Sur les espaces de variables aléatoires.

Par

Stefan Mazurkiewicz †.

Préparé à l'impression et commenté par

Edward Marczewski (Wrocław).

1. Cette Note contient quelques résultats concernant l'application du procédé de prolongement de Cantor-Meray-Hausdorff, aux espaces de variables aléatoires.

2. Soit $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ une fonction arbitraire de n variables réelles; désignons par $\Delta_j^h f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ la différence partielle de f correspondant à l'accroissement h de la variable t_j , c'est-à-dire

$$(1) \quad \Delta_j^h f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + h, t_{j+1}, \dots, t_n) - f(t_1, \dots, t_j, \dots, t_n),$$

et posons

$$(2) \quad \Delta_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{b_1, b_2, \dots, b_n} f = \Delta_1^{b_1 - a_1} \left(\Delta_2^{b_2 - a_2} \left(\dots \Delta_n^{b_n - a_n - 1} \left(\Delta_n^{b_n - a_n} f(a_1, \dots, a_n) \right) \dots \right) \right).$$

3. Un espace de variables aléatoires (nous dirons par abréviation un EVA) peut être défini d'une manière abstraite par un système convenable de postulats:

Un ensemble M (dont les éléments seront appelés variables aléatoires) est un EVA si à toute suite finie $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ correspond une fonction $F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de n variables réelles (la loi totale ou distributrice des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$), satisfaisant aux conditions suivantes:

(A₁) $i_1, i_2, \dots, i_n$ étant une permutation de $1, 2, \dots, n$, on a

$$F_{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}}(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) = F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, t_2, \dots, t_n);$$

(A₂) $F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est continue à gauche;

(A₃) Si $a_j \leq b_j$, $j=1, 2, \dots, n$ on a $\Delta_{a_1, \dots, a_n}^{b_1, \dots, b_n} F_{x_1, \dots, x_n} \geq 0$;

$$(A_4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_x(t) = 1;$$

$$(A_5) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}}(t_1, \dots, t_n, t) = F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n);$$

$$(A_6) \quad \lim_{t_j \rightarrow -\infty} F_{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_j, \dots, t_n) = 0 \quad \text{pour } j=1, 2, \dots, n.$$

4. Corollaire. Chaque loi totale $F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$ est une fonction non-négative et non-décroissante par rapport à chaque variable $t_1, \dots, t_n$.

Cela résulte de (A₆) et (A₃).

5. Corollaire. Si

$$(3) \quad F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n)$$

pour tout point $(t_1, \dots, t_n)$ appartenant à un ensemble P dense dans l'espace cartésien n -dimensionnel R_n , on a (3) identiquement dans R_n .

Cela résulte de (A₂).

6. La fonction $F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$ permet de déterminer, pour tout ensemble borelien U de l'espace cartésien R_n , une fonction d'ensemble, absolument additive: la loi des probabilités $P_{x_1, \dots, x_n}(U)$.

Posons pour $a_j \leq b_j$ et $j=1, 2, \dots, n$

$$(4) \quad P_{x_1, \dots, x_n} \left(\bigcap_{j=1}^n (a_j \leq \xi_j < b_j) \right) = \Delta_{a_1, \dots, a_n}^{b_1, \dots, b_n} F_{x_1, \dots, x_n}.$$

Cette formule définit la loi des probabilités pour les intervalles n -dimensionnels semi-ouverts à droite; la définition pour les ensembles U de la famille borelienne du R_n s'en obtient par un procédé connu d'extension, basé sur l'additivité absolue (ce qui est possible grâce à la condition (A₂)). D'après (A₃) et (4), la loi de probabilité est non négative, s'annule pour $U=0$, et d'après (A₄) et (A₅) on a $P_{x_1, \dots, x_n}(R_n) = 1$.

On a en particulier, d'après (A₆) et (4),

$$(5) \quad F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = P_{x_1, \dots, x_n} \left(\bigcap_{j=1}^n (\xi_j < t_j) \right).$$

On a aussi

$$(6) \quad P_{x_1, \dots, x_n}(U) = P_{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}} \left(\bigcap_{j=1}^n (\xi_{i_j} \in U) \right)$$

pour tout ensemble borelien $U \subset R_n$ et toute permutation $i_1, \dots, i_n$ de $1, \dots, n$.

Cela résulte de (A_1) , (5) et du fait que deux fonctions absolument additives de l'ensemble UCR_n , finies et coïncidant pour tout intervalle n -dimensionnel semi-ouvert à droite, coïncident pour tout ensemble borelien UCR_n .

