Or, en vertu de (1), la série (2) converge pour $|z|<\varrho$, donc la formule (2) est valable pour tout $|z|>\varrho$ non appartenant à Γ. D'autre part, en traversant la courbe Γ long d'une normale, la fonction $F(z)$ croît de $2\pi i f(z)$ pour presque tout point z de Γ. D'où le théorème.

Ce théorème trouve des applications dans le calcul opératoire, à savoir il donne une démonstration nouvelle de la non-existence de $e^{-s^{a}\lambda}$ pour $a>1$ [2]).

Dans le cas particulier, où Γ est un segment $[a,b]$ de la partie positive de l'axe réelle, le théorème se réduit à celui que nous citons au commencement de cette Note.

[2]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, ce volume, p. 208-224.

(Reçu par la Rédaction le 15. 5. 1951).

Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles

par

J. G.-MIKUSIŃSKI (Wrocław).

1. Introduction.

Le sujet de cet article sont les équations différentielles linéaires

$$(*) \qquad a_0 x^{(n)}+a_1 x^{(n-1)}+\ldots+a_n x=f(\lambda)$$

dont les coefficients a_ν sont des opérateurs et $f(\lambda)$ est une fonction opératoire donnée [1]). Nous montrerons que le nombre de solutions linéairement indépendantes peut être, en général, inférieur à n, même dans le cas où l'équation caractéristique

$$(**) \qquad a_0 w^n+a_1 w^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

a n racines [2]). Par ce fait, notre théorie diffère un peu de la théorie des équations différentielles aux coefficients numériques. Cette dernière peut d'ailleurs être regardée comme un cas particulier de la présente.

Dans la seconde partie de cet article, nous appliquerons les résultats obtenus aux équations aux dérivées partielles

$$\sum a_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^{\mu}\partial\lambda^{\nu}}x(t,\lambda)=\varphi(t,\lambda),$$

dont les coefficients sont des nombres complexes quelconques.

[1]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 41-70, en particulier § 23 et § 24.

[2]) On ne sait pas si toute équation de la forme (**) a des racines; on ne sait même pas si l'équation $w^2-a=0$ est résoluble dans le corps des opérateurs. C'est pourquoi l'étude des équations différentielles (*) serait peut être prématurée, sinon le fait que dans beaucoup de cas particuliers la réponse est affirmative, ce qui permet, par exemple, à faire des applications intéressantes dans le domaine des équations classiques aux dérivées partielles.

2. Expressions différentielles linéaires.

En posant

$$Lx=a_0x^{(n)}+\ldots+a_nx, \tag{1}$$

on a évidemment

$$L(ax+by)=aLx+bLy, \tag{2}$$

quels que soient les opérateurs a et b.

Si Lx s'annule identiquement pour une fonction opératoire $x=x(\lambda)$, cette fonction est indéfiniment dérivable et l'expression $(Lx)^{(m)}=L(x^{(m)})$ s'annule encore pour tout $m=1,2,\ldots$

Si L_1x et L_2x sont deux expressions de la forme (1) et si L_2x s'annule pour une fonction $x=x(\lambda)$, il en est de même de l'expression $L_1L_2x=L_1(L_2x)$.

A toute expression Lx est lié le *polynôme caractéristique*

$$P(w)=a_0w^n+\ldots+a_n,$$

possédant les mêmes coefficients que Lx.

On a le théorème suivant:

Si $P_1(w)$ et $P_2(w)$ sont des polynômes caractéristiques des expressions L_1x et L_2x respectivement, alors

1° *la somme $P_1(w)+P_2(w)$ est le polynôme caractéristique de l'expression $(L_1+L_2)x=L_1x+L_2x$;*

2° *le produit $P_1(w)P_2(w)$ est le polynôme caractéristique de l'expression $L_1L_2x=L_1(L_2x)$.*

Démonstration. La proposition 1° est bien évidente. Elle réduit la démonstration de 2° au cas où $L_1x=ax^{(m)}$ $(m=0,1,\ldots)$ et $L_2x=a_0x^{(n)}+\ldots+a_nx$. Or, on a

$$L_1L_2x=a(a_0x^{(n)}+\ldots+a_nx)^{(m)}=aa_0x^{(m+n)}+\ldots+aa_nx^{(m)},$$

ce qui complète la démonstration.

