega^*$ le théorème 2 est vrai; pour $n=\omega+\omega^*$, $\omega^*+\omega$, η, $\eta+1$ il est faux (puisque $1\cdot(\omega+\omega^*)=2(\omega+\omega^*)$, $1(\omega^*+\omega)=2(\omega^*+\omega)$, $1\cdot\eta=\eta\cdot\eta$, $\eta(1+\eta)=(\eta+1)(1+\eta)=\eta$).

3. Un type ordinal peut être divisible à gauche par tout nombre naturel, sans l'être par ω ni par ω^*, p. e. le type $\omega^*+\omega$ (où on a $n(\omega^*+\omega)=\omega^*+\omega$ pour $n=1,2,\ldots$). Pareillement, un type ordinal peut être divisible à droite par tout nombre naturel, sans l'étre par ω ni par ω^*, p. e. le type $1+2\eta+1$ (où l'on a $(1+2\eta+1)\cdot n=1+2\eta+1$ pour $n=1,2,3,\ldots$).

On peut même démontrer ce

Théorème 3. *Il existe un type ordinal φ qui est divisible par tout nombre naturel à gauche et à droite, mais qui n'est pas divisible ni à gauche ni à droite par ω ni par ω^*.*

Tel est, comme on voit sans peine, le type $\varphi=(\omega^*+\omega)(1+2\eta+1)$.

4. ***Théorème 4.*** *Il existe une infinité indénombrable de types ordinaux (dénombrables) distincts, deux à deux divisibles l'un par l'autre de droite.*

Tels sont les types $\alpha\eta$, où α est un nombre ordinal $<\Omega$. En effet, comme on voit sans peine, on a, pour $\alpha<\Omega$, $\beta<\Omega$, $\alpha\neq\beta$: $\alpha\eta\neq\beta\eta$ et $\alpha\eta=\alpha\eta\cdot\beta\eta$, $\beta\eta=\beta\eta\cdot\alpha\eta$.

Il en résulte que deux types ordinaux distincts peuvent avoir les mêmes diviseurs à droite. Il en est de même pour les diviseurs à gauche. Les types $\alpha=\Omega^{\omega^*}(=\ldots\Omega\Omega\Omega)$ et $\beta=\alpha\omega$ sont divisibles à gauche l'un par l'autre, puisque $\alpha=\beta\Omega$, et on a $\alpha\neq\beta$, le type β étant confinal avec ω et le type α ne l'étant pas. Plus encore, on a ce

Théorème 5. *Il existe une infinité indénombrable de types ordinaux distincts, deux à deux divisibles l'un par l'autre de gauche.*

Ce sont les types $\varphi_\alpha=\omega_\Omega^{\omega^*}\omega_{\alpha+1}$, où α est un nombre ordinal $<\Omega$ (et où ω_ξ désigne le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_\xi$).

En effet, on a, pour $\alpha<\Omega$, $\beta<\Omega$: $\varphi_\beta=\varphi_\alpha\omega_\Omega\omega_{\beta+1}$ et $\varphi_\alpha=\varphi_\beta\omega_\Omega\omega_{\alpha+1}$, puisque $\omega_{\alpha+1}\omega_\Omega=\omega_{\beta+1}\omega_\Omega=\omega_\Omega$, et, d'autre part, on a $\varphi_\alpha\neq\varphi_\beta$ pour $\alpha<\beta<\Omega$, puisque le type $\varphi_{\alpha+1}$ est confinal avec $\omega_{\alpha+1}$ et par-suite ne peut pas être confinal avec $\omega_{\beta+1}$.

Cependant, je ne sais pas s'il existe deux types ordinaux dénombrables distincts dont chacun serait divisible de gauche par l'autre.

Je ne sais non plus s'il existe deux types ordinaux distincts divisibles l'un par l'autre de gauche et de droite.