7. Lemme. On a pour tout ensemble borelien UCR_n

$$(7) \quad P_{x_1, \dots, x_n}(U) = P_{x_1, \dots, x_{n+m}} \left(\bigcup_{\xi_1, \dots, \xi_{n+m}} E_{\xi_1, \dots, \xi_{n+m}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \in U \right)$$

En effet, en tenant compte de (A_5) , (A_6) , (4) et de l'additivité absolue de $P_{x_1, \dots, x_n}$, on a

$$(8) \quad \begin{aligned} & P_{x_1, \dots, x_{n+1}} \left(\bigcup_{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}} E_{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}} \prod_{j=1}^n (a_j \leq \xi_j < b_j) \right) = \\ &= \lim_{\substack{a_{n+1} \rightarrow -\infty \\ b_{n+1} \rightarrow +\infty}} P_{x_1, \dots, x_{n+1}} \left(\bigcup_{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}} E_{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}} \prod_{j=1}^n (a_j \leq \xi_j < b_j) \right) = \\ &= \Delta_1^{b_1-a_1} (\Delta_2^{b_2-a_2} \dots \Delta_n^{b_n-a_n} \left(\lim_{b_{n+1} \rightarrow +\infty} F_{x_1, \dots, x_{n+1}}(a_1, \dots, a_n, b_{n+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \lim_{a_{n+1} \rightarrow -\infty} F_{x_1, \dots, x_{n+1}}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \right) \dots) = \\ &= \Delta_1^{b_1-a_1} (\Delta_2^{b_2-a_2} \dots \Delta_n^{b_n-a_n} F_{x_1, \dots, x_n}(a_1, \dots, a_n) \dots) = \\ &= P_{x_1, \dots, x_n} \left(\bigcup_{\xi_1, \dots, \xi_n} E_{\xi_1, \dots, \xi_n} \prod_{j=1}^n (a_j \leq \xi_j < b_j) \right) \end{aligned}$$

et, en partant de (8), on obtient par induction

$$(9) \quad \begin{aligned} & P_{x_1, \dots, x_{n+m}} \left(\bigcup_{\xi_1, \dots, \xi_{n+m}} E_{\xi_1, \dots, \xi_{n+m}} \prod_{j=1}^n (a_j \leq \xi_j < b_j) \right) = \\ &= P_{x_1, \dots, x_n} \left(\bigcup_{\xi_1, \dots, \xi_n} E_{\xi_1, \dots, \xi_n} \prod_{j=1}^n (a_j \leq \xi_j < b_j) \right). \end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux fonctions de l'ensemble UCR_n :

$$P_{x_1, \dots, x_n}(U), \quad P_{x_1, \dots, x_{n+m}} \left(\bigcup_{\xi_1, \dots, \xi_{n+m}} E_{\xi_1, \dots, \xi_{n+m}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \in U \right).$$

Ces fonctions sont absolument additives et, d'après (9), coïncident quand U est un intervalle n -dimensionnel semi-ouvert à droite. Elles coïncident donc pour tout ensemble borelien UCR_n . Le lemme est ainsi démontré.

8. Lemme. Pour chaque loi totale $F_{x_1, \dots, x_n}$ il existe un ensemble au plus dénombrable D de nombres réels tel que la loi $F_{x_1, \dots, x_n}$ est continue en chaque point $(t_1, \dots, t_n)$, où t_j non $\in D$ pour $j=1, \dots, n$.

Désignons par D_j ($j=1, 2, \dots, n$) l'ensemble des points de discontinuité de la loi F_{x_j} ; cette loi étant une fonction non-décroissante d'une variable réelle, D_j est un ensemble au plus dénombrable de nombres réels. Posons $D = D_1 + D_2 + \dots$

Supposons que $t'_j \leq t''_j$ pour $j=1, \dots, n$. On a

$$E_{\xi_1, \dots, \xi_n} \prod_{j=1}^n (\xi_j < t'_j) - E_{\xi_1, \dots, \xi_n} \prod_{j=1}^n (\xi_j < t''_j) \subset \sum_{j=1}^n E_{\xi_1, \dots, \xi_n} (t'_j \leq \xi_j < t''_j),$$

d'où, en vertu de (5) et du lemme 7,

$$(10) \quad F_{x_1, \dots, x_n}(t'_1, \dots, t'_n) - F_{x_1, \dots, x_n}(t''_1, \dots, t''_n) \leq \sum_{j=1}^n [F_{x_j}(t''_j) - F_{x_j}(t'_j)].$$

La fonction $F_{x_1, \dots, x_n}$ étant non-décroissante par rapport à chaque variable (d'après 4), il résulte de (10) que $F_{x_1, \dots, x_n}$ est continue dans chaque point $(t_1, \dots, t_n)$ tel que t_j non $\in D$ pour $j=1, \dots, n$.

Le lemme est ainsi démontré.

9. Le lemme précédent entraîne, en vertu de 5, ce

Corollaire. Si on a (3) pour chaque point $(t_1, \dots, t_n)$ dans lequel les lois $F_{x_1, \dots, x_n}$ et $F_{y_1, \dots, y_n}$ sont, l'une et l'autre, continues, on a (3) identiquement dans R_n .

10. Soit M un EVA. On peut le considérer comme un espace métrique, en introduisant, d'après M. Fréchet, la distance stochastique des variables aléatoires par la formule:

$$(11) \quad \rho_s(x_1, x_2) = \inf_{\lambda > 0} [\lambda + P_{x_1, x_2} \left(\bigcup_{\xi_1, \xi_2} E_{\xi_1, \xi_2} |\xi_1 - \xi_2| \geq \lambda \right)] \quad x_1, x_2 \in M.$$

11. Théorème 1. Les relations:

$$\rho_s(x_{j,k}, w_j) \rightarrow 0 \quad \text{où} \quad j=1, 2, \dots, n \quad \text{et} \quad w_{j,k}, w_j \in M$$

entraînent

$$(12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_{x_1, k, x_2, k, \dots, x_n, k}(t_1, \dots, t_n) = F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$$

en tout point $(t_1, \dots, t_n)$ où la fonction $F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n)$ est continue.