D'après le théorème précédent, *l'ensemble des expressions Lx constitue un anneau isomorphe à l'anneau des polynômes $P(w)$.*

En particulier, on a $L_1L_2x=L_2L_1x$; donc l'expression L_1L_2x s'annule si l'une quelconque des expressions L_1x ou L_2x s'annule. Plus généralement, si l'une quelconque des expressions $L_1x,\ldots,L_nx$ s'annule, il en est de même de leur *produit*

$$Lx=L_1\ldots L_nx.$$

Posons généralement

$$L^1x=Lx \quad \text{et} \quad L^{n+1}x=LL^nx \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Si Lx s'annule pour une fonction $x(\lambda)$, alors L^nx $(n=1,2,\ldots)$ s'annule en remplaçant x par l'une quelconque des fonctions $\lambda^\nu x(\lambda)$ $(\nu=0,\ldots,n-1)$.

Démonstration. Si Lx a le polynôme caractéristique $P(w)$, désignons par $L'x$ l'expression différentielle correspondant à la dérivée $P'(w)$ de $P(w)$. Alors

$$(L^n)'x=nL^{n-1}L'x.$$

Il est facile de vérifier que l'on a généralement

$$L(\lambda x)=\lambda Lx+L'x.$$

Donc

$$L^{n+1}(\lambda^n x)=\lambda L^{n+1}(\lambda^{n-1}x)+(n+1)L^nL'(\lambda^{n-1}x),$$

d'où la proposition résulte par induction.

3. L'équation homogène.

Nous dirons qu'un opérateur w est *logarithme* lorsqu'il existe une solution non triviale de l'équation différentielle $x'-wx=0$. Par exemple, les nombres, les fonctions de la classe C et l'opérateur différentiel s sont logarithmes; cependant, l'opérateur s^2 ne l'est plus [3]).

Théorème. *Si l'équation*

$$a_0w^n+a_1w^{n-1}+\ldots+a_n=0 \qquad (a_0\neq 0) \tag{3}$$

a n racines et si p (et seulement p) parmi elles sont logarithmes, alors l'équation différentielle

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=0 \tag{4}$$

a p (et seulement p) solutions linéairement indépendantes [4]). *En désignant par $w_1,\ldots,w_m$ les racines-logarithmes différentes et par*

---

[3]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, ce volume, p. 215-218.

[4]) Les fonctions $x_1(\lambda),\ldots,x_n(\lambda)$ sont *linéairement dépendantes* dans l'intervalle considéré lorsqu'il existe des opérateurs $c_1,\ldots,c_n$, non tous nuls, tels que $c_1x_1(\lambda)+\ldots+c_nx_n(\lambda)=0$ identiquement dans cet intervalle. Dans le cas contraire, ces fonctions sont *linéairement indépendantes*.

$a_1,\dots,a_m$ $(a_1+\dots+a_m=p)$ *leur ordre de multiplicité, ces solutions peuvent s'écrire sous la forme*

$$\lambda^\nu e^{w_\mu\lambda} \qquad (\mu=1,\dots,m;\ \nu=0,\dots,a_\mu-1). \tag{5}$$

Si, en particulier, les opérateurs $a_0,\dots,a_n$ sont des nombres, on a $p=n$ et le théorème devient le théorème classique sur l'équation différentielle aux coefficients numériques.

Démonstration du théorème. L'expression

$$Lx=a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx$$

contient a_μ $(\mu=1,\dots,m)$ *facteurs* de la forme

$$L_\mu x=x'-w_\mu x;$$

ces *facteurs* s'annulent pour $x=e^{w_\mu\lambda}$. Le *produit* $L_\mu^{a_\mu}x$ s'annule donc pour $x=\lambda^\nu e^{w_\mu\lambda}$ $(\nu=0,\dots,a_\mu-1)$ et, par conséquent, il en est de même de Lx. Donc, toutes les fonctions (5) satisfont à l'équation (4).