5. ***Théorème 6.*** *Il existe deux types ordinaux qui ne sont des diviseurs communs de gauche d'aucun type ordinal, mais qui sont des diviseurs communs de droite d'un type ordinal.*

Tels sont p. e. les types ω et η, puisque $\eta\omega=\eta\eta$ et, quel que soit le type $\xi\neq0$, $\omega\xi$ est un type non dense et $\eta\xi$ est un type dense. Tels sont aussi les types ω et ω^*, puisque $\eta\omega=\eta\omega^*$ et, comme on voit sans peine, quels que soient les types ξ et $\xi_1(\neq0)$, on a $\omega\xi\neq\omega^*\xi_1$.

Théorème 7. *Il existe deux types (nombres) ordinaux qui ne sont des diviseurs communs de droite d'aucun type ordinal, mais qui sont des diviseurs communs de gauche d'un type (nombre) ordinal.*

Tels sont les types ω et Ω, puisque $\omega\Omega^\omega=\Omega\Omega^\omega$ et, quel que soit le type $\xi\neq0$, $\xi\omega$ est un type confinal avec ω et $\xi\Omega$ ne l'est pas.

Théorème 8. *Il existe deux types ordinaux qui ne sont des diviseurs communs ni de gauche ni de droite d'aucun type ordinal.*

Tels sont les types η et Ω, puisque, quel que soit le type $\xi\neq0$, $\eta\xi$ est un type dense et $\Omega\xi$ ne l'est pas, et, d'autre part, $\xi\eta$ est un type confinal avec ω et $\xi\Omega$ ne l'est pas.

6. ***Théorème 9.*** *Si α et β sont deux types ordinaux, alors:* a) *un diviseur de gauche commun de α et de β est un diviseur de gauche de $\alpha+\beta$;* b) *un diviseur de gauche commun de α et de $\alpha+\beta$ peut ne pas être diviseur de gauche de β;* c) *un diviseur de gauche commun de β et de $\alpha+\beta$ peut ne pas être diviseur de gauche de α.*

Démonstration. a) Soit $\alpha=\delta\alpha_1$, $\beta=\delta\beta_1$. On a $\alpha+\beta=\delta(\alpha_1+\beta_1)$.

b) On a $\eta+(1+\eta)=\eta$ et $1+\eta$, en tant qu'un type ayant l'élément premier n'est pas divisible de gauche par η.

c) On a $1+\omega\cdot1=\omega\cdot1$ et 1 n'est pas divisible par ω.

Quant au cas b) il est à remarquer qu'un diviseur de gauche commun de nombres ordinaux α et $\alpha+\beta$ est toujours un diviseur de gauche de β.

En effet, soient α et β deux nombres ordinaux, $\alpha=\delta\alpha_1$, $\alpha+\beta=\delta\gamma_1$. On a, comme on sait, $\beta=\delta\beta_1+\varrho$, où $\varrho<\delta$, donc $\delta(\alpha_1+\beta_1)+\varrho=\delta\gamma_1$, d'où $\gamma_1\geqslant\alpha_1+\beta_1$, donc $\gamma_1=\alpha_1+\beta_1+\varrho_1$, où $\varrho_1\geqslant0$. Par conséquent

$$\delta(\alpha_1+\beta_1)+\varrho=\delta(\alpha_1+\beta_1)+\delta\varrho_1, \quad \text{d'où} \quad \varrho=\delta\varrho_1,$$

donc, vu que $\varrho<\delta$, $\varrho=0$. Ainsi $\beta=\delta\beta_1$.

Théorème 10. *Si α et β sont deux types (nombres) ordinaux,* alors: a) *un diviseur de droite commun de α et de β peut ne pas l'être par rapport à $\alpha+\beta$;* b) *un diviseur de droite commun de α et de $\alpha+\beta$ peut ne pas l'être par rapport à β;* c) *un diviseur de droite commun de β et de $\alpha+\beta$ peut ne pas l'être par rapport à α.*

Démonstration. a) Posons $\alpha=\omega^2$, $\beta=\omega$, $\delta=\omega$. L'hypothèse que $\omega^2+\omega=\xi\omega$, entraîne $\xi<\omega^2$, donc $\xi=\omega\cdot k+l$, où $0\leqslant k<\omega$ et $0\leqslant l<\omega$, d'où: $\xi\omega\leqslant\omega^2$, contrairement à $\xi\omega=\omega^2+\omega>\omega^2$.

b) On a $\omega\cdot 2+1=(\omega+1)\cdot 2$ et 1 n'est pas divisible par 2.

c) On a $1+1\cdot\omega=1\cdot\omega$ et 1 n'est pas divisible par ω.