Ce théorème est bien connu; j'en reproduis la démonstration car: 1° on ne la donne en général que pour le cas $n=1$ et 2° pour mettre en évidence qu'elle dépend directement des postulats $(A_1), \dots, (A_6)$.

Supposons que l'on ait

$$(13) \quad \varrho_s(x_j, y_j) < \lambda \text{ pour } j=1, 2, \dots, n \text{ et } x_j, y_j \in M.$$

D'après (11), il existe pour $j=1, 2, \dots, n$ un $\lambda_j > 0$ tel que

$$\lambda_j + P_{x_j, y_j}(E_{\xi, \eta} |\xi - \eta| \geq \lambda_j) < \lambda.$$

Donc $\lambda_j < \lambda$, d'où

$$E_{\xi, \eta} |\xi - \eta| > \lambda \subset E_{\xi, \eta} |\xi - \eta| \geq \lambda_j.$$

Il en résulte, P_{x_j, y_j} étant une fonction d'ensemble additive et non négative et par suite non-décroissante, que

$$(14) \quad P_{x_j, y_j}(E_{\xi, \eta} |\xi - \eta| > \lambda) < \lambda \text{ pour } j=1, \dots, n.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & E_{\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n} \prod_{j=1}^n (\eta_j < t_j) \subset \\ & \subset E_{\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n} \prod_{j=1}^n (\xi_j < t_j + \lambda_j) + \sum_{j=1}^n E_{\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n} (\eta_j < t_j) (\xi_j \geq t_j + \lambda) \subset \\ & \subset E_{\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n} \prod_{j=1}^n (\xi_j < t_j + \lambda) + \sum_{j=1}^n E_{\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_n, \eta_n} (\xi_j - \eta_j > \lambda). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 7 et (5), on obtient

$$(15) \quad F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n) \leq F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 + \lambda, \dots, t_n + \lambda) + \sum_{j=1}^n P_{x_j, y_j}(E_{\xi, \eta} \xi - \eta > \lambda)$$

d'où, en permutant x_j et y_j et en remplaçant t_j par $t_j - \lambda$,

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 - \lambda, \dots, t_n - \lambda) \leq F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n) + \sum_{j=1}^n P_{y_j, x_j}(E_{\xi, \eta} \xi - \eta > \lambda)$$

et enfin, en appliquant (6) et en permutant ξ et η ,

$$(16) \quad F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n) \geq F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 - \lambda, \dots, t_n - \lambda) - \sum_{j=1}^n P_{x_j, y_j}(E_{\xi, \eta} \eta - \xi > \lambda).$$

Comme

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 - \lambda, \dots, t_n - \lambda) \leq F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) \leq F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 + \lambda, \dots, t_n + \lambda),$$

les relations (15) et (16) entraînent

$$\begin{aligned} & |F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) - F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n)| \leq F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 + \lambda, \dots, t_n + \lambda) - \\ & - F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 - \lambda, \dots, t_n - \lambda) + \sum_{j=1}^n P_{x_j, y_j}(E_{\xi, \eta} |\xi - \eta| > \lambda), \end{aligned}$$

donc d'après (14)

$$(17) \quad |F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) - F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n)| < F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 + \lambda, \dots, t_n + \lambda) - F_{x_1, \dots, x_n}(t_1 - \lambda, \dots, t_n - \lambda) + n\lambda.$$

Nous avons démontré que (9) entraîne (17). L'énoncé du théorème en résulte immédiatement.

12. Le théorème précédant et le corollaire 9 entraînent le corollaire suivant:

Corollaire. Si les variables $x, y \in M$ sont presque égales, c'est-à-dire, si $\varrho_s(x, y) = 0$, on a

$$F_{x, x_1, \dots, x_n}(t, t_1, \dots, t_n) = F_{y, x_1, \dots, x_n}(t, t_1, \dots, t_n).$$

Il en résulte que deux variables de M qui sont presque égales peuvent être identifiées, ce que nous supposons dans la suite. M devient alors un espace métrique. Ceci posé, nous allons étudier les EVA séparables.

13. Lemme. Soit M_k un EVA, $M_k \subset M_{k+1}$, $k=1, 2, \dots$. Alors l'ensemble $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$ est un EVA.

J'en omet la démonstration, qui est fort simple.

14. Soient M_1 et M_2 deux EVA; nous dirons que M_2 contient M_1 stochastiquement, si l'on peut faire correspondre à tout $x \in M_1$ un $y(x) \in M_2$ tel que

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)}(t_1, \dots, t_n) \text{ pour } x_1, \dots, x_n \in M_1.$$

La transformation $y(x)$ est évidemment une isométrie au sens de la définition (11).

Si cette transformation définit une correspondance biunivoque entre M_1 et M_2 (après l'identification des variables presque égales), nous dirons que M_1 et M_2 sont stochastiquement équivalents.