Soient $c_{\mu\nu}$ $(\mu=1,\dots,m;\ \nu=0,\dots,a_\mu-1)$ n opérateurs tels que l'on ait

$$\sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}\lambda^\nu e^{w_\mu\lambda}=0 \qquad (\mu=0,\dots,m;\ \nu=0,\dots,a_\mu-1)$$

identiquement dans l'intervalle considéré. En dérivant cette identité σ fois $(\sigma=0,\dots,p-1)$, il vient

$$\sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}(\lambda^\nu e^{w_\mu\lambda})^{(\sigma)}=0 \qquad (\sigma=0,\dots,p-1). \tag{6}$$

Écrivons le déterminant de ce système sous la forme

$$D=|(\lambda^\nu e^{w_\mu\lambda})^{(\sigma)}| \qquad \begin{pmatrix}\sigma=0,\dots,p-1;\\ \mu=0,\dots,m;\ \nu=0,\dots,a_\mu-1\end{pmatrix}.$$

Par combinaison des colonnes, on peut transformer ce déterminant en

$$\left|\sum_{\gamma=0}^{\nu}\binom{\nu}{\gamma}(-\lambda)^{\nu-\gamma}(\lambda^\gamma e^{w_\mu\lambda})^{(\sigma)}\right|.$$

On a

$$a_{\sigma\mu\nu}=\sum_{\gamma=0}^{\nu}\binom{\nu}{\gamma}(-\lambda)^{\nu-\gamma}(\lambda^\gamma e^{w_\mu\lambda})^{(\sigma)}$$

$$=\sum_{\gamma=0}^{\nu}\binom{\nu}{\gamma}(-\lambda)^{\nu-\gamma}\sum_{\varkappa=0}^{\gamma}\binom{\sigma}{\varkappa}\frac{\gamma!}{(\gamma-\varkappa)!}\lambda^{\gamma-\varkappa}w_\mu^{\sigma-\varkappa}e^{w_\mu\lambda}\ [5]).$$

[5]) Si $\varkappa>\sigma$, on pose $\binom{\sigma}{\varkappa}=0$.

En changeant l'ordre de sommation, il vient

$$a_{\sigma\mu\nu}=e^{w_\mu\lambda}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\binom{\sigma}{\varkappa}\lambda^{\nu-\varkappa}w_\mu^{\sigma-\varkappa}\sum_{\gamma=\varkappa}^{\nu}(-1)^{\nu-\gamma}\binom{\nu}{\gamma}\frac{\gamma!}{(\gamma-\varkappa)!},$$

et en vertu des égalités

$$\sum_{\gamma=\varkappa}^{\nu}(-1)^{\nu-\gamma}\binom{\nu}{\gamma}\frac{\gamma!}{(\gamma-\varkappa)!}=\sum_{\gamma=\varkappa}^{\nu}(-1)^{\nu-\gamma}\frac{\nu!}{(\nu-\varkappa)!}\binom{\nu-\varkappa}{\gamma-\varkappa}$$

$$=\frac{\nu!}{(\nu-\varkappa)!}\sum_{\beta=0}^{\nu-\varkappa}(-1)^{\nu-\beta-\varkappa}\binom{\nu-\varkappa}{\beta}$$

$$=\begin{cases}\nu! & \text{pour } \nu=\varkappa,\\ 0 & \text{pour } \nu>\varkappa,\end{cases}$$

on a

$$a_{\sigma\mu\nu}=\sigma\dots(\sigma-\nu+1)w_\mu^{\sigma-\nu}e^{w_\mu\lambda},$$

où le produit $\sigma\dots(\sigma-\nu+1)$ est à remplacer par 1 lorsque $\nu=0$.

Le déterminant D peut donc être représenté sous la forme

$$D=\exp\Big(\sum_{\mu=1}^{m}a_\mu w_\mu\lambda\Big)\cdot|\sigma\dots(\sigma-\nu+1)w_\mu^{\sigma-\nu}|$$

$$=\exp\Big(\sum_{\mu=1}^{m}a_\mu w_\mu\lambda\Big)\cdot\prod_{\mu=1}^{m}(a_\mu-1)!!\prod_{1\leqslant\varkappa<\mu\leqslant m}(w_\mu-w_\varkappa)^{a_\varkappa a_\mu}\ [6]),$$

où le symbole $k!!$ est défini en posant

$$0!!=1,$$

$$k!!=1!\,2!\dots k! \qquad \text{pour} \quad k=1,2,\dots$$

Les opérateurs $w_1,\dots,w_\mu$ étant différents par hypothèse, le déterminant D est non nul et on a

$$c_{\mu\nu}=0 \qquad (\mu=0,\dots,n;\ \nu=0,\dots,a_\mu-1).$$

C'est ce qui prouve la linéaire indépendance des solutions (5).

