En particulier, vu que $\eta\omega=\eta$ et $(1+\lambda)\omega=1+\lambda$, on a $\eta\xi=\eta$ et $(1+\lambda)\xi=1+\lambda$ pour $\xi<\Omega$; ceci est, d'ailleurs, bien connu. (On sait même que $\eta\varphi=\eta$ pour tout type ordinal φ au plus dénombrable, mais $(1+\lambda)\eta\neq 1+\lambda$).

Théorème 14. *Si a est un type ordinal et k et l sont des nombres naturels, les égalités $ak=a$ et $al=a$ sont équivalentes.*

Démonstration. Soient k et l deux nombres naturels et a un type ordinal tel que $ak=a$. On en déduit sans peine par induction que $ak^n=a$ pour n naturel. Soit n un nombre naturel tel que $k^n>l$. Vu que $ak^n=a$, on a $a(k^n-l)+al=a$ et al est un reste du type a, et, d'autre part, a est évidemment un segment du type $al=a+a(l-1)$. Comme on sait (cf. le cas 1) dans la démonstration du théorème 2), il en résulte que $al=a$.

Il est à remarquer que l'égalité $a\cdot 2=a$ n'implique pas que $a\omega=a$ (puisque $(\eta+1)\cdot 2=\eta+1$ et $(\eta+1)\cdot\omega\neq\eta+1$); elle n'implique que l'existence d'un type ordinal ϱ tel que $a=a\omega+\varrho$.

On peut aussi démontrer sans peine que *si a est un type ordinal et k et l deux nombres naturels >1, les égalités $ka=a$ et $la=a$ sont équivalentes*. Cependant il ne résulte pas de $2a=a$ que $\omega a=a$ (p. e. pour $a=\omega$). D'autre part, on peut démontrer que *si a est un type ordinal tel que $\omega a=a$, on a $\xi a=a$ pour tout nombre ordinal $\xi<\omega^\omega$*, mais $\omega\cdot\omega^\omega=\omega^\omega$ et $\omega^\omega\cdot\omega^\omega\neq\omega^\omega$.

9. Nous ajoutons pour terminer la remarque suivante concernant les produits infinis du type ω^* de types ordinaux.

Il existe deux produits infinis du type ω^* distincts dont les facteurs sont des types (nombres) ordinaux, $\ldots a_3a_2a_1\neq\ldots\beta_3\beta_2\beta_1$, tels que

$$a_na_{n-1}\ldots a_1=\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_1 \quad \text{pour } n \text{ naturels.}$$

Tels sont, comme on voit sans peine, les produits

$$\ldots 1\cdot 1\cdot 1\cdot\omega=\omega \quad \text{et} \quad \ldots 2\cdot 2\cdot 2\cdot\omega=\varphi,$$

où φ est le type d'ordre de l'ensemble parfait non dense de Cantor, dépourvu de son extrémité droite [5]).

Il en est de même, comme on sait, pour les séries infinies de types ordinaux: p. e. les sommes

$$(\omega^*)^2+1+1+1+\ldots=(\omega^*)^2+\omega \quad \text{et} \quad (\omega^*)^2+\omega^*+\omega^*+\ldots=(\omega^*)^2+\omega^*\omega$$

ont toutes les sommes partielles respectivement égales.

[5]) Quant au type 2^{ω^*}, cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, p. 158.

Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure.

Par

Edward Marczewski (Wrocław).

Les théorèmes fondamentaux de ce travail (2.3 et 3.3) jouent un rôle multiple:

1⁰ ils établissent une relation précise entre la notion d'indépendance au sens stochastique (voir 2.2) et celle d'indépendance au sens de la Théorie générale des ensembles (voir 2.1 et 3.1);

2⁰ ils caractérisent les classes d'ensembles telles que toute fonction d'ensemble non négative et bornée qui y est définie puisse être prolongée à une mesure;

3⁰ ils permettent de définir les mesures pour lesquelles il existe une infinité arbitrairement éleveé ($\mathfrak{c}$, $2^{\mathfrak{c}}$, etc.) d'ensembles stochastiquement indépendants [3.4 (i)];

4⁰ ils permettent de définir les mesures non séparables [3.4 (ii)].

D'autres applications de ces théorèmes seront discutées dans le texte (cf. 3.4 et 3.5).

C'est M. O. Nikodym qui a établi le premier l'existence d'une mesure non séparable [1]). Les idées de sa démonstration seront utilisées dans la suite.

Le résultats principaux de ce travail datent de 1938; ils ont été signalés dans C. R. [2]). Des résultats plus généraux ont été obtenus en 1939 et 1940 par S. Banach et moi-même [3]). En particulier, S. Banach a démontré un profond théorème qui généralise mon II^{me} théorème fondamental (voir plus loin 3.3). Cependant, il me

[1]) Nikodym [4].

[2]) Voir ma note [1]. La terminologie et les notations y sont différentes de celles employées ici.

[3]) Ces résultats seront publiés dans le travail posthume de Banach, Studia Math. 10 (1948); voir aussi ma note [3], le travail posthume de S. Saks, Fund. Math. 36, ainsi que mes notes ibidem et dans Colloquium Mathematicum I. 2.

semble convenable d'en publier ici la démonstration, celle du théorème de Banach étant fort compliquée.

Une partie du Ier théorème fondamental est contenue implicitement dans un Mémoire de M. M. G. Fichtenholz et L. Kantorovitch [4]). Certaines simplifications de la démonstration de ce théorème sont dues à S. Saks.

1. PRÉLIMINAIRES.

1.1. Ensembles. E étant un ensemble, E^0 en désignera le complémentaire; alors on écrira aussi E^1 pour E.

I désignera l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$.

La puissance du continu sera désignée par $\mathfrak{c}$.

1.2. Atomes. Pour toute classe finie ou dénombrable $\boldsymbol{F}=(Z_1, Z_2, \ldots)$ de sous-ensembles de X, tout ensemble de la forme

$$A = Z_1^{i_1} \cdot Z_2^{i_2} \cdot \ldots \quad \text{où} \quad i_k = 0, 1$$

s'appellera *atome* de $\boldsymbol{F}$. Les atomes d'une classe sont évidemment disjoints deux à deux.