Quant au cas a), il est à remarquer qu'on a ce

Théorème 11. *La somme de deux nombres ordinaux divisibles de droite par un nombre naturel n est divisible de droite par n.*

Démonstration. Soient α et β deux nombres ordinaux et soit $\alpha=\alpha_1 n$, $\beta=\beta_1 n$, où n est un nombre naturel. D'après G. Cantor on a

$$\alpha_1=\omega^{\mu_1}k_1+\omega^{\mu_2}k_2+\ldots+\omega^{\mu_r}k_r,$$
$$\beta_1=\omega^{\nu_1}l_1+\omega^{\nu_2}l_2+\ldots+\omega^{\nu_s}l_s,$$

où r, s, k_i $(i=1,2,\ldots,r)$ et l_j $(j=1,2,\ldots,s)$ sont des nombres naturels et où μ_i $(i=1,2,\ldots,r)$ et ν_j $(j=1,2,\ldots,s)$ sont des nombres ordinaux, tels que

$$\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_r\geqslant 0 \quad\text{et}\quad \nu_1>\nu_2>\ldots>\nu_s\geqslant 0.$$

Si $\mu_1>\nu_1$, on a, vu que $\xi+\omega^\mu=\omega^\mu$ pour $\xi<\omega^\mu$, $\beta_1 n+\alpha_1=\alpha_1$ et

$$\alpha+\beta=\alpha_1 n+\beta_1 n=\alpha_1+\alpha_1(n-1)+\beta_1 n=$$
$$=\alpha_1+(\beta_1 n+\alpha_1)(n-1)+\beta_1 n=(\alpha_1+\beta_1 n)n.$$

Si $\mu_1<\nu_1$, on a $\alpha_1 n+\beta_1=\beta_1$ et

$$\alpha+\beta=\alpha_1 n+\beta_1 n=\alpha_1 n+\beta_1+\beta_1(n-1)=\beta_1+\beta_1(n-1)=\beta_1 n.$$

Si $\mu_1=\nu_1$, on déduit de l'égalité

$$\alpha_1 n=\omega^{\mu_1}k_1 n+\omega^{\mu_2}k_2+\ldots+\omega^{\mu_r}k,$$

que

$$\alpha+\beta=\alpha_1 n+\beta_1 n=\omega^{\mu_1}k_1 n+\omega^{\nu_1}l_1 n+\omega^{\nu_2}l_2+\ldots+\omega^{\nu_s}l_s=$$
$$=[\omega^{\mu_1}(k_1+l_1)+\omega^{\nu_2}l_2+\ldots\omega^{\nu_s}l_s]\cdot n.$$

Le théorème 11 est ainsi démontré.

Il est à remarquer que le théorème 11 est en défaut pour les types ordinaux, p. e. pour les types $(\omega^*+\omega)\cdot n$ et n, puisque, comme on voit sans peine, leur somme n'est pas divisible à droite par le nombre naturel n.

7. ***Théorème 12.*** *Quel que soit le type ordinal α, il existe un type ordinal ξ tel que $\xi\alpha=\alpha\xi=\xi$.*

Pour démontrer le théorème 12 nous prouverons d'abord deux lemmes.

Lemme 1. *Quel que soit le type ordinal α, il existe un type ordinal ξ tel que $\xi\alpha=\xi$.*

Il est facile de démontrer que le type $\xi=\alpha^{\omega^*}$ $(=\ldots\alpha\alpha\alpha)$ satisfait à notre lemme.