Il reste à démontrer que le nombre de solutions linéairement indépendantes est $\leqslant p$. Supposons d'abord que $p=n$ et que $x_1(\lambda),\dots,x_{n+1}(\lambda)$ soient des solutions de l'équation (4). Alors la fonction

$$x(\lambda)=c_1x_1(\lambda)+\dots+c_{n+1}x_{n+1}(\lambda)$$

[6]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur un déterminant*, à paraître dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique.

est encore une solution de (4), quels que soient les opérateurs $c_1,\dots,c_{n+1}$. On peut évidemment déterminer ces opérateurs de manière à avoir

$$c_i\neq 0 \quad \text{pour un certain} \quad 1\leqslant i\leqslant n+1$$

et

$$x(\lambda_0)=x'(\lambda_0)=\dots=x^{(n-1)}(\lambda_0)=0$$

pour une valeur λ_0 de l'intervalle considéré. Or, d'après un théorème publié antérieurement [7]), on a $x(\lambda)=0$ dans l'intervalle tout entier, ce qui prouve la linéaire dépendance des solutions $x_1(\lambda),\dots,x_{n+1}(\lambda)$.

Si $p<n$, désignons par $w_1,\dots,w_n$ les n racines (non nécessairement différentes) de l'équation (3) et supposons que $w_1,\dots,w_p$ soient des logarithmes et que $w_{p+1},\dots,w_p$ ne le soient pas. En posant

$$L_\nu x=x'-w_\nu x \qquad (\nu=1,\dots,n),$$

on peut écrire

$$Lx=L_0L_{p+1}\dots L_nx,$$

où $L_0x=a_0L_1\dots L_px$. L'équation $L_0x=0$ a p solutions linéairement indépendantes et chacune des équations

$$L_\nu x=0 \qquad (\nu=p+1,\dots,n),$$

est dépourvue de solutions non triviales.

Nous montrerons que l'équation

$$L_0L_{p+1}x=0$$

n'a que p solutions linéairement indépendantes. En effet, si elle en avait $p+1$: $x_1(\lambda),\dots,x_{p+1}(\lambda)$, l'une au moins des fonctions $L_0x_\nu(\lambda)$ $(\nu=1,\dots,p-1)$, soit $L_0x_{\nu_0}(\lambda)$, serait non nulle identiquement. Cette fonction satisfait à l'équation $L_{p+1}x=0$, d'où la contradiction.

Par induction, on voit que l'équation $L_0L_{p+1}\dots L_nx=0$ ne peut posséder que p solutions linéairement indépendantes, ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire. *La solution générale de l'équation* (4) *est*

$$x(\lambda)=\sum_{\mu,\nu}c_{\mu\nu}\lambda^\nu e^{w_\mu\lambda} \qquad (\mu=1,\dots,m;\ \nu=0,\dots,\alpha_\mu-1), \tag{7}$$

où les coefficients $c_{\mu\nu}$ sont des opérateurs arbitraires.

[7]) S. Drobot et J. G.-Mikusiński, *Sur l'unicité de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits (II)*, Studia Mathematica 11 (1949), p. 38-40.

4. L'équation non-homogène.

Si $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ sont deux solutions de l'équation non-homogène

$$a_0x^{(n)}+\dots+a_nx=f(\lambda) \qquad (a_0\neq 0), \tag{8}$$

leur différence $x_1(\lambda)-x_2(\lambda)$ satisfait évidemment à l'équation homogène

$$a_0x^{(n)}+\dots+a_nx=0. \tag{9}$$

Théorème d'unicité. *Si l'équation caractéristique*

$$a_0w^{(n)}+\dots+a_n=0$$

a n racines et si p (et seulement p) parmi elles sont des logarithmes, alors l'équation (8) *a au plus une solution $x(\lambda)$ satisfaisant aux conditions initiales*

$$x(\lambda_0)=b_0,\quad x'(\lambda_0)=b_1,\quad \dots,\quad x^{(p-1)}(\lambda_0)=b_{p-1}, \tag{10}$$

où $b_0,\dots,b_{p-1}$ sont des opérateurs et λ_0 un point donné de l'intervalle considéré.