Désignons par D l'ensemble composé de nombres 0 et 1. Par conséquent D^n désigne l'ensemble des systèmes $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, où $i_k = 0, 1$. Désignons encore par D_m^n où $m \leqslant n$, l'ensemble des systèmes $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \epsilon D^n$ tels que $i_m = 1$.

Soit maintenant $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ une classe finie de sous-ensembles de X. On établit facilement la proposition suivante:

$$\text{(i)} \quad \sum Z_1^{i_1} Z_2^{i_2} \ldots Z_n^{i_n} = \begin{cases} X \textit{ si } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \textit{ parcourt } D^n & (1^0) \\ Z_m \textit{ si } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \textit{ parcourt } D_m^n & (2^0) \\ Z_1^{i_1} \cdot Z_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot Z_m^{i_m} \textit{ si } (i_{m+1}, \ldots, i_n) \textit{ parcourt } D^{n-m}. & (3^0) \end{cases}$$

Il résulte de (i), (3^0) que

(ii) *Si $\boldsymbol{F}_1 \subset \boldsymbol{F}_2$ sont deux classes finies de sous-ensembles de X, tout atome de $\boldsymbol{F}_1$ est somme d'un nombre fini d'atomes de $\boldsymbol{F}_2$. Tout atome non vide de $\boldsymbol{F}_2$ est contenu dans un seul atome de $\boldsymbol{F}_1$.*

Notons encore que

(iii) *Si* $E_1^{i_1} \cdot E_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot E_m^{i_m} \supset E_1^{j_1} \cdot E_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot E_n^{j_n} \neq 0$ *et* $m \leqslant n$ *(où i_k et j_k sont égaux à 0 ou 1), on a $i_k = j_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$.*

[4]) Fichtenholz-Kantorovitch [1], p. 78, Lemme I, et p. 72, renvoi 8.

1.3. Corps d'ensembles. Toute classe d'ensembles additive et complémentative s'appelle *corps* d'ensembles. Chaque corps dénombrablement additif s'appelle *σ-corps*. Le plus petit corps contenant une classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles sera désigné par $\boldsymbol{K}_0$. Le plus petit σ-corps contenant $\boldsymbol{K}$ sera désigné par $\boldsymbol{K}_\beta$. Évidemment

(i) $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{K}_0 \subset \boldsymbol{K}_\beta = (\boldsymbol{K}_0)_\beta$.

Il résulte facilement de 1.2 (i), 1^0 et 2^0 que

(ii) *$\boldsymbol{F}$ étant une classe finie d'ensembles, tout ensemble non vide $E \epsilon \boldsymbol{F}_0$ admet une et une seule représentation de la forme*

$$E = A_1 + A_2 + \ldots + A_m,$$

où A_j sont des atomes de $\boldsymbol{F}$, différents et non vides.

Nous allons démontrer encore que

(iii) *Pour chaque classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles, chaque ensemble appartenant à $\boldsymbol{K}_0$ appartient à un corps $\boldsymbol{F}_0$, où $\boldsymbol{F}$ est une classe finie contenue dans $\boldsymbol{K}$. En d'autres termes:*

$$(*) \qquad \boldsymbol{K}_0 = \sum \boldsymbol{F}_0,$$

$\boldsymbol{F}$ parcourant tous les classes finies contenues dans $\boldsymbol{K}$.

Désignons par $\boldsymbol{S}$ le membre droit de (*). La classe $\boldsymbol{S}$ étant évidemment complémentative et contenue dans $\boldsymbol{K}_0$, il reste à démontrer qu'elle est additive. Soient donc $E_1 \epsilon \boldsymbol{S}$ et $E_2 \epsilon \boldsymbol{S}$; on a par conséquent $E_1 \epsilon (\boldsymbol{F}_1)_0$ et $E_2 \epsilon (\boldsymbol{F}_2)_0$, où $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ sont des sous-classes finies de $\boldsymbol{K}$. Par conséquent:

$$E_1 \epsilon (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)_0, \qquad E_2 \epsilon (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)_0,$$

donc également

$$E_1 + E_2 \epsilon (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)_0 \subset \boldsymbol{S}.$$

1.4. Mesures. Une fonction non négative $m(E)$ définie dans le corps $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles d'un ensemble X s'appelle *mesure* lorsqu'on a $m(X) = 1$ et

$$(1) \qquad m(E_1 + E_2) = m(E_1) + m(E_2) \qquad \text{pour } E_1, E_2 \epsilon \boldsymbol{K} \text{ où } E_1 E_2 = 0.$$

Si la mesure m remplit la condition plus restrictive:

$$(2) \qquad m(E_1 + E_2 + \ldots) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots$$

pour $E_j \epsilon \boldsymbol{K}$, $E_1 + E_2 + \ldots \epsilon \boldsymbol{K}$ et $E_i E_j = 0$ (où $i \neq j$), on dit que la mesure m est *dénombrablement additive*.

On démontre à l'aide de la notion de mesure extérieure de Carathéodory [5]) que

(o) Pour toute mesure m dénombrablement additive dans un corps $\boldsymbol{K}$, il existe une et une seule mesure dénombrablement additive μ dans le σ-corps $\boldsymbol{K}_\beta$ telle que $m(E)=\mu(E)$ pour $E\in\boldsymbol{K}$ [6]).

μ étant une mesure dans un corps $\boldsymbol{K}$ d'ensembles, posons:

(*) $$\varrho_\mu(E_1,E_2)=\mu[(E_1-E_2)+(E_2-E_1)] \quad \text{pour } E_1,E_2\in\boldsymbol{K}.$$

En identifiant les ensembles E_1 et E_2 pour lesquels $\varrho_\mu(E_1,E_2)=0$, nous pouvons traîter $\boldsymbol{K}$ comme espace métrique avec la distance définie par la relation (*) [7]). Nous désignerons cet espace par $\mathfrak{M}(\mu)$.