Un EVA séparable sera appelé *universel* s'il contient stochastiquement tout EVA séparable.

15. Soit M un EVA. M étant un espace métrique, on peut appliquer à cet espace le procédé bien connu de Cantor-Meray-Hausdorff, ce qui donne un nouvel espace métrique et complet $M^* \supset M$; nous appellerons M^* l'extension complète de M . Si M est complet lui-même, on a $M^* = M$.

Lemme. Soit M un EVA contenu stochastiquement dans un EVA complet M_1 . Alors l'extension complète de M peut être considérée, et cela d'une seule manière, comme un EVA contenant M .

Soit $u \in M^*$. On a donc $u = \{x_k\}$ où $x_k \in M$ et $\{x_k\}$ est une suite fondamentale (c. à d. satisfaisant à la condition de Cauchy). D'après l'hypothèse, à tout $x \in M$ correspond un $y(x) \in M_1$ tel que

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{y(x_1), \dots, y(x_n)}(t_1, \dots, t_n) \quad \text{où } x_1, \dots, x_n \in M.$$

Cette transformation est évidemment une isométrie; donc $\{y(x_k)\}$ est une suite fondamentale; donc, M_1 étant supposé complet, cette suite converge stochastiquement vers un élément $y(u)$ de M_1 (ce qui veut dire que $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_s(y(x_k), y(u)) = 0$). Posons maintenant

$$F_{u_1, \dots, u_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{y(u_1), \dots, y(u_n)}(t_1, \dots, t_n) \quad \text{où } u_1, \dots, u_n \in M^*.$$

De cette manière M^* devient un EVA contenant M et contenu stochastiquement dans M_1 . Une détermination différente de $F_{u_1, \dots, u_n}(t_1, \dots, t_n)$ est impossible en vertu du théorème 1 et du lemme 9. Le lemme est ainsi démontré.

16. Passons maintenant au problème de la construction des EVA. Envisageons d'abord l'espace L des fonctions $f(\tau)$ mesurables pour $0 \leq \tau < 1$. On sait que L peut être considéré comme un EVA si l'on pose

$$(18) \quad F_{f_1, \dots, f_n}(t_1, \dots, t_n) = \text{mesure de } \bigcap_{j=1}^n [f_j(\tau) < t_j].$$

En vertu de (5), on a donc

$$(19) \quad P_{f_1, \dots, f_n}(U) = \text{mesure de } \bigcap_{j=1}^n \{f_j(\tau), \dots, f_n(\tau) \in U\}$$

pour tout ensemble borelien $U \subset R_n$.

L est espace séparable et complet.

17. En second lieu, envisageons le procédé classique de la formation des EVA, à savoir celui qui se rattache à l'étude des gains et pertes d'un joueur dans un jeu de hasard. Ce procédé peut être décrit d'une manière abstraite comme il suit.

Soit (B, p) un *champs de probabilité fini*, c. à d. réunion d'un corps de Boole fini B et d'une probabilité $p(a)$ définie pour $a \in B$ et satisfaisant aux axiomes de M. Kolmogoroff (moins l'axiome de continuité, qui est superflu, le corps B étant supposé fini). Désignons par $At(B)$ l'ensemble des atomes du corps B . B étant fini, tout $a \in B$ se décompose (et d'une seule manière) en une somme d'atomes. Les atomes sont évidemment les cas possibles de la théorie classique. Cette dernière les suppose également possibles et détermine la probabilité classique par la formule $p_a(a) = l_a/l$ où l_a désigne le nombre d'atomes contenus dans a , et l — le nombre total d'atomes.

On peut attacher au champ (B, p) un EVA, qui sera désigné par $M(B, p)$, de la manière suivante. $M(B, p)$ est l'ensemble de fonctions réelles $y(\beta)$ définies pour $\beta \in At(B)$; la loi totale de $y_1(\beta), y_2(\beta), \dots, y_n(\beta) \in M(B, p)$ est déterminée par la formule

$$F_{y_1, y_2, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n) = \Sigma p(\beta),$$

la somme Σ s'étendant à tous les $\beta \in At(B)$ qui satisfont à la condition $\prod_{j=1}^n ((y_j(\beta) < t_j))$.

Soient B_1 un corps de Boole contenu dans B , $z(\beta') \in M(B_1, p)$ et $\beta' \in At(B_1)$. Déterminons $y_z(\beta) \in M(B, p)$ par la condition

$$y_z(\beta) = z(\beta') \quad \text{pour } \beta \subset \beta'.$$

On vérifie facilement que

$$F_{z_1, \dots, z_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{y_{z_1}, y_{z_2}, \dots, y_{z_n}}(t_1, \dots, t_n);$$

