Errata

Page, ligne	*Au lieu de*	*Lire*
97_8	$\sum_{n=1} X_n^{\infty}$	$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$
111^3	$a, b)$	(a, b)
131_9	$\int_0^1$	$\int_b^a$
185^9	β^i	β_i
187_4	$\alpha_2 x^{\beta_1+p}$	$\alpha_2 x^{\beta_2+p}$

Sur une méthode d'estimation des moyennes de Weyl pour les fonctions périodiques et presque périodiques

par

S. HARTMAN (Wrocław).

I. Introduction. Notions et théorèmes préliminaires.

Désignons par $f(t)$ une fonction de variable réelle à valeurs complexes, à période 1, intégrable (R) dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. Selon le théorème connu de WEYL on a pour tout ξ irrationnel

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\big(f(\xi)+\ldots+f(N\xi)\big)=\int_0^1 f(t)\,dt,$$

ou, en autres symboles,

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{j=1}^{N} f(j\xi)=\mathcal{M}_f, \tag{1}$$

$\mathcal{M}_f$ désignant, comme en général (pas seulement pour les fonctions périodiques) la valeur moyenne $\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T f(t)\,dt$, ici égale à $\int_0^1 f(t)\,dt$. Appelons l'expression $N^{-1}\sum_{j=1}^{N} f(j\xi)$ *moyenne de Weyl* [1]) de la fonction périodique $f(t)$ et posons

$$G(f,\xi,N)=\sum_{j=1}^{N} f(j\xi)-N\mathcal{M}_f. \tag{2}$$

On a alors en vertu de (1) pour tout ξ irrationnel

$$G(f,\xi,N)=o(N).$$

---

[1]) Pour ce terme cf. S. Hartman, E. Marczewski et Cz. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Colloquium Mathematicum II, 2 (1950), p. 109-123, surtout p. 114.

Des estimations plus précises de G comme fonction de N dépendent évidemment de deux facteurs: des propriétés analytiques de la fonction $f(t)$ et des propriétés arithmétiques du nombre ξ.

On dit que le nombre irrationnel ξ est du type μ, si μ est la borne supérieure (supposée finie) des nombres a tels que l'inégalité $|q\xi-p|<1/q^a$ admet une infinité de solutions entières p et q.

Désignons par β_ν les dénominateurs du développement de ξ en fraction continue et par p_ν/q_ν — les réduites de cette fraction. On sait que

(3) $$q_{\nu+1}=\beta_{\nu+1}q_\nu+q_{\nu-1}.$$

En posant $q_{\nu+1}=q_\nu^{\mu_\nu}$, il vient [2])

(4) $$\mu=\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,\mu_\nu.$$

Soit $\varphi(t)>0$ une fonction continue pour $t>0$; admettons que $t^2\varphi(t)$ tend de manière monotone vers 0 pour $t\to\infty$. On a alors le suivant théorème de Khintchine [3]): *l'inégalité* $|q\xi-p|<q\varphi(q)$ *admet pour presque tout* ξ *au plus un nombre fini de solutions entières* p *et* q, *ou bien elle admet pour presque tout* ξ *une infinité de telles solutions, suivant le cas:* $\int\limits_0^\infty t\varphi(t)\,dt<\infty$ *ou bien* $\int\limits_0^\infty t\varphi(t)\,dt=\infty$.
De la première partie de ce théorème (pour $\varphi(t)=1/t^{a+1}$, $a>1$), ainsi que du résultat classique concernant les fractions p_ν/q_ν on conclut que presque tous nombres sont du type 1.

Citons encore le théorème de Thue: *si* ξ *est un nombre algébrique du degré* $n\geqslant 2$, *l'inégalité* $|q\xi-p|<1/q^{\frac{n}{2}+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ *n'admet qu'un nombre fini de solutions entières* (nous laissons de côté les résultats ultérieurs qui sont encore plus précis). On en déduit que tout nombre algébrique du degré $n\geqslant 2$ est du type $\mu\leqslant n/2$. En particulier, les nombres du 2ème degré sont du type 1. D'après (3) et (4), il en est de même pour tout nombre irrationnel ξ pour lequel les β_ν sont bornés.

---

[2]) Voir par exemple: J. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Springer, Berlin (1936), p. 27-28.

[3]) A. Khintchine, *Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen*, Mathematische Annalen 92 (1924), p. 115-125.

Dans ce cas on a de plus

(5) $$|m\xi-n|>M/|n|\qquad (m,n \text{ entiers};\ n\neq 0),$$

où M est une constante positive qui dépend de ξ. On obtient (5) en vertu de (3), en tenant compte de la relation $|\xi-p_\nu/q_\nu|>1/2q_\nu q_{\nu+1}$ et de ce que $(m,n)=1$, $m\neq q_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$ entraînent

$$|\xi-n/m|>1/2m^2.$$

Les recherches spéciales sur les moyennes de Weyl concernent surtout, quoique non exclusivement [4]), des cas, où $f(t)$ est une fonction bien déterminée, un des polynômes de Bernoulli $P_k(t)$ par exemple.

Puisque c'est le cas qui nous intéresse, rappelons la définition de ces polynômes, en désignant par $[t]$ la partie entière de t:

$$P_1(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{si } t=[t],\\ \dfrac{i}{2\pi}\sideset{}{'}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{n}e^{2\pi int}, & \text{si } t\neq[t],\end{cases}$$

(6) $$P_{2r}(t)=(-1)^{r-1}\frac{1}{(2\pi)^{2r}}\sideset{}{'}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^{2r}}e^{2\pi int},$$

$$P_{2r+1}(t)=(-1)^{r}\frac{i}{(2\pi)^{2r+1}}\sideset{}{'}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^{2r+1}}e^{2\pi int},$$

où Σ' signifie que la valeur $n=0$ est omise dans la sommation. On a

(7) $P_2'(t)=P_1(t)$ pour $t\neq[t]$, $P_{k+1}'(t)=P_k(t)$ pour tout t et $k>1$,

(8) $$\int\limits_0^1 P_k(t)\,dt=0\qquad\text{pour tout } k \text{ naturel.}$$

Posons encore

(9) $$R_k(\xi,N)=\sum_{j=1}^{N}P_k(j\xi)=G(P_k,\xi,N).$$

---

[4]) Cf. par exemple J. Koksma, *Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige verdeeling modulo* 1; Mathematica B (Zutphen) 11 (1942), p. 7-11. On y considère les sommes $\sum\limits_{j=1}^{N}f(\xi_j)$, $f(t)$ étant à variation bornée et $\{\xi_j\}$ étant une suite quelconque.

Behnke[5]) a montré que

(10) $R_k(\xi, N) = O(1)$ pour $k \geqslant 2$ et pour ξ du type $\mu < k$.

Cet auteur fit l'usage de l'inégalité

$$(11)\qquad \frac{1}{|\sin \pi n\xi|} < \text{const} \cdot \left(\frac{1}{n\xi - [n\xi]} + \frac{1}{1 - n\xi + [n\xi]}\right) \quad \text{pour } n\xi \neq [n\xi],$$

de laquelle il obtint, pour tout ξ irrationnel et pour $k \geqslant 2$, k étant réel,

$$(12)\qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k |\sin \pi n\xi|} < \text{const} \cdot \sum_{\nu \leqslant r} \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu^k},$$

où r est un nombre naturel qui dépend de ξ et de N. De (12) et de la relation presque évidente

$$(13)\qquad |R_k(\xi, N)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^k} \Big|\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i j n \xi}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^k |\sin \pi n\xi|}$$

résulte (10), parce que d'après (4) on a, pour $\alpha > \mu$ et pour tout ν suffisamment grand, $q_{\nu+1} < q_\nu^\alpha$, d'où $q_{\nu+1}/q_\nu^k < q_\nu^{\alpha-k}$, ce qui entraîne la convergence de $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu^k}$ pour $\mu < \alpha < k$ vu $q_\nu > (3/2)^\nu$ pour ν suffisamment élevé.