Si l'espace $\mathfrak{M}(\mu)$ est séparable, on dit aussi que la mesure μ est *séparable*. On voit aisément que la mesure de Lebesgue dans l'intervalle I est séparable et, plus généralement, que

(i) *Toute mesure μ dénombrablement additive dans la classe des sous-ensembles boreliens d'un espace métrique séparable Z est séparable.*

On démontre, en effet, que $G_1,G_2,\ldots$ étant une base d'ensembles ouverts dans Z, la classe des sommes finies $G_{n_1}+G_{n_2}+\ldots+G_{n_k}$ constitue un ensemble dénombrable dense dans $\mathfrak{M}(\mu)$.

Évidemment,

(ii) *Si μ est une mesure séparable dans un corps $\boldsymbol{K}$, elle l'est également dans touta corps contenu dans $\boldsymbol{K}$.*

2. INDÉPENDANCE.

2.1. Ensembles indépendants. Une classe $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles d'un ensemble X s'appelle classe d'*ensembles indépendants* (au sens de la Théorie générale des ensembles) lorsqu'on a

$$E_1^{i_1}\cdot E_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot E_n^{i_n}\neq 0$$

pour toute suite finie d'ensembles $E_m\in\boldsymbol{K}$ et pour toute suite i_m des nombres 0 et 1 (ou, en d'autres termes, lorsque chaque atome de toute classe finie contenue dans $\boldsymbol{K}$ est non vide).

Exemples. Les ensembles $D_1^n,D_2^n,\ldots,D_n^n$ définis dans 1.2 sont indépendants.

[5]) Pour la notion de mesure de Carathéodory cf. Saks [1], p. 43.
[6]) Voir Kolmogoroff [1], p. 15, et Nikodym [3].
[7]) Voir Nikodym [1], [2] et [4].

Désignons par C_0 l'ensemble des suites infinies $\{i_n\}$ où $i_n=0$ ou 1 pour $n=1,2,\ldots$ et par C^* l'ensemble des suites appartenant à C et n'ayant qu'un nombre fini de termes égaux à 1. Désignons encore par C_m et C_m^* respectivement l'ensemble des suites $\{i_n\}$ appartenant respectivement à C et à C^* telles que $i_m=1$.

Les ensembles $C_1,C_2,\ldots$ sont indépendants. Les ensembles $C_1^*,C_2^*,\ldots$ le sont aussi.

Désignons par I^n l'ensemble des points $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de l'espace euclidien à n dimensions, tels que $x_k\in I$ pour $k=1,2,\ldots,n$. Désignons ensuite par I_m^n l'ensemble des points $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in I^n$, tels que $1/2\leqslant x_m\leqslant 1$.

Les ensembles $I_1^n,I_2^n,\ldots,I_n^n$ sont indépendants.

2.2. Ensembles stochastiquement indépendants. Soit μ une mesure dans un σ-corps $\boldsymbol{M}$ de sous-ensembles de X. Une classe $\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{M}$ s'appelle classe d'ensembles *stochastiquement indépendants* par rapport à μ, lorsqu'on a

$$\mu(E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_n)=\mu(E_1)\cdot\mu(E_2)\cdot\ldots\cdot\mu(E_n)$$ [8])

pour toute suite finie d'ensembles différents $E_m\in\boldsymbol{K}$.

On voit aisément que

(i) *μ étant une mesure dénombrablement additive dans un σ-corps et $\boldsymbol{K}$ une classe d'ensembles stochastiquement indépendants par rapport à μ, on a*

$$\mu(E_1\cdot E_2\cdot\ldots)=\mu(E_1)\cdot\mu(E_2)\cdot\ldots$$

pour toute suite infinie d'ensembles différents $E_m\in\boldsymbol{K}$.

Remarquons encore que

(ii) *$\boldsymbol{K}$ étant une classe d'ensembles stochastiquement indépendants par rapport à la mesure μ, on a*

$$\mu(E_1^{i_1}\cdot E_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot E_n^{i_n})=\mu(E_1^{i_1})\cdot\mu(E_2^{i_2})\cdot\ldots\cdot\mu(E_n^{i_n})$$

pour $E_j\in\boldsymbol{K}$ et $i_j=0$ ou 1.

Il suffit évidemment de montrer qu'on a

$$\mu(E_1^0\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_n)=\mu(E_1^0)\cdot\mu(E_2)\cdot\ldots\cdot\mu(E_n).$$

[8]) Il est clair que l'indépendance stochastique d'ensembles équivaut à celle (au sens de Kolmogoroff et Steinhaus) de leurs fonctions caractéristiques (entendues au sens bien connu de de la Vallée-Poussin). Cf. Kac [1], p. 47, définition 2, ou bien Steinhaus [1] et Kolgomoroff [1], p. 50.

En effet,

$$\mu(E_1^0\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_n)=\mu(E_2\cdot E_3\cdot\ldots\cdot E_n-E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_n)=$$
$$=\mu(E_2)\cdot\mu(E_3)\cdot\ldots\cdot\mu(E_n)-\mu(E_1)\cdot\mu(E_2)\cdot\ldots\cdot\mu(E_n)=$$
$$=[1-\mu(E_1)]\cdot\mu(E_2)\cdot\ldots\cdot\mu(E_n)=\mu(E_1^0)\cdot\mu(E_2)\cdot\ldots\cdot\mu(E_n),\quad \text{c. q. f. d.}$$

Exemple. Les ensembles $I_1^n, I_2^n, \ldots, I_n^n$ définis dans 2.1 sont stochastiquement indépendants par rapport à la mesure n-dimensionnelle de Lebesgue.

2.3. Mesures dans les classes d'ensembles indépendants. Nous allons démontrer d'abord le suivant théorème d'unicité:

(o) *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures et $\boldsymbol{K}$ une classe d'ensembles stochastiquement indépendants par rapport à μ_1 et à μ_2. Si μ_1 et μ_2 coïncident dans $\boldsymbol{K}$, elles coïncident également dans $\boldsymbol{K}_0$.*

Il résulte en effet de l'additivité de μ_1 et de μ_2 qu'elles coïncident aussi pour les ensembles dont les complémentaires appartiennent à $\boldsymbol{K}$. En vertu de 2.2 (ii), elles coïncident pour les atomes des sous-classes finies de $\boldsymbol{K}$ et, en vertu de 1.3 (ii) et (iii), dans le corps $\boldsymbol{K}_0$ tout entier.