$M(B, p)$ contient donc $M(B_1, p)$ stochastiquement. Or, faisons la convention (d'ailleurs généralement admise tacito consensu), d'identifier les variables $z(\beta')$ et $y_z(\beta)$. Cette convention faite, on a

$$(20) \quad B_1 \subset B \rightarrow M(B_1, p) \subset M(B, p).$$

18. Considérons en particulier le jeu de pile et face, composé de m coups. Le corps de Boole correspondant sera désigné par D_m ; il est déterminé par ses atomes, au nombre de 2^m , qui sont les 2^m parties possibles composées de m coups et qui peuvent être représentées par les suites dyadiques $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, où $\gamma_j = 0$ (pile) ou 1 (face). La probabilité classique p_c d'un atome est $1/2^m$, ce qui la détermine pour tout élément de D_m . On a évidemment $D_m \subset D_{m+1}$, et les probabilités classiques dans D_m et D_{m+1} sont compatibles. D'après (20) il en résulte que $M(D_m, p_c) \subset M(D_{m+1}, p_c)$. Donc, d'après le lemme 13, l'ensemble

$$M_0 = \sum_{m=1}^{\infty} M(D_m, p_c)$$

est un EVA. Nous appellerons M_0 l'espace des variables aléatoires du jeu de pile et face.

Théorème 2. L'extension complète de l'espace des variables aléatoires du jeu de pile et face est un espace de variables aléatoires universel.

19. Désignons par L l'ensemble des fonctions $f \in L$ possédant la propriété suivante: pour un m naturel, $f(\tau)$ est constante dans tout intervalle $E(k/2^m \leq \tau < (k+1)/2^m)$, où $k = 0, \dots, 2^m - 1$.

L_1 , comme sous-ensemble de L , sera traité comme un EVA.

Lemme. M_0 et L_1 sont équivalents stochastiquement.

Soit $x \in M_0$; alors, pour une valeur de m , on a $x \in M(D_m, p_c)$, donc $x = x(\beta)$ où $\beta \in At(D_m)$, donc $x = x[(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)]$ où $\gamma_j = 0$ ou 1. Faisons correspondre à x la fonction $f_x \in L_1$ déterminée par la condition

$$f_x(\tau) = x(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \text{ pour } \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2^2} + \dots + \frac{\gamma_m}{2^m} \leq \tau < \frac{\gamma_1}{2} + \dots + \frac{\gamma_m}{2^m} + \frac{1}{2^m}.$$

La démonstration que l'on a

$$F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}}(t_1, \dots, t_n) \text{ pour } x_1, \dots, x_n \in M_0$$

et que la correspondance f_x est biunivoque ne présente aucune difficulté.

Corollaire. M_0^* est un EVA.

C'est une conséquence immédiate des lemmes 15 et 19.

D'après le lemme précédent, il suffit pour la démonstration du théorème 2, de démontrer que L_1^* est un EVA universel.

20. Désignons par L_2 l'ensemble des fonctions $f \in L$, à un nombre fini de valeurs dont chacune est admise sur un intervalle semi-ouvert à droite:

$$f(\tau) = t_j \text{ pour } \tau_{j-1} \leq \tau < \tau_j, \text{ où } 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_r = 1.$$

Il est facile de construire pour chaque $f \in L_2$ une suite $f_n \in L_1$ telle que $\varrho_s(f_n, f) \rightarrow 0$, d'où

Lemme. $L_2 \subset L_1^*$.

21. Lemme. L_1^* contient stochastiquement tout EVA dénombrable.

Soient en effet: N un EVA dénombrable et $y_1, y_2, \dots$ ses éléments. Il s'agit de déterminer une suite $f_1, f_2, \dots \in L_1^*$ telle que

$$(21) \quad F_{y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}}(t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k}) = F_{f_{j_1}, f_{j_2}, \dots, f_{j_k}}(t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k}),$$

$j_1, j_2, \dots, j_k$ étant une suite d'indices. D'après (A_1) la suite $j_1, j_2, \dots, j_k$ peut être supposée croissante. Posons $j_k = n$. On aura alors d'après (A_1) et (A_5) :

$$F_{y_{j_1}, \dots, y_{j_k}}(t_{j_1}, \dots, t_{j_k}) = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \dots \lim_{t_{n-k} \rightarrow +\infty} F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n),$$

$r_1, r_2, \dots, r_{n-k}$ désignant les indices de la suite 1, 2, ..., n qui ne figurent pas dans la suite $j_1, j_2, \dots, j_n$. Il s'ensuit que (21) aura lieu si l'on a pour tout n naturel

$$(22) \quad F_{y_1, y_2, \dots, y_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = F_{f_{r_1}, f_{r_2}, \dots, f_{r_n}}(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Pour $m = 1, 2, \dots, k, r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ et $r = 1, 2, \dots, m$ on a en vertu de la relation

$$E\left(\frac{k}{2^m} \leq \eta < \frac{k+1}{2^m}\right) = E\left(\frac{2k}{2^{m+1}} \leq \eta < \frac{2k+1}{2^{m+1}}\right) + E\left(\frac{2k+1}{2^{m+1}} \leq \eta < \frac{2k+2}{2^{m+1}}\right),$$