On peut facilement remplacer les inégalités (13) par d'autres plus générales: en admettant $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t}$, $a_0 = \mathcal{M}_f$, on obtient

$$(14)\qquad |G(f, \xi, N)| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i j n \xi}| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left|\frac{a_n}{\sin \pi n\xi}\right|.$$

De (14) et de (12) on déduit le théorème suivant, qui est une simple généralisation de (10):

Théorème I. *Si a_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$ et $a_n = O(1/n^k)$, où $k \geqslant 2$ (k réel), et si ξ est un nombre du type $\mu < k$, on a $G(f, \xi, N) = O(1)$.*

[5]) H. Behnke, *Zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Abh. a. d. Mathematischen Seminar d. Hamburgischen Universität 3 (1924), p. 261-318, surtout p. 282-286.

Quant à $R_1(\xi, N)$, on a d'après Hardy-Littlewood[6])

$$(15)\qquad R_1(\xi, N) = \Omega(\lg N)$$

pour tout ξ irrationnel[7]); mais, d'après Khintchine[8]),

$$(16)\qquad R_1(\xi, N) = o(\lg^{1+\varepsilon} N)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour presque tout ξ, et d'après Lerch[9])

(17) $R_1(\xi, N) = O(\lg N)$, si les β_ν sont bornés.

Afin d'obtenir plusieurs autres estimations de $G(f, \xi, N)$ pour quelques classes de fonctions périodiques, ainsi que des estimations d'expressions analogues pour les fonctions presque périodiques, nous allons nous servir de quelques théorèmes sur les fonctions presque périodiques.

Pour une fonction $f(t)$ de variable réelle à valeurs complexes, nous désignons par $\tau(f, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) tout nombre τ tel qu'on a $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$ pour tout t et par $\tau_p(f, \varepsilon)$ tout nombre τ tel que $\sup_{-\infty < x < \infty} \int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p dt < \varepsilon$. La fonction $f(t)$ s'appelle *uniformément presque périodique* (abrégé u. p. p.) ou bien *presque périodique au sens de Stepanoff selon la p-ème puissance* (abrégé p. p. S^p, $p \geqslant 1$), si elle est continue ou bien intégrable (L^p) dans chaque intervalle fini et s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $L(f, \varepsilon)$ tel que tout intervalle de longueur $L(f, \varepsilon)$ contient un au moins des nombres $\tau(f, \varepsilon)$ ou $\tau_p(f, \varepsilon)$ respectivement.

Toute fonction périodique est u. p. p., si elle est continue; elle est p. p. S^p, si elle est intégrable (L^p) dans chaque intervalle fini.

[6]) G. Hardy and J. Littlewood, *Some problems of Diophantine Approximations*, Proc. of the London Mathematical Society 20 (1922), p. 15-36, surtout p. 36, où (15) fut énoncé sans démonstration; pour la démonstration, cf. A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Abh. a. d. Mathematischen Seminar d. Hamburgischen Universität 1 (1922), p. 77-98, surtout p. 85-90.

[7]) $f(t) = \Omega(g(t))$ équivaut à $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |f(t)/g(t)| > 0$.

[8]) A. Khintchine, *Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen*, Mathematische Zeitschrift 18 (1923), p. 289-306. Bemerkung dazu: Mathematische Zeitschrift 22 (1925), p. 316.

[9]) M. Lerch, *Question 1547*, L'Intermédiaire Mathématique 11 (1904), p. 145-146.

Ce sont surtout les fonctions u. p. p., p. p. S^1 et p. p. S^2, que nous allons considérer. Toute fonction u. p. p. est p. p. S^2, toute fonction p. p. S^2 est p. p. S^1. La somme de deux fonctions qui sont u. p. p. ou p. p. S^1 ou p. p. S^2 est à son tour u. p. p. ou p. p. S^1 ou p. p. S^2 respectivement. Le produit de deux fonctions u. p. p. est u. p. p.; le produit de deux fonctions p. p. S^2 est p. p. S^1. Le produit de deux fonctions p. p. S^p, dont une est bornée, est lui-même p. p. S^p. Si la fonction $f(t)$ est u. p. p., elle est bornée sur toute la droite. Si $f(t)$ est p. p. S^p, on a $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\int\limits_x^{x+1}|f(t)|^p dt<\infty$.

Si $f(t)$ est p. p. S^1, il existe, pour tout nombre λ réel,

$$a_\lambda=\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T f(t)\, e^{2\pi i\lambda t}\, dt.$$

Si Λ désigne l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles $a_\lambda\neq 0$, on a $\overline{\overline{\Lambda}}\leqslant\aleph_0$. On appelle *série de Fourier* de $f(t)$ toute série $\sum a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$, où λ parcourt l'ensemble Λ ordonné arbitrairement en une suite finie ou infinie (y compris bilatéralement infinie). On écrit alors $f(t)\sim\sum\limits_\lambda a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ et on appelle les λ *exposants de Fourier* et les a_λ — *coefficients de Fourier* de $f(t)$. La série de Fourier au sens ordinaire d'une fonction périodique intégrable (L) est sa série de Fourier selon la définition précédente. Pour toute fonction p. p. S^2 la relation de Parseval est valable, c'est-à-dire

$$\sum_\lambda |a_\lambda|^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt.$$

Si la série $\sum\limits_\lambda a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ converge uniformément, elle représente une fonction u. p. p. [10])

On appelle la série $\sum\limits_{\nu\epsilon N} c_\nu e^{2\pi i\nu t}$ *produit des séries de Fourier* $\sum\limits_{\lambda\epsilon\Lambda} a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ et $\sum\limits_{\mu\epsilon M} b_\mu e^{2\pi i\mu t}$, si $c_\nu=\sum\limits_{\lambda+\mu=\nu} a_\lambda b_\mu$, l'ensemble N étant composé de toutes les valeurs $\lambda+\mu$, où $\lambda\epsilon\Lambda$ et $\mu\epsilon M$.

Lemme 1. *Le produit des séries de Fourier de deux fonctions p. p. S^2 est la série de Fourier de leur produit.*

---

[10]) Pour les notions et théorèmes mentionnés ici, concernant les fonctions presque périodiques, cf. par exemple: A. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge University Press, Cambridge (1932).

Un théorème analogue a été démontré par Bohr [11]) pour les fonctions u. p. p.; dans son raisonnement, la thèse apparaît comme une conséquence algébrique des propriétés suivantes: 1° toute fonction u. p. p., ainsi que le produit de telles fonctions, admet la valeur moyenne $\mathcal{M}_f$, 2° toute fonction u. p. p. satisfait à la relation de Parseval, 3° la classe des fonctions u. p. p. est additive, 4° la classe des fonctions u. p. p. est fermée par rapport à la multiplication par const$\cdot e^{i\lambda t}$ (λ réel). Or, les fonctions p. p. S^2 possédant les propriétés 1°-4°, le lemme se trouve démontré.