Lemme 2. *Quel que soit le type ordinal α, il existe un type ordinal ξ tel que $\alpha\xi=\xi$.*

Démonstration. En supposant que $\alpha\neq 0$, on peut évidemment poser $\alpha=\beta+1+\gamma$, où β et γ sont des types ordinaux qui peuvent être aussi $=0$. Posons

$$\xi=[\alpha^*\beta^*+(\alpha^*)^2\beta^*+(\alpha^*)^3\beta^*+\ldots]^*+\alpha+\alpha\gamma+\alpha^2\gamma+\alpha^3\gamma+\ldots$$
$$(=\ldots+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta+\alpha+\alpha\gamma+\alpha^2\gamma+\alpha^3\gamma+\ldots).$$

On vérifie sans peine que le type ξ satisfait à notre lemme (puisque $\alpha^2=\alpha(\beta+1+\gamma)=\alpha\beta+\alpha+\alpha\gamma$) [4]).

Soit maintenant α un type ordinal donné. D'après le lemme 1 il existe un type ordinal φ tel que $\varphi\alpha=\varphi$ et, d'après le lemme 2 il existe un type ψ tel que $\alpha\psi=\psi$. Posons $\xi=\psi\varphi$. Il vient

$$\alpha\psi\varphi=\psi\varphi \quad\text{et}\quad \psi\varphi\alpha=\psi\varphi, \quad\text{donc}\quad \alpha\xi=\xi\alpha=\alpha.$$

Le théorème 12 est ainsi démontré.

En particulier, pour α naturel on peut admettre que $\xi=\omega\eta$ et, si α est un nombre ordinal de deuxième classe, on peut admettre que $\xi=\alpha^\omega\eta$.

8. ***Théorème 13.*** *Si α est un type ordinal tel que $\alpha\omega=\alpha$, on a $\alpha\xi=\alpha$ pour tout nombre ordinal $\xi<\Omega$.*

Pour démontrer le théorème 13, il suffit de remarquer que l'égalité $\alpha\omega=\alpha$ implique

$$\alpha+\alpha=\alpha+\alpha\omega=\alpha(1+\omega)=\alpha\omega=\alpha$$

et d'appliquer l'induction transfinie (en s'appuyant sur la proposition, que tout nombre transfini de deuxième classe est somme d'une suite finie ou infinie (du type ω) de nombres ordinaux plus petits).

[4]) D'après M. Sikorski on peut omettre les lemmes 1 et 2 si l'on utilise la définition de la puissance générale de types ordinaux donnée par Hausdorff (Voir *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, Kap. VI, § 3). Il suffit alors de poser $\xi=(\beta+1+\gamma)^{\omega+\omega^*}$.

En particulier, vu que $\eta\omega=\eta$ et $(1+\lambda)\omega=1+\lambda$, on a $\eta\xi=\eta$ et $(1+\lambda)\xi=1+\lambda$ pour $\xi<\Omega$; ceci est, d'ailleurs, bien connu. (On sait même que $\eta\varphi=\eta$ pour tout type ordinal φ au plus dénombrable, mais $(1+\lambda)\eta\neq 1+\lambda$).

Théorème 14. *Si α est un type ordinal et k et l sont des nombres naturels, les égalités $\alpha k=\alpha$ et $\alpha l=\alpha$ sont équivalentes.*

Démonstration. Soient k et l deux nombres naturels et α un type ordinal tel que $\alpha k=\alpha$. On en déduit sans peine par induction que $\alpha k^n=\alpha$ pour n naturel. Soit n un nombre naturel tel que $k^n>l$. Vu que $\alpha k^n=\alpha$, on a $\alpha(k^n-l)+\alpha l=\alpha$ et αl est un reste du type α, et, d'autre part, α est évidemment un segment du type $\alpha l=\alpha+\alpha(l-1)$. Comme on sait (cf. le cas 1) dans la démonstration du théorème 2), il en résulte que $\alpha l=\alpha$.