où $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, et de l'additivité absolue de la fonction d'ensemble $P_{y_1, \dots, y_n}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} P_{y_1} \left(E_{\eta_1} \frac{k_1}{2} \leq \eta_1 < \frac{k_1+1}{2} \right) = 1 \\ & \sum_{l_1=2k_1}^{2k_1+1} \dots \sum_{l_m=2k_m}^{2k_m+1} \sum_{l_{m+1}=-\infty}^{+\infty} P_{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}} \left(E_{\eta_1, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}} \prod_{r=1}^{m+1} \left(\frac{l_r}{2^{m+1}} \leq \eta_r < \frac{l_r+1}{2^{m+1}} \right) \right) = \\ & = P_{y_1, \dots, y_m} \left(E_{\eta_1, \dots, \eta_m} \prod_{r=1}^m \left(\frac{k_r}{2^m} \leq \eta_r < \frac{k_r+1}{2^m} \right) \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons par suite déterminer un système d'intervalles semi-ouverts à droite (qui, d'ailleurs, peuvent être vides) $H_{k_1, k_2, \dots, k_m}$ où $m=1, 2, \dots, r=1, 2, \dots, m$ et $k_r=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, satisfaisants aux conditions suivantes:

$$(23) \quad H_{k_1, \dots, k_m} \cdot H_{k'_1, \dots, k'_m} = 0$$

si la suite d'indices $k_1, \dots, k_m$ diffère de $k'_1, \dots, k'_m$;

$$(24) \quad \text{mesure de } H_{k_1, \dots, k_m} = P_{y_1, \dots, y_m} \left(E_{\eta_1, \dots, \eta_m} \prod_{j=1}^m \left(\frac{k_j}{2^m} \leq \eta_j < \frac{k_j+1}{2^m} \right) \right)$$

$$(25) \quad E_{\tau} (0 \leq \tau < 1) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} H_{k_1}$$

$$(26) \quad \sum_{l_1=2k_1}^{2k_1+1} \dots \sum_{l_m=2k_m}^{2k_m+1} \sum_{l_{m+1}=-\infty}^{+\infty} H_{l_1, \dots, l_m, l_{m+1}} = H_{k_1, \dots, k_m}.$$

Posons ensuite

$$(27) \quad f_{m,r}(\tau) = \frac{k_r}{2^m} \quad \text{pour } \tau \in H_{k_1, \dots, k_m}, \quad r=1, 2, \dots, \quad m=r, r+1, \dots,$$

En vertu des conditions (23), (25) et (26), les fonctions $f_{m,r}$ (où $m \geq r$) sont ainsi définies dans l'intervalle $0 \leq \tau < 1$ tout entier.

Je dis que, pour un r fixe, la suite $\{f_{m,r}(\tau)\}$ converge uniformément pour $0 \leq \tau < 1$. En effet, soit $\tau \in H_{k_1, \dots, k_m}$, où $m \geq r$; si $\tau \in H_{l_1, \dots, l_{m+1}}$ on a alors ou bien $l_r = 2k_r$, ou bien $l_r = 2k_r + 1$, donc

$$(28) \quad f_{m,r}(\tau) = \frac{k_r}{2^m} \quad f_{m+1,r}(\tau) = \frac{l_r}{2^{m+1}} = \frac{k_r}{2^m} \quad \text{ou bien} \quad \frac{k_r}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}.$$

On a donc pour $0 \leq \tau < 1$

$$|f_{m,r}(\tau) - f_{m+1,r}(\tau)| \leq \frac{1}{2^{m+1}},$$

ce qui démontre la convergence uniforme de $\{f_{m,r}(\tau)\}$. Posons

$$(29) \quad f_r(\tau) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f_{m,r}(\tau).$$

On a bien $f_{m,r} \in L_2$ et, d'après le lemme 20, $f_r \in L_2^*$.

Démontrons maintenant (22). Considérons dans R_n l'ensemble V_n des points $(t_1, \dots, t_n)$ pour lesquels t_j est irrationnel ($j=1, 2, \dots, n$) et dans lesquels les deux lois totales $F_{y_1, \dots, y_n}$ et $F_{f_1, \dots, f_n}$ sont continues. D'après le lemme 8 l'ensemble V_n est dense dans R_n et d'après 5 les lois totales $F_{y_1, \dots, y_n}$ et $F_{f_1, \dots, f_n}$ sont déterminées dans R_n par les valeurs qu'elles prennent dans V_n . Il suffit donc de démontrer (21) pour $(t_1, \dots, t_n) \in V_n$.

Soit donc $(t_1, \dots, t_n) \in V_n$ et $\varepsilon > 0$. En vertu de (29), et du théorème 1, on peut déterminer un m_1 de manière que pour $m \geq m_1$:

$$(30) \quad |F_{f_{m,1}, \dots, f_{m,n}}(t_1, \dots, t_n) - F_{f_1, \dots, f_n}(t_1, \dots, t_n)| < \varepsilon.$$

Les nombres t_j étant irrationnels, il existe pour tout $j=1, 2, \dots, n$ et $m=1, 2, \dots$ un nombre $q_{m,j}$ tel que

$$(31) \quad \frac{q_{m,j}}{2^m} < t_j < \frac{q_{m,j}+1}{2^m}.$$

On peut donc déterminer un m_2 de manière que pour $m \geq m_2$:

$$(32) \quad \left| F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n) - F_{y_1, \dots, y_n} \left(\frac{q_{m,1}+1}{2^m}, \dots, \frac{q_{m,n}+1}{2^m} \right) \right| < \varepsilon.$$