On aura besoin dans le chapitre III d'un théorème auxiliaire suivant:

Théorème II [12]). *Si $f(t)$ est p. p. S^1, si $F(t)$ est u. p. p. et si*

$$\text{(i)}\qquad f(t)\sim\sum_{\lambda\epsilon\Lambda} a_\lambda e^{2\pi i\lambda t},\qquad\qquad \text{(ii)}\qquad F(t)\sim\sum_{\lambda\epsilon\Lambda}\frac{a_\lambda}{2\pi i\lambda}\, e^{\pi i\lambda t},$$

alors

$$F(t)=\int_0^t f(u)\,du+\text{const.}$$

Remarque. (ii) implique évidemment $a_0=0$.

Démonstration. On peut déterminer à l'aide de l'algorithme de Fejér-Bochner [13]) des ensembles finis $\Lambda^{(q)}\subset\Lambda$ $(q=1,2,\ldots)$ et des coefficients réels $k_\lambda^{(q)}$ $(\lambda\epsilon\Lambda^{(q)})$ indépendants des a_λ, tels que pour toute fonction $\varphi(t)\sim\sum\limits_{\lambda\epsilon\Lambda} a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ qui est u. p. p. ou p. p. S^1 respectivement, les sommes (finies) $\sigma_q(t)=\sum\limits_{\lambda\epsilon\Lambda^{(q)}} k_\lambda^{(q)} a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ satisfont à la relation

$$\lim_{q\to\infty}\sigma_q(t)=\varphi(t)\quad\text{pour tout } t \text{ (même uniformément)},$$

ou à la relation

$$\lim_{q\to\infty}\ \sup_{-\infty<x<\infty}\int_x^{x+1}|\varphi(t)-\sigma_q(t)|\,dt=0$$

respectivement [14]).

---

[11]) H. Bohr, *Fastperiodische Funktionen*, Springer, Berlin (1932), p. 56-57.

[12]) Ce théorème constitue un cas particulier d'un théorème plus général démontré d'une autre manière par M. Marke. Cf. P. W. Marke, *Bidrag til Teorien for Integration og Differentiation af vilkaarlig Orden*, Copenhague (1942), p. 115.

[13]) Voir par exemple A. Besicovitch, loc. cit. [10]), p. 46-51.

[14]) Besicovitch, loc. cit. [10]), p. 105-107.

On en conclut, en vertu des hypothèses du théorème II, qu'en posant

(18) $$S_q(t)=\sum_{\lambda\epsilon A^{(q)}} k_\lambda^{(q)}\frac{a_\lambda}{2\pi i\lambda}e^{2\pi i\lambda t},$$

(19) $$s_q(t)=\sum_{\lambda\epsilon A^{(q)}} k_\lambda^{(q)} a_\lambda e^{2\pi i\lambda t},$$

on a

(20) $$\lim_{q\to\infty} S_q(t)=F(t) \quad \text{pour tout } t,$$

(21) $$\lim_{q\to\infty}\sup_{-\infty<x<\infty}\int_x^{x+1}|f(u)-s_q(u)|\,du=0.$$

En vertu de (18) et (19), on obtient

(22) $$S_q(t)=\int_0^t s_q(u)\,du+C_q,$$

où C_q ne dépend pas de t.

Il résulte de (21) que $\lim\limits_{q\to\infty}\int_0^t s_q(u)\,du=\int_0^t f(u)\,du$ pour tout t, car

$$\Big|\int_0^t s_q(u)\,du-\int_0^t f(u)\,du\Big|\leqslant\int_0^t|s_q(u)-f(u)|\,du\leqslant|t|\sup_{-\infty<x<\infty}\int_x^{x+1}|s_q(u)-f(u)|\,du.$$

Par suite, il existe en vertu de (20) et (22) $\lim\limits_{q\to\infty}C_q=C$, et on a pour tout t

$$\lim_{q\to\infty}S_q(t)=F(t)=\int_0^t f(u)\,du+C,$$

ce qui prouve le théorème.

Corollaire. *Si la fonction* $f(t)\sim\sum_\lambda a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ *est p. p.* S^1 *et si la série* $\sum_\lambda\frac{a_\lambda}{2\pi i\lambda}e^{2\pi i\lambda t}$ *converge uniformément vers une fonction* $F(t)$ *(en particulier si* $\sum_\lambda|a_\lambda/\lambda|<\infty$*), on a* $F(t)=\int_0^t f(u)\,du+\text{const}$.

Cela résulte de ce que $F(t)$ est alors une fonction u. p. p. et $F(t)\sim\sum_\lambda\frac{a_\lambda}{2\pi i\lambda}e^{2\pi i\lambda t}$.

Remarque. Le théorème II est à distinguer d'un autre semblable, mais plus élémentaire, d'après lequel on a

$$\int_0^t f(u)\,du\sim\sum_\lambda\frac{a_\lambda}{2\pi i\lambda}e^{2\pi i\lambda t}+\text{const},$$

si $f(t)\sim\sum_\lambda a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ est p. p. S^1 et si $\int_0^t f(u)\,du$ est u. p. p.

II. Les moyennes de Weyl pour les fonctions périodiques.

Afin d'obtenir quelques estimations des moyennes de Weyl pour les fonctions périodiques, nous allons transformer l'expression $G(f,\xi,N)$, en faisant des hypothèses convenables sur $f(t)$ et en appliquant à la somme $\sum_{j=1}^N f(j\xi)$ la méthode sommatoire classique d'Euler-Maclaurin.

La fonction $\Phi(t)$ étant définie pour $t\geqslant0$ et ayant des dérivées qui sont jusqu'à l'ordre $k\geqslant0$ [15]) absolument continues dans tout intervalle fini de la demi-droite $\langle0,+\infty)$, nous avons, comme on le sait, pour tout N naturel

(1) $$\begin{aligned}\Phi(0)+\Phi(1)+\ldots+\Phi(N)&=\int_0^N\Phi(t)\,dt+\tfrac12\big(\Phi(0)+\Phi(N)\big)\\&+\frac{B_2}{2!}\big(\Phi'(N)-\Phi'(0)\big)+\ldots+\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}\big(\Phi^{(k)}(N)-\Phi^{(k)}(0)\big)\\&+(-1)^k\int_0^N P_{k+1}(t)\Phi^{(k+1)}(t)\,dt,\end{aligned}$$

où P_k sont les polynômes de Bernoulli et $B_k=k!P_k(0)$ — les nombres de Bernoulli.

Admettons à présent que $f(t)$ est une fonction à période 1 et qu'elle possède dans l'intervalle demi-ouvert $\langle0,1)$ [16]) des dérivées absolument continues jusqu'à l'ordre $k\geqslant0$. Il en résulte l'existence des valeurs finies

$$f^{(\nu)}(1-0)=\lim_{t\to1-0}f^{(\nu)}(t)\qquad(\nu=0,1,\ldots,k).$$

Posons

(2) $$f^{(\nu)}(1-0)-f_+^{(\nu)}(0)=A_\nu$$

et introduisons la fonction auxiliaire

$$\varphi(t)=f(t)+jA_0\quad\text{pour}\quad j\leqslant t<j+1\quad(j\text{ entier}),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(t)=f(t)+[t]A_0.$$

Ainsi $\varphi(t)$ est absolument continue sur toute la droite et possède dans les intervalles fermés consécutifs $\langle N,N+1\rangle$ les déri-

[15]) Inclusivement; on pose $f^{(0)}(t)=f(t)$.