Démonstration. Si $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ sont deux solutions de (8) satisfaisant aux conditions (10), leur différence $x(\lambda)=x_1(\lambda)-x_2(\lambda)$ est une solution de (9) satisfaisant aux conditions

$$x(\lambda_0)=x'(\lambda_0)=\dots=x^{(p-1)}(\lambda_0)=0.$$

Or, cette différence est de la forme (7), on a donc (6), d'où $c_{\mu\nu}=0$ pour $\mu=1,\dots,m$; $\nu=0,\dots,\alpha_\mu-1$. On a donc identiquement $x(\lambda)=x_1(\lambda)-x_2(\lambda)=0$.

Le théorème précédent est très semblable au théorème classique d'unicité, la seule différence consiste en ce que le nombre de conditions initiales est égal au nombre de racines-logarithmes de l'équation caractéristique et non plus au degré de l'équation donnée.

Le *problème d'existence* des solutions est beaucoup plus compliqué. Dans certains cas, l'équation (8) peut être dépourvue de toute solution, même lorsque la fonction $f(\lambda)$ est continue. Considérons par exemple l'équation

$$x'+s^2x=f(\lambda) \qquad (-1\leqslant\lambda\leqslant 1), \tag{11}$$

où

$$f(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{pour} \quad -1\leqslant\lambda\leqslant 0,\\ \lambda^2 & \text{pour} \quad 0<\lambda\leqslant 1.\end{cases}$$

L'équation caractéristique est $w+s^2=0$ et sa racine $-s^2$ n'est pas logarithme. Il existe donc tout au plus une solution de l'équation (11). Cette solution doit être identiquement nulle pour $-1\leqslant\lambda\leqslant 0$ et égale à $l^2\lambda^2-2l^4\lambda+2l^6$ pour $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Or, ce n'est pas possible, car la fonction ainsi définie n'est pas continue au point $\lambda=0$.

Pour faciliter l'étude du problème d'existence, nous introduirons une classification des équations [8]), en les divisant en trois types, suivant le nombre de racines-logarithmes de l'équation caractéristique:

1° *l'équation logarithmique*: toutes les racines de l'équation caractéristique sont des logarithmes;

2° *l'équation mixte*: il existe des racines de l'équation caractéristique qui sont des logarithmes et il en existe d'autres qui ne le sont pas;

3° *l'équation pure*: aucune des racines de l'équation caractéristique n'est logarithme.

Les expressions Lx, correspondant à ces types d'équations, seront aussi dites *logarithmique*, *mixte* ou *pure* respectivement.

5. L'équation logarithmique.

Un exemple d'une telle équation est l'équation aux coefficients numériques; dans ce cas la solution existe, quelle que soit la fonction continue $f(\lambda)$. Cette même proposition, généralisée, est également valable pour toute équation logarithmique, à savoir:

Si l'équation (8) *est logarithmique, elle a n solutions linéairement indépendantes, quelle que soit la fonction continue* $f(\lambda)$.

Il suffit évidemment de démontrer l'existence d'une seule solution. Celle-ci peut être obtenue, en appliquant la méthode de *variation des constantes*. Cette méthode étant classique et bien connue, nous la reproduirons tout brièvement.

Soient $x_1(\lambda),\dots,x_n(\lambda)$ les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=0.$$

[8]) Nous nous bornons toujours aux équations pour lesquelles le nombre de racines de l'équation caractéristique est égal à l'ordre de l'équation donnée.

On pose

$$x(\lambda)=c_1(\lambda)x_1(\lambda)+\dots+c_n(\lambda)x_n(\lambda), \tag{12}$$

et on exige que l'on ait

$$\begin{aligned} &c_1'(\lambda)x_1(\lambda)+\dots+c_n'(\lambda)x_n(\lambda)=0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &c_1'(\lambda)x_1^{(n-2)}(\lambda)+\dots+c_n'(\lambda)x_n^{(n-2)}(\lambda)=0,\\ &c_1'(\lambda)x_1^{(n-1)}(\lambda)+\dots+c_n'(\lambda)x_n^{(n-1)}(\lambda)=f(\lambda). \end{aligned} \tag{13}$$

Le système (13) peut être résolu en $c_1'(\lambda),\dots,c_n'(\lambda)$, car le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1(\lambda) & \dots x_n(\lambda)\\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_1^{(n-1)}(\lambda)\dots x_n^{(n-1)}(\lambda) & \end{vmatrix}$$

est non nul dans l'intervalle considéré tout entier. Par intégration, on peut déterminer $c_1(\lambda),\dots,c_n(\lambda)$. En substituant les valeurs obtenues dans (12), la fonction $x(\lambda)$ est la solution cherchée.