Les fonctions $f_{m,n}(\tau)$ n'admettent que les valeurs de la forme $\frac{q}{2^m}$; on a donc, en vertu de (31):

$$(33) \quad F_{f_{m,1}, \dots, f_{m,n}}(t_1, \dots, t_n) = F_{f_{m,1}, \dots, f_{m,n}} \left(\frac{q_{m,1}+1}{2^m}, \dots, \frac{q_{m,n}+1}{2^m} \right).$$

Je dis que pour tout $m \geq n$ et p , entiers

$$(34) \quad F_{f_{m,1}, \dots, f_{m,n}} \left(\frac{p_1+1}{2^m}, \dots, \frac{p_n+1}{2^m} \right) = F_{y_1, \dots, y_n} \left(\frac{p_1+1}{2^m}, \dots, \frac{p_n+1}{2^m} \right).$$

On a en effet, en vertu de (5), 7, (23), (24) et (27):

$$\begin{aligned} & F_{y_1, \dots, y_n} \left(\frac{p_1+1}{2^m}, \dots, \frac{p_n+1}{2^m} \right) = \\ & = P_{y_1, \dots, y_n} \left(E \prod_{\eta_1, \dots, \eta_n, j=1}^n \eta_j < \frac{p_j+1}{2^m} \right) = P_{y_1, \dots, y_n, \dots, y_m} \left(E \prod_{\eta_1, \dots, \eta_m, j=1}^n \eta_j < \frac{p_j+1}{2^m} \right) = \\ & = P_{y_1, \dots, y_m} \left(\sum_{k_1=-\infty}^{p_1} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{p_n} \sum_{k_{n+1}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} E \prod_{\eta_1, \dots, \eta_m, j=1}^m \frac{k_j}{2^m} \leq \eta_j < \frac{k_j+1}{2^m} \right) = \\ & = \text{mesure de } \sum_{k_1=-\infty}^{p_1} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{p_n} \sum_{k_{n+1}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} H_{k_1, \dots, k_m} = \\ & = F_{f_{m,1}, \dots, f_{m,n}} \left(\frac{p_1+1}{2^m}, \dots, \frac{p_n+1}{2^m} \right). \end{aligned}$$

Pour $m \geq \max(m_1, m_2, n)$ on a donc simultanément (30), (33), (34) et (32), d'où

$$|F_{f_{m,1}, \dots, f_{m,n}}(t_1, \dots, t_n) - F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n)| < 2\varepsilon.$$

ε étant un nombre positif arbitraire, on a (22), c. q. f. d.

22. Lemme. Soient P et Q deux EVA tels que $P \subset Q$ et $\bar{P} = Q$. Si P est contenu stochastiquement dans un EVA complet M , l'espace Q est également contenu stochastiquement dans M .

Désignons par ρ_s la distance stochastique dans Q et par ρ_o la distance stochastique dans M . D'après l'hypothèse, il existe une fonction φ telle que $\varphi(x) \in M$ pour $x \in P$ et

$$(35) \quad F_{x_1, \dots, x_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)}(t_1, \dots, t_n) \text{ pour } x_1, \dots, x_n \in P$$

d'où, a plus forte raison, $\rho_s(x_1, x_2) = \rho_o[\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$ pour $x_1, x_2 \in P$.

L'espace P étant dense dans Q et M étant complet, on prolonge aisément φ à tout l'espace Q de manière que $\varphi(Q) \subset M$ et

$$(36) \quad \rho_s(x_1, x_2) = \rho_o[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] \text{ pour } x_1, x_2 \in Q.$$

Pour démontrer que Q est contenu stochastiquement dans M il suffit de démontrer qu'on a

$$(37) \quad F_{y_1, \dots, y_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_n)}(t_1, \dots, t_n) \text{ pour } y_1, \dots, y_n \in Q.$$

Une suite finie $y_1, \dots, y_n \in Q$ étant donnée, considérons pour $j=1, \dots, n$ une suite $x_{j,k} \in P$ telle que

$$(38) \quad \rho_s(x_{j,k}, y_j) \rightarrow 0.$$

Les relations (36) et (38) entraînent

$$(39) \quad \rho_o[\varphi(x_{j,k}), \varphi(y_j)] \rightarrow 0.$$

D'après (35), on a

$$F_{x_{1,k}, \dots, x_{n,k}}(t_1, \dots, t_n) = F_{\varphi(x_{1,k}), \dots, \varphi(x_{n,k})}(t_1, \dots, t_n) \text{ pour } k=1, 2, \dots$$

En vertu du théorème 1, on a donc (37) pour chaque point $(t_1, \dots, t_n)$ dans lequel les lois totales $F_{y_1, \dots, y_n}$ et $F_{\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_n)}$ sont, l'une et l'autre, continues. Donc, en vertu du corollaire 9, ces lois sont égales partout dans R_n , c. q. f. d.

23. Les lemmes 21 et 22 entraînent ce

Corollaire. L_1^* est un EVA universel.

D'après 19, le théorème 2 est ainsi démontré.

Commentaire.