[16]) Si l'on y remplace $\langle0,1)$ par $(0,1\rangle$, on n'a qu'à poser dans la suite $f^{(\nu)}(1)-f^{(\nu)}(+0)=A_\nu$ au lieu de (2) pour que le raisonnement devienne complétement analogue.

vées absolument continues jusqu'à l'ordre k, si l'on entend comme dérivées aux points N et $N+1$ les valeurs

$$\text{(3)} \qquad \varphi_+^{(\nu)}(N)=f_+^{(\nu)}(0), \qquad \varphi_-^{(\nu)}(N+1)=f^{(\nu)}(1-0)$$

respectivement.

Posons à présent $\Phi(t)=\varphi(t\xi)$, où ξ est un nombre réel fixé. Nous pouvons le supposer positif, car pour un $\xi<0$ on n'a qu'à considérer $G(\bar{f},-\xi,N)$ au lieu de $G(f,\xi,N)$, où $\bar{f}(t)=f(-t)$. La fonction $\Phi(t)$ étant absolument continue sur toute la droite, nous pouvons appliquer à cette fonction la formule (1) pour $k=0$; nous obtenons ainsi

$$\text{(4)} \quad \Phi(0)+\Phi(1)+\ldots+\Phi(N)=\int_0^N\Phi(t)\,dt+\tfrac{1}{2}\big(\Phi(0)+\Phi(N)\big)+\int_0^N P_1(t)\Phi'(t)\,dt.$$

En transformant le membre gauche, on a avec la notation I(9)

$$\begin{aligned}\Phi(0)+\ldots+\Phi(N)&=f(0)+f(\xi)+\ldots+f(N\xi)+A_0\big([\xi]+\ldots+[N\xi]\big)\\ \text{(5)}\qquad &=\sum_{j=0}^N f(j\xi)-A_0\{(\xi-[\xi])+\ldots+(N\xi-[N\xi])\}+A_0\xi\frac{N(N+1)}{2}\\ &=\sum_{j=0}^N f(j\xi)-A_0R_1(\xi,N)-A_0\frac{N}{2}+A_0\xi\frac{N(N+1)}{2}.\end{aligned}$$

En transformant le premier sommande du membre droit de (4) et en posant $N\xi-[N\xi]=\varepsilon_N$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^N\Phi(t)\,dt&=\int_0^N\varphi(t\xi)\,dt=\xi^{-1}\int_0^{N\xi}\varphi(t)\,dt=\xi^{-1}\int_0^{[N\xi]}\varphi(t)\,dt+\xi^{-1}\int_{[N\xi]}^{N\xi}\varphi(t)\,dt\\ &=[N\xi]\xi^{-1}\int_0^1 f(t)\,dt+\xi^{-1}A_0\big(1+2+\ldots+([N\xi]-1)\big)+\xi^{-1}A_0\varepsilon_N[N\xi]+O(1)\\ &=N\int_0^1 f(t)\,dt+\tfrac{1}{2}A_0\xi^{-1}\{(N\xi-\varepsilon_N-1)(N\xi-\varepsilon_N)+2\varepsilon_N(N\xi-\varepsilon_N)\}+O(1)\\ &=N\int_0^1 f(t)\,dt+\tfrac{1}{2}A_0N(N\xi-1)+O(1),\end{aligned}$$

où $O(1)$ désigne une expression bornée par rapport à N. Le deuxième sommande donne

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\big(\Phi(0)+\Phi(N)\big)&=\tfrac{1}{2}f(0)+\tfrac{1}{2}f(N\xi)+\tfrac{1}{2}A_0[N\xi]=\tfrac{1}{2}A_0[N\xi]+O(1)\\ &=\tfrac{1}{2}A_0N\xi+O(1),\end{aligned}$$

donc le membre droit de (4) prend la forme

$$N\int_0^1 f(t)\,dt+\tfrac{1}{2}A_0N(N\xi-1)+\tfrac{1}{2}A_0N\xi+O(1)+\int_0^N P_1(t)\Phi'(t)\,dt.$$

Le deuxième et le troisième terme de cette expression s'abolissent mutuellement avec le troisième et le quatrième terme dans le dernier membre de (5), en tenant compte de l'égalité

$$\int_0^N P_1(t)\Phi'(t)\,dt=\xi\int_0^N P_1(t)\varphi'(t\xi)\,dt=\xi\int_0^N P_1(t)f'(t\xi)\,dt,$$

où $f'(t\xi)$ désigne la dérivée de la fonction $f(t)$ par rapport à t au point $t\xi$, nous pouvons écrire (4) de manière suivante:

$$\sum_{j=1}^N f(j\xi)-A_0R_1(\xi,N)=N\int_0^1 f(t)\,dt+\xi\int_0^N P_1(t)f'(t\xi)\,dt+O(1),$$

ou bien, en vertu de I(2),

$$\text{(6)} \qquad G(f,\xi,N)=A_0R_1(\xi,N)+\xi\int_0^N P_1(t)f'(t\xi)\,dt+O(1).$$

La fonction $f'(t\xi)$ a évidemment la période $1/\xi$.

Admettons $k>0$ et transformons l'intégrale dans (6) en intégrant par parties dans les intervalles consécutifs

$$\langle 0,1/\xi),\ \langle 1/\xi,2/\xi),\ldots,\langle([N\xi]-1)/\xi,[N\xi]/\xi)$$

et en utilisant I(7), (3), I(9), (2), ainsi que la relation

$$f^{(\nu)}(t)=\int_0^t f^{(\nu+1)}(u)\,du+\text{const}=\int_0^t\varphi^{(\nu+1)}(u)\,du+\text{const}$$

pour $0\leqslant t\leqslant 1$ $(\nu=1,2,\ldots,k)$.

On obtient alors

$$\begin{aligned}&\int_0^N P_1(t)f'(t\xi)\,dt\\ &=\int_0^{[N\xi]/\xi}P_1(t)f'(t\xi)\,dt+O(1)\\ &=\big(P_2(1/\xi)\varphi'_-(1)-P_2(0)\varphi'_+(0)\big)-\xi\int_0^{1/\xi}P_2(t)f''(t\xi)\,dt\\ &+\big(P_2(2/\xi)\varphi'_-(2)-P_2(1/\xi)\varphi'_+(1)\big)-\xi\int_{1/\xi}^{2/\xi}P_2(t)f''(t\xi)\,dt+\ldots\\ &\ldots+\{P_2([N\xi]/\xi)\varphi'_-([N\xi])-P_2\big(([N\xi]-1)/\xi\big)\varphi'_+([N\xi]-1)\}\\ &-\xi\int_{([N\xi]-1)/\xi}^{[N\xi]/\xi}P_2(t)f''(t\xi)\,dt+O(1),\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^N P_1(t)\,f'(t\xi)\,dt$$

$$=\varphi'_-(1)R_2(1/\xi,[N\xi])-\varphi'_+(0)\big(R_2(1/\xi,[N\xi]-1)+P_2(0)\big)$$

$$-\xi\int_0^{[N\xi]/\xi} P_2(t)f''(t\xi)\,dt+O(1).$$

L'inégalité

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\int_x^{x+1/\xi}|P_2(t)f''(t\xi)|\,dt\leqslant \sup_t|P_2(t)|\cdot\int_0^{1/\xi}|f''(t\xi)|\,dt<\infty$$

donne alors

$$\int_0^N P_1(t)f'(t\xi)\,dt$$

$$=A_1R_2(1/\xi,[N\xi])-\xi\int_0^N P_2(t)f''(t\xi)\,dt+O(1).$$

Donc, en vertu de (6),

$$G(f,\xi,N)=A_0R_1(\xi,N)+\xi A_1R_2(1/\xi,[N\xi])-\xi^2\int_0^N P_2(t)f''(t\xi)\,dt+O(1).$$