Il est à remarquer que l'égalité $\alpha\cdot 2=\alpha$ n'implique pas que $\alpha\omega=\alpha$ (puisque $(\eta+1)\cdot 2=\eta+1$ et $(\eta+1)\cdot\omega\neq\eta+1$); elle n'implique que l'existence d'un type ordinal ϱ tel que $\alpha=\alpha\omega+\varrho$.

On peut aussi démontrer sans peine que *si α est un type ordinal et k et l deux nombres naturels* >1, *les égalités $k\alpha=\alpha$ et $l\alpha=\alpha$ sont équivalentes*. Cependant il ne résulte pas de $2\alpha=\alpha$ que $\omega\alpha=\alpha$ (p. e. pour $\alpha=\omega$). D'autre part, on peut démontrer que *si α est un type ordinal tel que $\omega\alpha=\alpha$, on a $\xi\alpha=\alpha$ pour tout nombre ordinal $\xi<\omega^\omega$*, mais $\omega\cdot\omega^\omega=\omega^\omega$ et $\omega^\omega\cdot\omega^\omega\neq\omega^\omega$.

9. Nous ajoutons pour terminer la remarque suivante concernant les produits infinis du type ω^* de types ordinaux.

Il existe deux produits infinis du type ω^* distincts dont les facteurs sont des types (nombres) ordinaux, $\ldots\alpha_3\alpha_2\alpha_1\neq\ldots\beta_3\beta_2\beta_1$, tels que

$$\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1=\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_1 \quad \text{pour } n \text{ naturels.}$$

Tels sont, comme on voit sans peine, les produits

$$\ldots 1\cdot 1\cdot 1\cdot\omega=\omega \quad \text{et} \quad \ldots 2\cdot 2\cdot 2\cdot\omega=\varphi,$$

où φ est le type d'ordre de l'ensemble parfait non dense de Cantor, dépourvu de son extrémité droite [5]).

Il en est de même, comme on sait, pour les séries infinies de types ordinaux: p. e. les sommes

$$(\omega^*)^2+1+1+1+\ldots=(\omega^*)^2+\omega \quad \text{et} \quad (\omega^*)^2+\omega^*+\omega^*+\ldots=(\omega^*)^2+\omega^*\omega$$

ont toutes les sommes partielles respectivement égales.

[5]) Quant au type 2^{ω^*}, cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, p. 158.

Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure.

Par

Edward Marczewski (Wrocław).

Les théorèmes fondamentaux de ce travail (2.3 et 3.3) jouent un rôle multiple:

1⁰ ils établissent une relation précise entre la notion d'indépendance au sens stochastique (voir 2.2) et celle d'indépendance au sens de la Théorie générale des ensembles (voir 2.1 et 3.1);

2⁰ ils caractérisent les classes d'ensembles telles que toute fonction d'ensemble non négative et bornée qui y est définie puisse être prolongée à une mesure;

3⁰ ils permettent de définir les mesures pour lesquelles il existe une infinité arbitrairement éleveé ($\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, etc.) d'ensembles stochastiquement indépendants [3.4 (i)];

4⁰ ils permettent de définir les mesures non séparables [3.4 (ii)].

D'autres applications de ces théorèmes seront discutées dans le texte (cf. 3.4 et 3.5).

C'est M. O. Nikodym qui a établi le premier l'existence d'une mesure non séparable [1]). Les idées de sa démonstration seront utilisées dans la suite.

Le résultats principaux de ce travail datent de 1938; ils ont été signalés dans C. R. [2]). Des résultats plus généraux ont été obtenus en 1939 et 1940 par S. Banach et moi-même [3]). En particulier, S. Banach a démontré un profond théorème qui généralise mon IIme théorème fondamental (voir plus loin 3.3). Cependant, il me

[1]) Nikodym [4].

[2]) Voir ma note [1]. La terminologie et les notations y sont différentes de celles employées ici.

[3]) Ces résultats seront publiés dans le travail posthume de Banach, Studia Math. 10 (1948); voir aussi ma note [3], le travail posthume de S. Saks, Fund. Math. 36, ainsi que mes notes ibidem et dans Colloquium Mathematicum I. 2.