6. L'équation mixte.

Toute expression différentielle mixte Lx peut être décomposée en deux expressions

$$Lx=L_1L_2x,$$

dont l'une, soit L_1x, est pure et l'autre, L_2x, est logarithmique. Supposons que l'on connaisse une solution $x_0(\lambda)$ de l'équation pure

$$L_1x=f(\lambda); \tag{14}$$

cette solution est unique.

Alors la résolution de l'équation mixte

$$Lx=f(\lambda) \tag{15}$$

se réduit à la résolution de l'équation logarithmique

$$L_2x=x_0(\lambda).$$

En effet, si $x(\lambda)$ satisfait à cette dernière équation, on a

$$Lx(\lambda)=L_1L_2x(\lambda)=L_1x_0(\lambda)=f(\lambda).$$

Donc, si l'équation pure (14) est résoluble, l'équation mixte (15) a p (et seulement p) solutions linéairement indépendantes, où

p désigne le nombre de racines-logarithmes de l'équation caractéristique de (15). D'autre part, si (14) n'a pas de solution, il en est de même de (15). En effet, si $x(\lambda)$ était une solution de (15), la fonction $L_2x(\lambda)$ serait une solution de (14), car $L_1[L_2x(\lambda)]=f(\lambda)$. L'équation mixte (15) a donc p solutions linéairement indépendantes ou n'en a aucune, suivant que l'équation pure (14) est résoluble ou non.

La résolution de l'équation mixte se réduit ainsi entièrement à la résolution de l'équation pure.

7. L'équation pure.

Nous ne connaissons pas de critère général qui permettrait de décider en tout cas si la solution de l'équation pure existe ou non. On peut cependant donner diverses méthodes qui permettent de trouver la solution dans beaucoup de cas particuliers.

8. Méthode de séries de puissances.

L'équation

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=\lambda^m \qquad (a_n\neq 0), \tag{16}$$

où m est un nombre entier non négatif, a une solution polynomiale

$$x(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\ldots+c_m\lambda^m, \tag{17}$$

où $c_0,\ldots,c_m$ sont des opérateurs.

En effet, en substituant (17) dans (16) et en ordonnant le premier membre suivant les puissances de λ, on a

$$\sum_{\mu=0}^{m}\lambda^\mu\sum_{\varkappa=\mu}^{m}\frac{\varkappa!}{\mu!}a_{n+\mu-\varkappa}c_\varkappa=\lambda^m,$$

où $a_\nu=0$ pour $\nu<0$. Cette égalité détermine univoquement les valeurs $c_1,\ldots,c_m$.

Il est maintenant facile de voir que toute équation de la forme

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=b_0+b_1\lambda+\ldots+b_m\lambda^m \quad (a_n\neq 0) \tag{18}$$

a une solution polynomiale

$$x(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\ldots+c_m\lambda^m. \tag{19}$$

En effet, en désignant généralement par $x_m(\lambda)$ $(m=0,1,\ldots)$ le polynôme satisfaisant à l'équation (16), la fonction

$$x(\lambda)=b_0x_0(\lambda)+\ldots+b_mx_m(\lambda)$$

satisfait à l'équation (18) et elle est évidemment de la forme (19). En pratique, les coefficients $c_0,\ldots,c_m$ de (19) peuvent être déterminés directement en substituant (19) dans (18). Remarquons encore que si l'équation (18) est pure, la solution (19) est unique.

Considérons maintenant l'équation

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(\lambda) \qquad (a_n\neq 0), \tag{20}$$

où $f(\lambda)$ se laisse développer en une série de puissances

$$f(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2+\ldots,$$

où $b_0,b_1,b_2,\ldots$ sont des opérateurs. Désignons par

$$x_m(\lambda)=c_{m0}+c_{m1}\lambda+\ldots+c_{mm}\lambda^m$$

la solution de l'équation (16). Alors la série

$$x(\lambda)=\sum_{\mu=0}^{\infty}b_\mu c_{\mu 0}+\lambda\sum_{\mu=1}^{\infty}b_\mu c_{\mu 1}+\lambda^2\sum_{\mu=2}^{\infty}b_\mu c_{\mu 2}+\ldots \tag{21}$$

est une solution de (20), pourvu que toutes les séries $\sum_{\nu=\mu}^{\infty}b_\mu c_{\mu\nu}$ $(\nu=0,1,\ldots)$ ainsi que la série (21) soient convergentes. La solution trouvée est unique si l'équation (20) est pure.