En répétant l'intégration par parties (si $k>1$), on obtient

$$G(f,\xi,N)=A_0R_1(\xi,N)+\xi A_1R_2(1/\xi,[N\xi])$$

$$(7)\qquad -\xi^2A_2R_3(1/\xi,[N\xi])+\ldots+(-1)^{k-1}\xi^kA_kR_{k+1}(1/\xi,[N\xi])$$

$$+(-1)^k\xi^{k+1}\int_0^N P_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t\xi)\,dt+O(1).$$

Lemme 2. *On a pour tout $\xi>0$ et pour $r>1$*

$$R_r(\xi,N)=(-1)^r\xi^{r-1}R_r(1/\xi,[N\xi])+O(1).$$

Démonstration. Posons dans (7) $f(t)=P_r(t)$ et $k=r-1$. Comme dans le cas considéré $A_0=A_1=\ldots=A_{r-2}=0$ et $A_{r-1}=1$, en vertu de I(7) et I(6), on obtient, compte tenu de I(9),

$$R_r(\xi,N)=(-1)^r\xi^{r-1}R_r(1/\xi,[N\xi])+(-1)^{r-1}\xi^r\int_0^N P_r(t)\cdot 1dt+O(1),$$

d'où on déduit la thèse en vertu de I(8).

À l'aide du lemme 2, la formule (7) donne par une transformation évidente

$$G(f,\xi,N)=A_0R_1(\xi,N)+A_1R_2(\xi,N)+\ldots+A_kR_{k+1}(\xi,N)$$

$$(8)\qquad +(-1)^k\xi^{k+1}\int_0^N P_{k+1}(t)\,f^{(k+1)}(t\xi)\,dt+O(1).$$

C'est notre formule fondamentale.

À l'aide des estimations connues des grandeurs $R_r(\xi,N)$ on peut obtenir par la formule (8) plusieurs estimations de $G(f,\xi,N)$, si l'intégrale dans le membre droit de (8) est une fonction bornée de N, ce qui est vrai dans quelques cas.

Nous montrons notamment le lemme suivant:

Lemme 3. *$f(t)$ ayant $k\geqslant 1$ dérivées absolument continues dans l'intervalle $\langle 0,1)$ et ξ étant du type $\mu<k+1$, on a*

$$\int_0^N P_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t\xi)\,dt=O(1).$$

Démonstration. Soit ξ un nombre satisfaisant à l'hypothèse du lemme et soit

$$f^{(k+1)}(t)\sim a_0+\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' a_m e^{2\pi imt}.$$

Alors, en posant $\psi_1(t_1)=\int_0^{t_1}\big(f^{(k+1)}(t)-a_0\big)dt$, on a

$$\psi_1(t_1)=C_1+\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{a_m}{m}e^{2\pi imt_1},$$

et de même, en posant $\psi_2(t_2)=\int_0^{t_2}\big(\psi_1(t_1)-C_1\big)dt_1$, il vient

$$\psi_2(t_2)=C_2+\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{a_m}{m^2}e^{2\pi imt_2}.$$

En répétant cette opération $(k+1)$ fois, on obtient

$$\psi_{k+1}(t_{k+1})=\int_0^{t_{k+1}}\big(\psi_k(t_k)-C_k\big)dt_k=C_{k+1}+\frac{1}{(2\pi i)^{k+1}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{a_m}{m^{k+1}}e^{2\pi imt_{k+1}},$$

et pour presque tout t

$$(9)\qquad \psi_{k+1}^{(k+1)}(t)=f^{(k+1)}(t)-a_0.$$

La suite $\{a_m\}$ tendant vers 0 en vertu du théorème de Riemann-Lebesgue, les coefficients de Fourier de $\psi_{k+1}(t)$ sont $o(1/m^{k+1})$. Puisque $k\geqslant 1$, il résulte du théorème I que

$$(10)\qquad G(\psi_{k+1},\xi,N)=O(1).$$

La fonction $\psi_{k+1}(t)$ ayant k dérivées absolument continues sur toute la droite, la formule (8) devient pour cette fonction

$$G(\psi_{k+1},\xi,N)=(-1)^k\xi^{k+1}\int_0^N P_{k+1}(t)\,\psi_{k+1}^{(k+1)}(t\xi)\,dt+O(1),$$

on obtient donc de (10) et de (9)

$$\int_0^N P_{k+1}(t)[f^{(k+1)}(t\xi)-a_0]\,dt=O(1).$$

On déduit ensuite la thèse du lemme, en tenant compte de I(8).

Le lemme 3 permet de démontrer les théorèmes III et IV qui suivent:

Théorème III. *Si la fonction $f(t)$ à période* 1 *admet une dérivée absolument continue dans l'intervalle* $\langle 0,1)$, *on a*

$$G(f,\xi,N)=o(\lg^{1+\varepsilon}N)\qquad(\varepsilon>0\ \textit{arbitraire})$$

pour presque tout ξ et, si les β_ν sont bornés, on a de plus

$$G(f,\xi,N)=O(\lg N);$$

cependant, si $f(1)\neq f(1-0)$, *on a*

$$G(f,\xi,N)=\Omega(\lg N)$$

pour ξ du type $\mu<2$.

Démonstration. On obtient ce théorème moyennant la formule (8) pour $k=1$ à l'aide de I(16), I(17) et I(15), puisque pour ξ du type $\mu<2$, donc pour presque tout ξ — et en particulier quand les β_ν sont bornés — on a $R_2(\xi,N)=O(1)$ en vertu de I(10) et $\int_0^N P_2(t)f''(t\xi)\,dt=O(1)$ en vertu du lemme 3. Pour obtenir la dernière proposition de la thèse, il faut encore tenir compte de ce que $f(1)\neq f(1-0)$ équivaut à $A_0\neq 0$.

Remarque. Si la fonction $f(t)$ admet une dérivée absolument continue dans l'intervalle $\langle 0,1)$ et si $f(1)=f(1-0)$, donc si $f(t)$ est absolument continue sur toute la droite, on a $G(f,\xi,N)=O(1)$ pour chaque ξ du type $\mu<2$, ce qui résulte du théorème I, les coefficients de Fourier de $f(t)$ étant alors $O(1/n^2)$. C'est d'ailleurs un cas spécial (pour $l=0$, $k=1$) du théorème suivant:

Théorème IV. *Si la fonction $f(t)$ à période* 1 *admet dans l'intervalle fermé* $\langle 0,1\rangle$ (*donc sur toute la droite*) *des dérivées absolument continues jusqu'à l'ordre $l\geqslant 0$, et si elle admet dans l'intervalle demi-ouvert* $\langle 0,1)$ *des dérivées absolument continues jusqu'à l'ordre $k>l$, on a pour tout ξ du type $\mu<k+1$,*

$$G(f,\xi,N)=\begin{cases}O(N^{1-\frac{l+2}{2\mu}+\varepsilon}) & \textit{pour } k>l+1,\ \mu\geqslant l+2,\ \varepsilon>0,\\ O(1) & \textit{pour } \mu<l+2.\end{cases}$$

Démonstration. On a les suivantes estimations de $R_r(\xi,N)$ $(r>1)$, ξ étant du type $\leqslant\mu$:

$$R_r(\xi,N)=\begin{cases}O(N^{1-\frac{r}{2\mu}+\varepsilon}) & \text{pour } \mu\geqslant r,\quad \varepsilon>0\ ^{17}),\\ O(1) & \text{pour } \mu<r\ ^{18}).\end{cases}$$

On obtient la thèse du théorème IV, si l'on pose dans ces estimations $r=l+2$, et si on les utilise ensuite dans la formule (8), celle-ci se réduisant à

$$G(f,\xi,N)=A_{l+1}R_{l+2}(\xi,N)+A_{l+2}R_{l+3}(\xi,N)+\ldots+A_kR_{k+1}(\xi,N)$$
$$+(-1)^k\xi^{k+1}\int_0^N P_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t\xi)\,dt+O(1),$$

puisque, d'après l'hypothèse concernant $f(t)$, on a $A_0=\ldots=A_l=0$.