Ier théorème fondamental. $\boldsymbol{K}$ étant une classe d'ensembles indépendants, il existe, pour toute fonction $\nu(E)$ définie pour $E\in\boldsymbol{K}$ et telle que $0\leqslant\nu(E)\leqslant 1$, une mesure μ dans le plus petit corps contenant $\boldsymbol{K}$ telle que

1^0 *$\mu(E)=\nu(E)$ pour $E\in\boldsymbol{K}$,*

2^0 *les ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$ sont stochastiquement indépendants par rapport à μ.*

Remarques. 1. Les conditions 1^0 et 2^0 peuvent être formulées conjointement:

3^0 $\mu(E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_n)=\nu(E_1)\cdot\nu(E_2)\cdot\ldots\cdot\nu(E_n)$ pour $E_k\in\boldsymbol{K}$.

2. Il résulte de (o) que la mesure μ en question est unique.

Démonstration. 1. Considérons d'abord le cas où la classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles indépendants est finie:

$$\boldsymbol{K}=(Z_1, Z_2, \ldots, Z_s);\quad Z_j\subset X\quad \text{pour } j=1,2,\ldots,s.$$

Étant donnée la fonction $\nu(E)$ assujettie à l'inégalité $0\leqslant\nu(E)\leqslant 1$, on peut poser

$$\nu(E^0)=1-\nu(E)\quad \text{pour}\quad E\in\boldsymbol{K}$$

car, les ensembles $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ étant indépendants, on a

$$Z_n\neq Z_m\neq Z_n^0\neq Z_m^0\quad \text{pour } n\neq m.$$

Posons

$$\boldsymbol{K}_n=(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)\quad \text{pour}\quad n\leqslant s.$$

Nous allons définir pour tout $n\leqslant s$ une mesure μ dans $(\boldsymbol{K}_n)_0$ de façon à avoir:

(1) $$\mu_n(Z_1^{i_1}\cdot Z_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot Z_n^{i_n})=\nu(Z_1^{i_1})\cdot\nu(Z_2^{i_2})\cdot\ldots\cdot\nu(Z_n^{i_n}),$$

(2) $$\mu_n(E)=\mu_m(E)\quad \text{pour}\quad n\geqslant m,\ E\in(\boldsymbol{K}_m)_0.$$

Procédons par l'induction finie. Pour $n=1$, il suffit de poser

$$\mu_1(Z_1^i)=\nu(Z_1^i)\quad \text{où}\quad i=0 \text{ ou } 1$$
$$\mu_1(0)=0\quad \text{et}\quad \mu_1(X)=1.$$

La fonction μ_1 est évidemment une mesure dans $(\boldsymbol{K}_1)_0$.

Définissons maintenant μ_{n+1} en posant pour tout atome

$$A=Z_1^{i_1}\cdot Z_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot Z_n^{i_n}\cdot Z_{n+1}^{i_{n+1}}$$

de la classe $\boldsymbol{K}_{k+1}$:

(3) $$\mu_{n+1}(A)=\mu_n(Z_1^{i_1}\cdot Z_2^{i_2}\cdot Z_n^{i_n})\cdot\nu(Z_{n+1}^{i_{n+1}})$$

et pour tout ensemble $E\in(\boldsymbol{K}_{n+1})_0$ de la forme $E=A_1+A_2+\ldots+A_l$ (où A_j sont des atomes différents de $\boldsymbol{K}_{n+1}$)

$$\mu_{n+1}(E)=\mu_{n+1}(A_1)+\mu_{n+1}(A_2)+\ldots+\mu(A_l).$$

Posons en outre $\mu_{n+1}(0)=0$, ce qui est compatible avec (3), en vertu de l'indépendance des ensembles $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$.

L'égalité (1) étant supposée vérifée pour n, elle se trouve satisfaite d'après (3), aussi pour $n+1$.

Afin de vérifier l'égalité (2) pour $n+1$, il suffit de montrer que

$$\mu_{n+1}(A)=\mu_n(A)$$

pour les atomes A de la classe $\boldsymbol{K}_n$. En effet,

$$\mu_{n+1}(A)=\mu_{n+1}(AZ_{n+1}^0)+\mu_{n+1}(AZ_{n+1}^1)=\mu_n(A)\cdot\nu(Z_{n+1}^0)+\mu_n(A)\cdot\nu(Z_{n+1}^1)=$$
$$=\mu_n(A)\,[1-\nu(Z_{n+1})+\nu(Z_{n+1})]=\mu_n(A).$$

Posons enfin $\mu(E)=\mu_s(E)$ pour $E\in(\boldsymbol{K}_s)_0=\boldsymbol{K}_0$.

Les relations: (2) pour $n=s$ et (1) pour $n=m$ et pour $i_1=i_2=\ldots$ $\ldots=i_m=1$ entraînent 3^0.

2. Ceci établi, passons au cas général. Soit $\boldsymbol{K}=\{Z_t\}$ une classe d'ensembles indépendants, t parcourant un ensemble T. Pour chaque ensemble fini $U\subset T$, désignons par $\boldsymbol{K}_U$ la classe des ensembles Z_t, où $t\in U$. Évidemment $\boldsymbol{K}_{U+V}=\boldsymbol{K}_U+\boldsymbol{K}_V$ pour $U\subset T$ et $V\subset T$.

Soit maintenant $\nu(E)$ une fonction d'ensemble définie dans $\boldsymbol{K}$ et telle que $0\leqslant\nu(E)\leqslant 1$. Le théorème étant démontré pour les classes finies, il existe pour tout ensemble fini $U\subset T$ une mesure $\mu_U(E)$ dans le corps $(\boldsymbol{K}_U)_0$ telle qu'on a

$$\mu_U(E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_n)=\nu(E_1)\cdot\nu(E_2)\cdot\ldots\cdot\nu(E_n) \tag{4}$$

pour toute suite finie $E_1,E_2,\ldots,E_n$ d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}_U$.