1. Ce travail avait été écrit par Stefan Mazurkiewicz en 1939 et devait paraître dans le volume XXXIII de „Fundamenta Mathematicae“. Le manuscrit, déjà à l'imprimerie de l'Université de Cracovie, a été brûlé pendant l'occupation hitlérienne; il n'est resté qu'une partie de la composition typographique, sans renvois et sans une quantité de formules.

D'après ce matériel incomplet, j'ai reconstruit le travail en 1948-9, en y introduisant quelques modifications formelles. Je n'ai pas essayé de reconstruire les renvois qui, il n'est pas de doutes, se rapportaient avant tout au livre fondamental de M. A. Kolmogoroff¹⁾.

¹⁾ A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Ergebnisse der Mathematik II, 3), Berlin 1933.

2. Quant à la notation, le symbole $\prod_{j=1}^n$ est entendu par l'auteur au sens de la Logique: pour tout $j=1, 2, \dots, n$.

On prouve facilement que la convergence dans l'espace métrique définie au n° 10 est équivalente dans l'espace L (n° 16) à la convergence asymptotique, et que $L_1^* = L$.

3. Il est à remarquer que la condition (A_3) formulée déjà par Daniell dans un Mémoire peu connu²⁾ avait été ensuite souvent omise³⁾, ce qui n'était pas juste. Mazurkiewicz, auquel ledit travail était problemement inconnu, a introduit lui-même cette condition et prouvé que la non-décroissance des distributrices, appliquée parfois au lieu de (A_3) , n'est pas suffisante.

4. L'interprétation de la notion de EVA au n° 16 peut être généralisée: au lieu de la mesure de Lebesgue dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, on peut employer une mesure abstraite normée, σ -additive. De plus, il résulte du théorème de Daniell-Kolmogoroff⁴⁾ que chaque EVA peut être interprété de cette manière. Ceci permet de formuler le résultat principal de ce travail comme un théorème concernant les classes de fonctions mesurables par rapport à une mesure abstraite. Ceci permet aussi de parvenir au résultat de Mazurkiewicz sur une autre voie, à savoir à l'aide du théorème d'après lequel la mesure de Lebesgue est, dans un sens, universelle pour toutes les mesures séparables⁵⁾. J'aborderai ce sujet ailleurs.

Il est cependant à remarquer que, pour les probabilistes, les distributrices des variables sont préférables aux variables mêmes⁶⁾ et le jeu de pile et face est préférable à l'espace des fonctions mesurables. Sous cet aspect l'énoncé de Mazurkiewicz semble être particulièrement réussi.

E. M.

²⁾ P. J. Daniell, *Integrals in an infinite number of dimensions*, Annals of Math. (2), **20** (1918-9), p. 281-8, et *Functions of limited variation in an infinite number of dimensions*, Annals of Math. (2), **21** (1919-20), p. 30-38.

³⁾ Cette condition ne figure ni dans le livre de M. Kolmogoroff, cité ci-dessus (voir en particulier p. 18), ni dans *Random variables and probability distributions* de M. H. Cramér (Cambridge 1937). On la trouve dans le livre plus récent de M. Cramér: *Mathematical methods of statistics* (Princeton 1946), p. 79.

⁴⁾ Kolmogoroff, l. c., p. 27.

⁵⁾ Cf. p. ex. la communication de E. Marczewski, *Sur l'isomorphie des mesures séparables*, Colloquium Mathematicum **1** (1947), p. 39-40 et les travaux y cités.

⁶⁾ Voir p. ex. P. Lévy, *Théorie de l'addition de variables aléatoires*, Paris 1937, p. XVI et J. L. Doob, *Probability in function space*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), p. 15-30, en particulier p. 15.

Complementary domains of continuous curves¹⁾.

By

R. H. Bing (Madison, Wisc., U. S. A.).

1. Introduction. Suppose that space is metric, compact, connected, and locally connected. It is known that each pair of points can be joined by an arc. If the space is locally topologically equivalent to a subset of the plane, then each complementary domain of this arc has property S . In this paper we show that the arc may be so chosen that its complementary domains have property S even if the space is not locally planar.

Much of this paper is devoted to the development of theorems regarding partitionings. The results regarding the complements of continuous curves are applications of these results. Although finite coverings by open sets could be used to prove these results, once the theorems regarding partitionings are demonstrated, partitionings seem to be a more efficient method of accomplishing them. It is hoped that partitionings will be useful in other connections. As pointed out in sections 4 and 5, problems handled by other methods can sometimes be treated effectively by using partitionings. In fact, partitionings provided a means for showing [2,3] that a compact continuous curve (locally connected continuum) can be convexified. The study of partitionings throws light on the structure of continuous curves and is of interest aside from its applications.

We shall use the following definitions.

Property S . A set M has property S if for each positive number ϵ , M is the sum of a finite number of connected subsets each of diameter less than ϵ .

Uniformly locally connected. A set M is uniformly locally connected if for each positive number ϵ there is a positive number $\delta(\epsilon)$ such that each pair of points of M at a distance apart of less than $\delta(\epsilon)$ belong to a connected subset of M of diameter less than ϵ .

¹⁾ Presented to the American Mathematical Society, November 26, 1948.