Il reste encore de prendre en considération qu'en vertu du lemme 3 l'hypothèse concernant ξ entraîne $\int_0^N P_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t\xi)\,dt=O(1)$.

Remarque. Si $k=l\geqslant 1$, les coefficients de Fourier de $f(t)$ sont $o(1/n^{k+1})$; on a alors en vertu du théorème I $G(f,\xi,N)=O(1)$ pour ξ du type $\mu<k+1$.

Théorème V. *Pour presque tout ξ il existe une fonction $f(t)$ à période* 1, *admettant une dérivée partout continue et telle que* $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}|G(f,\xi,N)|=\infty$.

Remarques. 1° Nous allons montrer d'avantage: la fonction demandée peut avoir pour coefficients de Fourier de tels a_m que $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}|ma_m|<\infty$.

[17]) Cf. H. Behnke, *Über die Verteilung von Irrationalitäten mod.* 1, Abh. a. d. Mathematischen Seminar d. Hamburgischen Universität 1 (1922), p. 252-267.

[18]) Cf. I (10).

2° Si $f'(t)$ est *absolument* continue, on a pour tout ξ du type $\mu<2$ l'estimation $G(f,\xi,N)=O(1)$ en vertu du théorème I, parce qu'alors $a_m=o(1/m^2)$ [19]).

Démonstration. Soit ξ un nombre irrationnel tel que l'inégalité

$$(11)\qquad \left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\lg q}$$

admet une infinité de solutions en valeurs entières de p, q. Comme $\int\limits_0^\infty dt/t\lg t=\infty$, il vient d'après le théorème de Khintchine (cf. p. 2) que presque tout ξ jouit de la-dite propriété. Supposons que $\xi>0$. Soit $\{p_r,q_r\}$ la suite de toutes les solutions de (11). Extrayons de la suite $\{q_r\}$ une sous-suite infinie $\{q_{r_s}\}$ de façon que l'on ait

$$(12)\qquad \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\lg q_{r_s}}<\infty.$$

Construisons la fonction $f(t)$, en posant

$$(13)\qquad f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m e^{2\pi imt},$$

où

$$(14)\qquad a_m=0 \quad\text{pour}\quad m\neq q_{r_s} \qquad (s=1,2,\ldots)$$

$$(15)\qquad a_{q_{r_s}}=\frac{1}{q_{r_s}\lg q_{r_s}}.$$

La fonction (13) satisfait à la thèse du théorème V. En effet, la somme des coefficients de la série trigonométrique que l'on obtient en différentiant terme à terme le membre droit de (13), converge absolument en vertu de (14), (15) et (12), on a donc $f'(t)=2\pi i\sum\limits_{m=1}^{\infty}ma_m e^{2\pi imt}$ et $f'(t)$ est évidemment continue. $P_1(t)$ et $f'(t)$ étant périodiques, mesurables et bornées, la fonction $P_1(t)f'(t\xi)$ est une fonction p. p. S^1; sa série de Fourier est $-\sum\limits_{m,n}{}' m\,a_m e^{2\pi i(m\xi+n)t}/n$ (les paires d'entiers m, n étant ordonnées en une suite, $m>0$, $n\neq0$) en vertu du lemme 1 et de I(6). Par l'intégration terme à terme on en obtient une double série de Dirichlet, dont les coefficients sont $c_{m,n}=-\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{ma_m}{n(m\xi+n)}$. Par suite on a

$$c_{q_{r_s},-p_{r_s}}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{q_{r_s}a_{q_{r_s}}}{p_{r_s}(q_{r_s}\xi-p_{r_s})},$$

et en vertu de (11) et (15) il vient

$$|c_{q_{r_s},-p_{r_s}}|>\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{q_{r_s}}{p_{r_s}}>\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+\xi}.$$

Il en résulte $\sum\limits_{m,n}|c_{m,n}|^2=+\infty$; par conséquent, comme les fonctions u. p. p. satisfont à la relation de Parseval, la fonction $\varphi(x)=\int\limits_0^x P_1(t)f'(t\xi)\,dt$ n'est pas u. p. p. Puisque, $\varphi(t)$ étant p. p. S^1, l'intégrale $\int\limits_0^x\varphi(t)\,dt$ est ou bien une fonction u. p. p. ou bien une fonction non bornée de x [20]), on déduit du précédent $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\left|\int\limits_0^x P_1(t)f'(t\xi)\,dt\right|=\infty$. L'intégrand étant borné, on a par conséquent $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}\left|\int\limits_0^N P_1(t)f'(t\xi)\,dt\right|=\infty$ $(N=1,2,\ldots)$. D'ici et de la formule (8) pour $k=0$ on obtient, en tenant compte de $A_0=0$, $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}|G(f,\xi,N)|=\infty$, et le théorème V se trouve démontré.

Ce théorème laisse apparaître le problème ouvert suivant: pour toute fonction périodique (à période 1) qui admet une dérivée partout continue, ou au moins pour toute fonction périodique dont les coefficients de Fourier sont d_m/m $(m\neq0)$, où $\sum\limits_m|d_m|<\infty$, a-t-on $G(f,\xi,N)=O(1)$ sauf pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de ξ? Le théorème V montre qu'au cas d'une réponse affirmative cet ensemble exceptionnel dépenderait de $f(t)$; cependant, si $f'(t)$ est *absolument* continu (au moins dans l'intervalle $\langle 0,1)$, pourvu que $f(t)$ soit absolument continu dans $\langle 0,1\rangle$), l'ensemble (de mesure nulle) des ξ pour lesquels $G=O(1)$ est en défaut, ne dépend pas

---

[19]) Cf. aussi la remarque au théorème III.

[20]) Cf. H. Bohr, loc. cit. [11]), p. 50-52. Le théorème en question y est démontré sous l'hypothèse que $\varphi(t)$ est une fonction u. p. p., mais la thèse et la démonstration ne changent pas, si l'on admet que $\varphi(t)$ est p. p. S^1.

de $f(t)$, comme le montre la remarque au théorème III. On peut montrer aisément, que si les coefficients de Fourier de $f(t)$ sont $a_m=d_m/m$ — où $m\neq 0$ (a_0 étant arbitraire) et $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|d_m|<\infty$ — et si pour le nombre irrationnel ξ les β_ν sont bornés, on a $G(f,\xi,N)=O(1)$. C'est une conséquence de I(14) et I(11), compte tenu de ce que l'hypothèse concernant ξ entraîne I(5).