Nous allons montrer que si

$$E\in(\boldsymbol{K}_U)_0 \quad\text{et}\quad E\in(\boldsymbol{K}_V)_0 \tag{5}$$

on a

$$\mu_U(E)=\mu_V(E). \tag{6}$$

En effet, il résulte de (5) que $E\in(\boldsymbol{K}_{U+V})_0$, d'où en vertu du théorème d'unicité (o):

$$\mu_U(E)=\mu_{U+V}(E)=\mu_V(E).$$

En s'appuyant sur (6) et 1.3 (iii), on peut définir dans le corps $\boldsymbol{K}_0$ la fonction μ en posant

$$\mu(E)=\mu_U(E) \quad\text{lorsque}\quad E\in(\boldsymbol{K}_U)_0. \tag{7}$$

Il reste à vérifier que μ est une fonction additive et qu'elle satisfait à la condition 3°.

En vertu de 1.3 (iii), si $E_1\in\boldsymbol{K}_0$, $E_2\in\boldsymbol{K}_0$ et $E_1E_2=0$, on a $E_1\in(\boldsymbol{K}_{U_1})_0$ et $E_2\in(\boldsymbol{K}_{U_2})_0$, où U_1 et U_2 sont des sous-ensembles finis de T. Posons $U=U_1+U_2$; par conséquent E_1,E_2 et E_1+E_2 appartiennent à $(\boldsymbol{K}_U)_0$ et on a d'après (7):

$$\mu(E_1+E_2)=\mu_U(E_1+E_2)=\mu_U(E_1)+\mu_U(E)=\mu(E_1)+\mu(E_2).$$

Quant à la condition 3°, $E_1,E_2,\ldots,E_m$ étant des ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$, désignons par $U=(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ l'ensemble des indices tels que $Z_{t_k}=E_k$. On a par conséquent en vertu de (7) et (4):

$$\mu(E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_m)=\mu_U(E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_m)=\nu(E_1)\cdot\nu(E_2)\cdot\ldots\cdot\nu(E_m),\quad\text{c. q. f. d.}$$

Le I^{er} théorème fondamental se trouve ainsi démontré. Notons que ce théorème, complété par les implications inverses, se laisse énoncer sous forme d'équivalence. Désignons, pour abréger, par (*a*) l'indépendance des ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$, par (*b*) la thèse du I[er] théorème fondamental et par (*c*) la même thèse sans la condition 2°.

Les conditions (*a*), (*b*) *et* (*c*) *sont équivalentes.*

En effet, le I[er] théorème fondamental est l'implication $(a)\rightarrow(b)$. L'implication $(b)\rightarrow(c)$ est triviale. Enfin, quant à l'implication $(c)\rightarrow(a)$, soit

$$A=E_1\cdot E_2\cdot\ldots\cdot E_n\cdot(X-E_{n+1})\cdot\ldots\cdot(X-E_{n+m})$$

un atome de $\boldsymbol{K}$ ($E_k\in\boldsymbol{K}$ pour $k=1,2,\ldots,n+m$). Il existe, d'après (*c*), une mesure μ sur $\boldsymbol{K}_0$ telle que

$$\mu(E_k)=\begin{cases}1 \text{ pour } 1\leqslant k\leqslant n,\\ 0 \text{ pour } n+1\leqslant k\leqslant n+m,\end{cases}$$

d'où

$$\mu(X-A)\leqslant\mu(X-E_1)+\mu(X-E_2)+\ldots+ \\ +\mu(X-E_n)+\mu(E_{n+1})+\ldots+\mu(E_{n+m})=0,$$

de sorte que $\mu(A)=1$, donc $A\neq 0$, c. q. f. d.

3. INDÉPENDANCE DÉNOMBRABLE.

3.1. Ensembles dénombrablement indépendants. Une classe $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles d'un ensemble X s'appelle classe d'ensembles *dénombrablement indépendants*, lorsqu'on a

$$E_1^{i_1}\cdot E_2^{i_2}\cdot E_3^{i_3}\cdot\ldots\neq 0$$

pour toute suite au plus dénombrable $\{E_n\}$ d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$ et pour toute suite $\{i_n\}$ de nombres 0 et 1 (en d'autres termes, lorsque pour toute classe au plus dénombrable contenue dans $\boldsymbol{K}$ tous les atomes sont non vides). Évidemment, l'indépendance dénombrable entraîne l'indépendance ordinaire.

Parmi les exemples donnés dans 2.1 ce sont seulement les ensembles $C_1^*, C_2^*, C_3^*,\ldots$ qui ne sont pas dénombrablementi ndépendants.

Nous nous appuyerons dans 3.4 et 3.5 sur les théorèmes suivants:

(i) *X étant un ensemble de puissance $\mathfrak{c}$, il existe une classe de puissance $2^{\mathfrak{c}}$ d'ensembles dénombrablement indépendants contenus dans X*-

(ii) *Pour tout nombre cardinal* $\mathfrak{n}$, *il existe une classe de puissance* $\mathfrak{n}$ *d'ensembles dénombrablement indépendants.*

(iii) *Il existe dans l'ensemble* C *de Cantor (donc également dans l'intervalle* I*) une classe de puissance* $\mathfrak{c}$ *d'ensembles* F_σ *dénombrablement indépendants.*

Les théorèmes (i) et (ii) résultent d'un théorème général de M. A. Tarski [9]). Nous allons démontrer le théorème (iii).

Désignons par $C^{\aleph_0}$ la puissance cartésienne dénombrable de l'ensemble C de Cantor, c.-à-d. l'espace des suites infinies de points appartenant à C. Désignons, de plus, par S^t l'ensemble des suites infinies $\{x_n\}\in C^{\aleph_0}$ admettant comme terme le point donné $t\in C$. Enfin, désignons par S_k^t l'ensemble des suites infinies $\{x_n\}\in C^{\aleph_0}$ telles que $x_k=t$. On a donc

$$S^t=S_1^t+S_2^t+\ldots\subset C^{\aleph_0}.$$

Les ensembles S^t (où t parcourt l'ensemble C) sont dénombrablement indépendants. En effet, $\{t_n\}$ et $\{t_n'\}$ étant deux suites disjointes (finies ou infinies) de points appartenant à C, il existe une suite infinie $\{x_n\}$ de points appartenant à C qui admet comme terme chaque point appartenant à $\{t_n\}$, mais n'en admet aucun appartenant à $\{t_n'\}$; en d'autres termes:

$$\prod_n S^{t_n}\cdot\prod_n (C^{\aleph_0}-S^{t_n'})\neq 0,$$

ce qui donne l'indépendance dénombrable de la classe de tous les ensembles S^t.