Exemple. Considérons l'équation

$$x''+s^3x=\frac{1}{1-\lambda} \qquad (-1<\lambda<1). \tag{22}$$

La fonction $1/(1-\lambda)$ se développe en série

$$\frac{1}{1-\lambda}=1+\lambda+\lambda^2+\ldots$$

En cherchant la solution polynomiale $x_m(\lambda)$ de l'équation

$$x''+s^3x=\lambda^m \qquad (m=0,1,\ldots),$$

on trouve

$$x_m(\lambda)=\begin{cases} \dfrac{m!}{m!}t^3\lambda^m-\dfrac{m!}{(m-2)!}t^6\lambda^{m-2}+\dots+(-1)^{\frac{m}{2}}\dfrac{m!}{0!}t^{\frac{3}{2}(m+2)} & \text{lorsque } m \text{ est pair},\\ \dfrac{m!}{m!}t^3\lambda^m-\dfrac{m!}{(m-2)!}t^6\lambda^{m-2}+\dots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\dfrac{m!}{1!}t^{\frac{3}{2}(m+1)} & \text{lorsque } m \text{ est impair}.\end{cases}$$

On a donc la solution formelle de (22)

$$x(\lambda)=x_0(\lambda)+x_1(\lambda)+\dots=c_0+c_1\lambda+\dots,$$

où

$$c_m=\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{(m+2\mu)!}{m!}t^{3(m+\mu)}$$

$$=\left\{1+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{t^{3m+3\mu-1}}{m!(m+2\mu+1)\dots(3m+3\mu-1)}\right\}.$$

Il est évident que la série entre les crochets $\{\ \}$ converge uniformément dans tout intervalle $[0,t_0]$; les coefficients c_m ont donc un sens déterminé. Il reste à démontrer que la série $c_0+c_1\lambda+\dots$ converge pour tout $|\lambda|<1$. En effet, on a, pour $\mu\leqslant 1$ et $m\geqslant 1$,

$$\frac{t^{3m+3\mu-1}}{m!(m+2\mu+1)\dots(3m+3\mu-1)}<\frac{t^{3m-1}}{m!}\left(\frac{t^3}{m}\right)^{\mu};$$

si $0\leqslant t\leqslant t_0$ et m est assez grand, la dernière expression est inférieure à 1, ce qui entraîne la convergence de la série en question.

La solution de (22) peut donc être représentée par la formule explicite

$$x(\lambda)=\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\left[1+\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{t^{3m+3\mu-1}}{m!(m+2\mu-1)\dots(3m+3\mu-1)}\right]\right\}$$
$$(-1<\lambda<1);$$

cette solution est unique, car l'équation (22) est pure.

Remarquons encore que la méthode habituelle des coefficients indéterminés ne peut ici réussir. En effet, en cherchant d'évaluer

$c_0, c_1, \dots$ d'un seul coup, en substituant $x(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\dots$ dans l'équation

$$x''+s^3x=1+\lambda+\lambda^2+\dots,$$

on peut trouver une formule de recursion, mais on ne peut pas déterminer les coefficients initiaux c_0 et c_1 qui peuvent n'être pas du tout arbitraires.

9. Méthode de séries de Dirichlet.

L'équation

(23) $$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=e^{m\lambda},$$

où m est un nombre tel que

$$P(m)=a_0m^n+a_1m^{n-1}+\dots+a_n\neq 0,$$

a une solution de la forme

(24) $$x(\lambda)=\frac{e^{m\lambda}}{P(m)};$$

si l'équation est pure, la condition $P(m)\neq 0$ est satisfaite pour tout nombre m et la solution (24) est unique.