III. Les moyennes de Weyl pour les fonctions presque périodiques.

Soit $f(t)$ une fonction u. p. p. On définit pour un $\xi\neq 0$ réel arbitraire et pour un N naturel

$$G(f,\xi,N)=f(\xi)+\ldots+f(N\xi)-N\mathcal{M}_f, \tag{1}$$

$$H(f,\xi,N)=f(\xi)+\ldots+f(N\xi)-\int_0^N f(t\xi)\,dt. \tag{2}$$

Si l'on y pose comme $f(t)$ une fonction à période 1, (1) devient identique avec I(2); on a alors

$$G(f,\xi,N)-H(f,\xi,N)=O(1), \tag{3}$$

ce qu'on prouve moyennant une transformation élémentaire de $\int_0^N f(t\xi)\,dt$. Si $f(t)$ n'est qu'uniformément presque périodique, la formule (3) n'est pas toujours valable. Sa validité ne dépend pas de ξ: (3) est vrai, si la fonction $\Psi(T)=\int_0^T(f(t)-\mathcal{M}_f)\,dt$ est bornée donc u. p. p. et seulement dans ce cas. Ceci résulte de l'égalité

$$\int_0^N f(t\xi)\,dt=N\mathcal{M}_f+\xi^{-1}\Psi(N\xi),$$

qui donne

$$G(f,\xi,N)-H(f,\xi,N)=\xi^{-1}\Psi(N\xi), \tag{4}$$

et de ce que $f(t)$ est borné. Par suite, dans le cas où $f(t)$ est périodique (et, bien entendu, intégrable (L)), il n'importe pas, si l'on cherche des estimations pour G ou pour H. Cependant, dans le cas où $f(t)$ est presque périodique, on doit distinguer les estimations de ces deux grandeurs.

On a toujours

$$G(f,\xi,N)-H(f,\xi,N)=o(N), \tag{5}$$

car

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\Psi(T)=0.$$

Voici un cas spécial d'un théorème plus général démontré par A. Besicovitch[21]).

Théorème VI. *Si $f(t)\sim\sum_{\lambda\epsilon\Lambda}a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ est une fonction u. p. p. et si pour aucun $\lambda\neq 0$ le nombre $\lambda\xi$ n'est un entier, on a*

$$G(f,\xi,N)=o(N). \tag{6}$$

Démonstration. $f(t)$ est la limite d'une suite uniformément convergente des fonctions $\sigma_q(t)=\sum_{\lambda\epsilon\Lambda^{(q)}}k_\lambda^{(q)}a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$, où $\Lambda^{(q)}\subset\Lambda$, $\overline{\overline{\Lambda^{(q)}}}<\aleph_0$, et où l'on peut évidemment supposer $0\,\epsilon\,\Lambda^{(q)}$, $k_0^{(q)}=1$ $(q=1,2,\ldots)$. Pour tout $\lambda\neq 0$ on a $\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{j=1}^{N}e^{2\pi i\lambda j\xi}=0$, donc pour tout q

$$\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\sigma_q(j\xi)=a_0=\mathcal{M}_f. \tag{7}$$

En vertu de la convergence uniforme de $\sigma_q(t)$ le passage à la limite avec $q\to\infty$ dans (7) donne $\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{j=1}^{N}f(j\xi)=\mathcal{M}_f$ et ensuite (6).

Corollaire. *En vertu de (5) on a sous l'hypothèse du théorème VI $H(f,\xi,N)=o(N)$.*

On pourrait montrer d'une façon analogue que $f(t)$ étant p. p. S^p, on a

$$\lim_{N\to\infty}\ \sup_{-\infty<x<\infty}\int_x^{x+1}|N^{-1}[f(\xi)+\ldots+f(N\xi)]-\mathcal{M}_f|^p d\xi=0.$$

En modifiant le raisonnement de Behnke (cf. I), on obtient une condition suffisante pour que $G(f,\xi,N)$ soit borné. A savoir, on a le théorème suivant:

Si $f(t)\sim\sum_{\lambda\epsilon\Lambda}a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ est une fonction u. p. p. et si

$$\sum_{0\neq\lambda\epsilon\Lambda}\left(\left|\frac{a_\lambda}{\lambda\xi-[\lambda\xi]}\right|+\left|\frac{a_\lambda}{1-\lambda\xi+[\lambda\xi]}\right|\right)<\infty,$$

on a $G(f,\xi,N)=O(1)$.

[21]) A. Besicovitch, loc. cit. [10]), p. 44-45.

Pour le montrer, il faut remarquer que notre hypothèse entraîne $f(t)=\sum_{\lambda\epsilon A} a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ et que par suite la thèse est une conséquence de I(11), où l'on remplace n par λ, et des inégalités

$$G(f,\xi,N)\leqslant \sum_{0\neq\lambda\epsilon A} |a_\lambda \sum_{j=1}^{\infty} e^{2\pi i\lambda j\xi}|\leqslant \sum_{0\neq\lambda\epsilon A}\left|\frac{a_\lambda}{\sin\pi\lambda\xi}\right|,$$

qui sont une généralisation immédiate de I(14).

Nous allons formuler à présent un critérium pour que $H(f,\xi,N)$ soit borné. Pour l'obtenir, nous allons appliquer à la somme $\sum_{j=1}^{N} f(j\xi)$ le même procédé de sommation d'Euler-Maclaurin que nous avons appliqué aux fonctions purement périodiques. Admettons que $f(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $k\geqslant 0$ sont bornées sur toute la droite et absolument continues dans tout intervalle fini. On a alors en vertu de II(1), en posant $\Phi(t)=f(t\xi)$,

$$H(f,\xi,N)=(-1)^k\xi^{k+1}\int_0^N P_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t\xi)\,dt+O(1). \tag{8}$$

Cette formule permet d'obtenir le théorème suivant:

Théorème VII. *Si*

(i) $f(t)\sim\sum_\lambda a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ *et ses dérivées jusqu'à l'ordre* $k\geqslant 0$ *sont u. p. p. et absolument continues dans tout intervalle fini,*

et si

(ii) $f^{(k+1)}(t)$ *est p. p.* S^2 [22])

et

(iii) $\sum_{n\neq 0}\sum_\lambda\left|\frac{\lambda^{k+1}a_\lambda}{n^{k+1}(\lambda\xi+n)}\right|<\infty,$

alors on a $H(f,\xi,N)=O(1)$.

Démonstration. On a $f^{(j)}(t)\sim(2\pi i)^j\sum_\lambda a_\lambda\lambda^j e^{2\pi i\lambda t}$ $(j=1,\dots,k+1)$, en vertu de (i). Comme toute fonction u. p. p. est bornée sur toute la droite, l'hypothèse (i) permet d'appliquer à $f(t)$ la formule (8), il ne reste donc à montrer que

$$\int_0^N P_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t\xi)\,dt=O(1). \tag{9}$$

[22]) Il suffirait d'admettre que $f^{(k+1)}(t)$ est p. p. S^1, mais nous supposons (ii) pour ne pas compliquer la démonstration.

Or, on a d'après (ii) et d'après le lemme 1,

$$P_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t\xi)\sim\text{const}\cdot\sum_\nu\sum_{\lambda\xi+n=\nu}\frac{a_\lambda}{n^{k+1}}\lambda^{k+1}e^{2\pi i\nu t}. \tag{10}$$

La somme des coefficients de la série de Dirichlet, que l'on obtient par l'intégration terme à terme du membre droit de (10), étant d'après (iii) absolument convergente, cette série représente, en vertu du corollaire au théorème II, l'intégrale $\int_0^t P_{k+1}(u)f^{(k+1)}(u\xi)\,du$ à une constante additive près. Par suite on a en effet (9) et la démonstration est achevée.