Les ensembles S^t sont des F_σ dans $C^{\aleph_0}$, la classe de tous les S^t est de puissance du continu.

Les espaces C et $C^{\aleph_0}$ étant homéomorphes [10]), le théorème (iii) se trouve ainsi démontré.

3.2. Condition (δ). Soit $\boldsymbol{K}$ une classe d'ensembles. Considérons le condition suivante:

(δ) Le produit de toute suite descendente $\{Z_n\}$ d'ensembles non vides de la classe $\boldsymbol{K}$ est non vide.

[9]) Tarski [2], p. 61, Hilfssatz 3.16; cf. les résultats plus faibles de MM. Fichtenholz et Kantorovitsch [1], p. 80-82, Hausdorff [1] et Tarski [1], p. 259, Lemme 58.

[10]) Cf. p. ex. Kuratowski [1], p. 148, Remarques.

Nous allons démontrer le lemme suivant qui jouera un rôle important dans la démonstration du II$^{\text{me}}$ théorème fondamental:

(i) $\boldsymbol{K}$ *étant une classe d'ensembles dénombrablement indépendants, le plus petit corps contenant* $\boldsymbol{K}$ *satisfait à la condition* (δ).

Soient, en effet,

(1) $$P_1\supset P_2\supset\ldots \quad\text{et}\quad P_n\in\boldsymbol{K}_0.$$

D'après 1.3 (iii), il existe donc une suite

(2) $$\boldsymbol{F}_1\subset\boldsymbol{F}_2\subset\ldots$$

de classes finies contenues dans $\boldsymbol{K}$ et telles que

(3) $$P_n\in(\boldsymbol{F}_n)_0.$$

Désignons par s_n nombre d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{F}_n$. En vertu de (2), on peut ranger les ensembles appartenant à toutes les classes $\boldsymbol{F}_n$ en une suite $\{Z_n\}$ de façon que $Z_k\in\boldsymbol{F}_n$ pour $k\leqslant s_n$.

On a d'après (3)

$$P_n=A_1^{(n)}+A_2^{(n)}+\ldots+A_{k_n}^{(n)},$$

où les ensembles $A_j^{(n)}$ sont des atomes disjoints de la classe $\boldsymbol{F}_n$.

En vertu de 1.2 (ii), il existe pour tout n et pour tout $p\leqslant k_{n+1}$ un nombre $q\leqslant k_n$ tel que $A_p^{(n+1)}\subset A_q^{(n)}$. Il existe par conséquent [11]) une suite descendante infinie d'atomes $A_{l_n}^{(n)}$ (où $l_n\leqslant k_n$) extraits un à un des P_n successifs.

On a donc en vertu de 1.2 (iii)

$$P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot\ldots\supset A_{l_1}^{(1)}\cdot A_{l_2}^{(2)}\cdot A_{l_3}^{(3)}\cdot\ldots=Z_1^{i_1}\cdot Z_2^{i_2}\cdot\ldots$$

Les ensembles $Z_1,Z_2,\ldots$ étant dénombrablement indépendants, on a

$$Z_1^{i_1}\cdot Z_2^{i_2}\cdot Z_3^{i_3}\cdot\ldots\neq 0$$

donc

$$P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot\ldots\neq 0,$$ c. q. f. d.

[11]) En vertu du théorème général, facile à démontrer par induction: *Étant donnée une suite infinie de suites finies d'ensembles dont chacun est contenu dans un ensemble de la suite finie précédente, il existe une suite infinie descendante formée d'ensembles extraits un à un des suites finies successives.*

Il est à noter que le lemme (i) peut être démontré facilement à l'aide de a notion de fonction caractéristique d'une suite d'ensembles[12].

En vertu de 1.3 (iii) on peut supposer sans restreindre la généralité que la classe $\boldsymbol{K}$ est dénombrable: $\boldsymbol{K}=\{Z_n\}$ où $Z_n\subset X$. Les ensembles Z_n étant dénombrablement indépendants, la fonction caractéristique $c(x)$ de la suite $\{Z_n\}$ transforme X en l'ensemble C de Cantor tout entier[13]. Si E parcourt la classe $\boldsymbol{H}$ des sous-ensembles fermés-ouverts dans C, l'ensemble $c^{-1}(E)$ parcourt le corps $\boldsymbol{K}_0$[14]. La classe $\boldsymbol{H}$ satisfaisant à la condition (δ), le corps $\boldsymbol{K}_0$ lui satisfait également.

(ii) *$\boldsymbol{K}$ étant un corps d'ensembles satisfaisant à la condition (δ), chaque mesure dans $\boldsymbol{K}$ est dénombrablement additive.*

Remarquons d'abord que chaque corps d'ensembles satisfaisant à la condition (δ) satisfait également à la condition

(δ') Si $E_n \epsilon \boldsymbol{K}$ pour $n=1,2,\ldots$ et $E=E_1+E_2+\ldots \epsilon \boldsymbol{K}$, il existe un entier $n_0>0$ tel que $E=E_1+E_2+\ldots+E_{n_0}$.

Supposons en effet qu'un corps $\boldsymbol{K}$ ne satisfasse pas à cette condition; il existe par conséquent une somme

$$E=E_1+E_2+\ldots \epsilon \boldsymbol{K}$$

telle que chaque ensemble $Z_n=E-(E_1+E_2+\ldots+E_n)$ est non vide, tandis que $Z_1\cdot Z_2\cdot\ldots=0$. Donc le corps $\boldsymbol{K}$ ne satisfait pas à la condition (δ).

Il est d'ailleurs facile de voir que (δ') équivaut à (δ).

Il est évident que toute mesure dans un corps satisfaisant à la condition (δ') est dénombrablement additive.