Remarquons qu'en vertu de la presque-périodicité uniforme de $f(t)$, celle de $f'(t),\dots,f^{(k)}(t)$ est équivalente à la continuité uniforme de ces fonctions sur toute la droite [23]).

Nous allons donner un exemple d'une fonction u. p. p., telle que l'on a $\overline{\lim_{N\to\infty}}|G(f,\xi,N)|=\infty$, $H(f,\xi,N)=O(1)$ en même temps pour tout ξ, exception faite d'un ensemble au plus dénombrable.

Posons à ce propos

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}e^{2\pi it/m^2}. \tag{11}$$

C'est évidemment une fonction u. p. p. On a $\lambda_m=a_m=1/m^2$. La série

$$2\pi i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}e^{2\pi it/m^2}$$

étant uniformément convergente, elle représente la fonction $f'(t)$ qui est alors également u. p. p. (et d'autant plus p. p. S^2). Comme $f'(t)$ est continu, la fonction $f(t)$ est absolument continue dans tout intervalle fini. Ainsi les hypothèses (i) et (ii) du théorème VII sont satisfaites pour $k=0$.

La série double

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n(\xi/m^2+n)m^4}\right|$$

[23]) Cf. S. Bochner, *Fourier series of almost periodic functions*, Proc. of the London Mathematical Society 26 (1927), p. 433-452, surtout p. 442.

converge, si

$$\frac{\xi}{m^2}+n\neq 0 \qquad (m \text{ naturel, } n \text{ entier, } n\neq 0), \tag{12}$$

on satisfait donc également à (iii) sous la restriction (12), en posant $k=0$, et on a $H(f,\xi,N)=O(1)$, si ξ obéit à (12).

Puisque $\sum_{m=1}^{\infty}|a_{\lambda_m}/\lambda_m|^2=\infty$, la série que l'on obtient en intégrant terme à terme le membre droit de (11), n'est pas une série de Fourier d'une fonction u. p. p.; il s'ensuit [24]) que la fonction $\Psi(T)=\int_0^T(f(t)-\mathscr{M}_f)\,dt=\int_0^T f(t)\,dt$ (comme $a_0=0$), donc la différence $G-H$, n'est bornée non plus. Par suite on obtient

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\,|G(f,\xi,N)|=\infty$$

pour tout ξ satisfaisant à (12).

On pourrait se poser le problème de trouver une fonction u. p. p., pour laquelle G soit borné et H non borné pour tout ou presque tout ξ.

Nous montrons encore deux théorèmes d'un caractère un peu différent.

Rappelons d'abord la définition d'une *suite presque périodique*: ainsi s'appelle la suite numérique $\{a_n\}$ telle que pour tout $\varepsilon>0$ on peut trouver un nombre $L(\varepsilon)>0$ de manière que dans tout intervalle $\langle\alpha,\alpha+L(\varepsilon)\rangle$ $(\alpha\geqslant 0)$ il existe un entier positif k satisfaisant à $|a_n-a_{n+k}|<\varepsilon$ $(n=1,2,\ldots)$.

On sait [25]) que

(A) *$f(t)$ étant u. p. p., la suite $\{f(n)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ est presque périodique.*

Théorème VIII. *Si*

(i) *$f(t)\sim\sum_{\lambda\epsilon\Lambda}a_\lambda e^{2\pi i\lambda t}$ est une fonction u. p. p. absolument continue dans tout intervalle fini,*

(ii) *$f'(t)$ est p. p. S^1,*

(iii) *$H(f,\xi,N)=O(1)$,*

alors la suite $\{H(f,\xi,N)\}$ est presque périodique.

Démonstration. En vertu de (i) on peut appliquer à la fonction $f(t)$ la formule (8) pour $k=0$. En y écrivant $O(1)$ d'une manière explicite, on a d'après II(1)

$$H(f,\xi,N)=-\tfrac{1}{2}f(0)+\tfrac{1}{2}f(N\xi)+\xi\int_0^N P_1(t)f'(t\xi)\,dt. \tag{13}$$

$f(t)$ étant bornée, on déduit de (iii) $\int_0^N P_1(t)f'(t\xi)\,dt=O(1)$. En vertu de (ii) la fonction sous l'intégrale est p. p. S^1 comme produit de deux fonctions de cette espèce, dont une est bornée. Ainsi la fonction $U(T)=\int_0^T P_1(t)f'(t\xi)\,dt$ est bornée, donc u. p. p. Par conséquent, en tenant compte de (i), la fonction $-\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(T\xi)+\xi U(T)$ est également u. p. p. La suite $\{H(f,\xi,N)\}$ est en vertu de (13) celle des valeurs admises par cette fonction pour $T=1,2,\ldots$, elle est donc presque périodique en vertu de (A).

Comme toute suite presque périodique converge en moyenne [26]), c'est également le cas de $H(f,\xi,N)$ sous les hypothèses du théorème VIII. Si l'on exige de plus que $\xi\lambda$ ne soit entier pour aucun $\lambda\epsilon\Lambda$, $\lambda\neq 0$, la limite en moyenne de H est égale à $-\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}\mathscr{M}_f+\xi\mathscr{M}_U$. Pour montrer ceci, il suffit d'appliquer le théorème VI à la fonction $f(t)$, et puis, en tenant compte de ce que les exposants de Fourier de $U(T)$ sont égaux à $n+\lambda\xi$ (n entier, $n\neq 0$, $\lambda\epsilon\Lambda$, $\lambda\neq 0$), donc non entiers, d'appliquer le théorème VI pour $\xi=1$ à la fonction $U(T)$.

Théoreme IX. *$f(t)$ étant une fonction u. p. p., si la suite $G(f,\xi,N)$ est bornée, elle est presque périodique.*

[24]) Cf. [20]).

[25]) Cf. par exemple: I. Seynsche, *Zur Theorie der fastperiodischen Zahlfolgen*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 55 (1931), p. 395-421.

[26]) A. Walther, *Fastperiodische Folgen und Potenzreihen mit fastperiodischen Koeffizienten*, Abh. a. d. Math. Seminar d. Hamburgischen Universität 6 (1928), p. 217-234.

Ce théorème résulte immédiatement de la définition de $G(f, \xi, N)$, de la proposition (A) et du théorème de WALTHER[27]), d'après lequel, $a_1, a_2, \ldots$ étant une suite presque périodique, la presque-périodicité de la suite $a_1, a_1+a_2, \ldots$ équivaut à ce qu'elle est bornée.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY.
(INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT)

---

[27]) A. Walther, *Über lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite*, Göttinger Nachrichten (Math.-phys. Kl.) 1927, p. 196-216.

(*Reçu par la Rédaction le 15. 11. 1949*).

Banach spaces of functions analytic in the unit circle, II

by

A. E. TAYLOR (Los Angeles).

Table of Contents.

PART II. A Study of the Spaces H^p.

11. Definitions and basic properties. For any $f \in \mathfrak{A}$ we define

$$\mathfrak{M}_p[f;r]=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}. \tag{11.1}$$

Here $0 \leqslant r < 1$ and $0 < p$.

Definition 11.1. The class H^p is defined as the set of all $f \in \mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{M}_p[f;r]$ is bounded as a function of r. For such an f we define

$$\|f\|_p = \sup_r \mathfrak{M}_p[f;r]. \tag{11.2}$$

On occasion, when there can be no ambiguity, we may write $\|f\|$ instead of $\|f\|_p$. We observe that

$$\mathfrak{M}_p[f;r] \leqslant \mathfrak{M}_q[f;r], \qquad 0 < p < q, \tag{11.3}$$