Remarquons que la réciproque de la dernière proposition est aussi vraie:

(iii) *Pour que toute mesure dans un corps d'ensembles $\boldsymbol{K}$ soit dénombrablement additive, il faut et il suffit que le corps $\boldsymbol{K}$ satisfasse à la condition (δ').*

Il ne s'agit qu'à démontrer que la condition est nécessaire. Supposons qu'un corps $\boldsymbol{K}$ de sous-ensembles de X ne satisfasse pas à la condition (δ'). Il existe alors une décomposition d'un ensemble $Z \epsilon \boldsymbol{K}$:

$$Z=Z_1+Z_2+\ldots$$

où les ensembles $Z_n \epsilon \boldsymbol{K}$ sont non vides et disjoints. Soit $\boldsymbol{Q}$ le plus petit corps de sous-ensembles de X contenant comme éléments les ensembles $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ En posant pour tout système $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ de nombres naturels:

$$m(X-Z)=m[(X-Z)+Z_{k_1}+Z_{k_2}+\ldots+Z_{k_n}]=m(Z_{k_1}+Z_{k_2}+\ldots+Z_{k_n})=0,$$
$$m(Z)=m[Z-(Z_{k_1}+Z_{k_2}+\ldots+Z_{k_n})]=1,$$

[12]) Voir mon travail [2].

[13]) ibidem, 3.5 (ii'), p. 214.

[14]) ibidem, 2.5 (i), p. 212.

on a une mesure dans $\boldsymbol{Q}$. En vertu du théorème connu sur le prolongement des mesures, il existe une mesure μ dans $\boldsymbol{K}$ telle que $\mu(E)=m(E)$ pour $E \epsilon \boldsymbol{Q}$. La mesure μ n'est pas dénombrablement additive:

$$m(Z_1)+m(Z_2)+\ldots=0\neq 1=m(Z), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Les proposition (i), (ii) et 1.4 (o) entraînent la proposition suivante:

(iv) *$\boldsymbol{K}$ étant une classe d'ensembles dénombrablement indépendants, il existe pour toute mesure m dans $\boldsymbol{K}_0$ une et une seule mesure μ dénombrablement additive dans $\boldsymbol{K}_\beta$, telle que $\mu(E)=m(E)$ pour $E \epsilon \boldsymbol{K}_0$.*

3.3. Mesures dans les classes d'ensembles dénombrablement indépendants. Le I^er^ théorème fondamental (2.3) et le théorème 3.2 (iv) entraînent directement le

II^me^ théorème fondamental. $\boldsymbol{K}$ étant une classe d'ensembles dénombrablement indépendants, il existe pour toute fonction $\nu(E)$ définie pour $E \epsilon \boldsymbol{K}$ et telle que $0\leqslant\nu(E)\leqslant 1$ une mesure μ dénombrablement additive dans le plus petit σ-corps contenant $\boldsymbol{K}$, telle que

1° $\mu(E)=\nu(E)$ pour $E \epsilon \boldsymbol{K}$

2° les ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$ sont stochastiquement indépendants par rapport à μ.

Il résulte de 2.3 (o) et 3.2 (iv) qu'il existe une seule mesure μ satisfaisant aux conditions 1° et 2°.

Désignons maintenant par (α) la condition de l'indépendance dénombrable des ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$, par (β) la thèse du II^me^ théorème fondamental et par (γ) la même thèse sans la condition 2°. A l'aide de 2.2 (i); on démontre aisément que $(\gamma)\rightarrow(\alpha)$; cf. la démonstration analogue de la relation $(c)\rightarrow(a)$ dans 2.3. Par conséquent:

Les conditions (α), (β) et (γ) sont équivalentes.

3.4. Ensembles stochastiquement indépendants et mesures non séparables. Il résulte de 2.2 (ii) que

(*) *A et B étant stochastiquement indépendants par rapport à μ, on a*

$$\varrho_\mu(A,B)=\mu(A)\cdot\mu(B^0)+\mu(A^0)\cdot\mu(B).$$

Il en résulte facilement que

(*) *μ étant une mesure séparable, toute classe K d'ensembles stochastiquement indépendants, et telle que $0 \neq \mu(E) \neq 1$ pour $E \in \boldsymbol{K}$, est au plus dénombrable.*

Supposons, par contre, que $\boldsymbol{K}$ soit indénombrable. Il existe par conséquent une classe indénombrable $\boldsymbol{K}' \subset \boldsymbol{K}$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tel qu'on a $\varepsilon < \mu(E) < 1 - \varepsilon$ pour $E \in \boldsymbol{K}'$. En vertu de (*), on a donc $\varrho_\mu(A,B) > 2\varepsilon^2$ pour chaque $A, B \in \boldsymbol{K}'$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de la séparabilité de la mesure μ.

Le II$^{\text{me}}$ théorème fondamental et le théorème 3.1 (iii) sur l'existence des ensembles dénombrablement indépendants impliquent la proposition suivante:

(i) *Il existe une classe $\boldsymbol{Q}$ de puissance $\mathfrak{c}$ de sous-ensembles boreliens de I et une mesure μ dans $\boldsymbol{Q}_\beta$ telle que $\mu(E) = {}^1/_2$ pour $E \in \boldsymbol{Q}$, par rapport à laquelle les ensembles de la classe $\boldsymbol{Q}$ sont stochastiquement indépendants.*

Donc, en vertu de (*):

(ii) *Il existe un σ-corps de sous-ensembles boreliens de I et une mesure μ non séparable dans lui, pour laquelle l'espace $\mathfrak{M}(\mu)$ contient une classe de puissance $\mathfrak{c}$ d'éléments dont les distances mutuelles sont égales à ${}^1/_2$.*

En vertu de 3.1 (i) et 3.1 (ii), on peut remplacer la puissance $\mathfrak{c}$ dans les énoncés (i) et (ii):

1⁰ par la puissance $2^{\mathfrak{c}}$, pourvu qu'on admette dans $\boldsymbol{Q}$ des sous-ensembles arbitraires de I (pas nécessairement boreliens).

2⁰ par une puissance infinie $\mathfrak{n}$ quelconque, pourvu qu'on admette comme $\boldsymbol{Q}$ une classe de sous-ensembles d'un ensemble arbitraire (pas nécessairement de puissance $\mathfrak{c}$) [15].

Il est à remarquer que la puissance $\mathfrak{c}$ dans le théorème (ii) et la puissance $2^{\mathfrak{c}}$ dans la remarque 1⁰ ne peuvent être augmentées.

En vertu de 1.4 (i) et 1.4 (ii), le théorème (ii) entraîne le théorème suivant:

(iii) *Il existe un σ-corps de sous-ensembles boreliens de I et une mesure dénombrablement additive dans lui qui n'est prolongeable à aucune mesure dénombrablement additive dans la classe de tous les sous-ensembles boreliens de I.*

---

[15]) Le théorème (ii) et le remarque 2⁰ résolvent les problèmes posés par M. O. Nikodym [4], p. 28; cf. aussi une remarque de M. P. Lévy [1], p. 291.

3.5. Puissance de la classe des mesures dénombrablement additives [16]). Il est facile de démontrer que la classe des mesures dénombrablement additives dans le corps de tous les sous-ensembles boreliens de I a la puissance du continu. Or, nous allons démontrer les propositions suivantes:

(i) *Il existe un σ-corps de sous-ensembles boreliens de I tel que la puissance de la classe des mesures dénombrablement additives dans lui est $2^{\mathfrak{c}}$.*

(ii) *Il existe un σ-corps de sous-ensembles de I tel que la puissance de la classe des mesures dénombrablement additives dans lui est $2^{2^{\mathfrak{c}}}$.*

$\boldsymbol{K}$ étant une classe de puissance $\mathfrak{n}$ d'ensembles indépendants et $\boldsymbol{K}_\beta$ ayant la puissance $\mathfrak{n}'$, il résulte facilement du II$^{\text{me}}$ théorème fondamental que la puissance $\mathfrak{m}$ de la classe des mesures dénombrablement additives dans $\boldsymbol{K}_\beta$ satisfait à la condition $2^{\mathfrak{n}} \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{n}'}$. Par conséquent, les propositions 3.1 (i) et 3.1 (iii) entraînent (ii) et (i).

TRAVAUX CITÉS.

Fichtenholz G. et L. Kantorovitch [1] *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.* Studia Math. **5** (1934), p. 69-98.

Hausdorff, F. [1] *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz et L. Kantorovitch.* Studia Math. **6** (1936), p. 12-19.

Kac, M. [1] *Sur les fonctions indépendantes I.* Studia Math. **6** (1936), p. 46-58.

Kolmogoroff, A. [1] *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin 1933.

Kuratowski, C. [1] *Topologie I.* Monografie Matematyczne 3. Warszawa-Lwów 1933.

Lévy, P. [1] *Distance de deux variables aléatoires et distance de deux lois de probabilité.* Note B dans le livre: M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur la Théorie des Probabilités,* I livre, Paris 1937, p. 286-292.

Marczewski (Szpilrajn), E. [1] *Ensembles indépendants et mesures non séparables.* C. R. **207** (1938), p. 768-770.

— [2] *The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications.* Fund. Math. **31** (1938), p. 207-223.

— [3] *Mesures dans les corps indépendants et les produits cartésiens.* Ann. Soc. Pol. Math. **19** - 1946 (1947), p. 247-248.

Nikodym, O. [1] *Sur une propriété de la mesure généralisée des ensembles.* Prace Mat. Fiz. **36** (1928-9), p. 65-71.

— [2] *Sur les fonctions d'ensemble.* C. R. du I Congrès Math. des Pays Slaves, Warszawa 1929 (1930), p. 304-313.

---

[16]) Cf. les résultats de MM. Fichtenholz et Kantorovitch [1], p. 84 concernant la classe de tous les mesures.

— [3] *Sur la mesure vectorielle parfaitement additive dans un corps abstrait de Boole.* Mém. Acad. R. de Belgique **17** (1938), nº 7.

— [4] *Sur l'existence d'une mesure partiellement additive et non séparable* Mém. Acad. R. de Belgique **17** (1938), nº 8.

Saks, S. [1] *Theory of the Integral.* Monografie Matematyczne 7, Warszawa-Lwów 1937.

Steinhaus, H. [1] *La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique.* Actualités Scient. et Industr. 738 (1938), p. 57-73.

Tarski, A. [1] *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires.* Fund. Math. **16** (1930), p. 181-304.

— [2] *Ideale in vollständigen Mengenkörpern I.* Fund. Math. **32** (1939), p. 45-63.

On some problems of Hausdorff and of Sierpiński.

By

Fritz Rothberger (Wolfville, N. S., Canada).

Contents:

Definitions. The reader may be familiar with most of the following definitions, which are given here for sake of completeness.

In this paper Λ denotes indiscriminately *any finite set of natural numbers*, not only the empty set[1]). Thus „$E=\Lambda$" means „E is a finite (or maybe empty) set of natural numbers". We shall write „*set of n. n.*" for „set of natural numbers" (natural number = positive integer). Two sets (of n. n.) A and B are *almost-disjoint* if $A\cdot B=\Lambda$. $A<B$ (or $B>A$) means: $A\subset B+\Lambda$. Two sets of n. n. differing in a finite number of elements shall be said to be *equivalent.* If A and B differ in an infinity of elements, i. e., if they are *not equivalent*, we write $A\nsim B$. For example, $E\nsim\Lambda$ means: E is an infinite set of n. n.

(More generally: given any order relation $<$, the symbol $\nsim$ means *non-equivalent* with respect to that relation).

A *dyadic* sequence is a sequence of 0's and 1's.

If $S=(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ and $T=(t_1, t_2, \dots, t_n, \dots)$ are two sequences of numbers (e. g., dyadic sequences),

$S\lesssim T$ means: $s_n\leqslant t_n$ for almost all n (i. e., for all $n>n_0$).

[1]) Cf., Ann. Math. **45** (1944), p. 397. The slightly changed definition enables us to discard the symbol $\sim$. The other symbol, $\nsim$, is indispensible, but the use of both together is confusing.