Considérons maintenant l'équation pure

(25) $$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=f(\lambda),$$

où $f(\lambda)$ se laisse développer en une série de Dirichlet

$$f(\lambda)=b_0+b_1e^{-\lambda}+b_2e^{-2\lambda}+\dots,$$

les coefficients $b_0, b_1, b_2, \dots$ étant des opérateurs. Alors la fonction

$$x(\lambda)=\frac{b_0}{P(0)}+\frac{b_1}{P(-1)}e^{-\lambda}+\frac{b_2}{P(-2)}e^{-2\lambda}+\dots$$

est la solution unique de l'équation (25), pourvu que la série soit convergente.

Exemple. Considérons l'équation pure

$$x''-sx'+s^2x=\operatorname{th}\lambda\ ^{9)}\qquad(\lambda>0).$$

On a

$$\operatorname{th}\lambda=1-2e^{-2\lambda}+2e^{-4\lambda}-2e^{-6\lambda}+\dots,$$

d'où la solution formelle

---

[9]) th signifie *tangens hyperbolicus*.

$$x(\lambda)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{1+s+s^2}e^{-2\lambda}+\frac{2}{4+2s+s^2}e^{-4\lambda}-\dots$$

$$=t-2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}t-2\lambda\right)$$

$$+2\sin\sqrt{3}t\cdot\exp(-t-4\lambda)-2\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}t\cdot\exp\left(-\frac{3}{2}t-6\lambda\right)+\dots$$

$$=\left\{t-\frac{2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\exp\left(\frac{t}{2}+2\lambda\right)}{1+4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\exp\left(\frac{t}{2}+2\lambda\right)+\exp(t+4\lambda)}\right\}.$$

La série obtenue est évidemment convergente, elle représente donc la solution cherchée; cette solution est unique.

10. Méthode de séries de Fourier.

Un procédé tout à fait analogue peut s'appliquer lorsque la fonction $f(\lambda)$ se développe en une série de Fourier

$$f(\lambda)=\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}b_\varkappa e^{i\varkappa\lambda}.$$

Alors la solution de l'équation

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=f(\lambda)$$

peut être représentée sous la forme

$$x(\lambda)=\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}\frac{b_\varkappa}{P(i\varkappa)}e^{i\varkappa\lambda},$$

pourvu que cette dernière série ainsi que ses dérivées d'ordre $1,\dots,n$ convergent uniformément.

Si les opérateurs $a_0,\dots,a_n$ et la fonction $f(\lambda)$ sont réels, il peut être plus commode d'introduire les fonctions trigonométriques.

Exemple. Résolvons l'équation

$$x''-sx=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin m\lambda}{m^2}. \tag{26}$$

Nous cherchons d'abord la solution

$$x_m(\lambda)=a_m\sin m\lambda \tag{27}$$

de l'équation

$$x''-sx=(-1)^m\frac{\sin m\lambda}{m^2}; \tag{28}$$

en substituant (27) dans (28), il vient

$$-(s+m^2)a_m\sin m\lambda=(-1)^m\frac{\sin m\lambda}{m^2},$$

d'où

$$a_m=\frac{(-1)^{m-1}}{m^2(s+m^2)}.$$

La solution cherchée est donc

$$x(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}x_m(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^2(s+m^2)}\sin m\lambda=\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}e^{-m^2t}\sin m\lambda\right\},$$

la série obtenue étant évidemment uniformément convergente.

Or, l'équation (26) est logarithmique, car l'équation caractéristique $w^2-s=0$ a deux racines $\sqrt{s}$ et $-\sqrt{s}$, dont chacune est un logarithme. La solution trouvée n'est donc pas unique, on a cependant la solution générale

$$x(\lambda)=c_1e^{\sqrt{s}\lambda}+c_2e^{-\sqrt{s}\lambda}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^2(s+m^2)}\sin m\lambda,$$

où c_1 et c_2 sont des opérateurs arbitraires.

11. Méthode d'intégrales définies.

Si, pour tout m d'un intervalle (m_1,m_2), il existe une solution $x(\lambda,m)$ de l'équation

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=f(\lambda,m),$$

alors la fonction

$$x(\lambda)=\int_{m_1}^{m_2}x(\lambda,m)\,dm$$

sera une solution de l'équation

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=\int_{m_1}^{m_2}f(\lambda,m)\,dm,$$

pourvu que les conditions convenables d'intégrabilité soient remplies.

Exemple. Dans l'équation

$$x^{(4)}+2s^2x''+s^4x=\frac{1}{1-\lambda}\,e^{\lambda-1}, \tag{29}$$

le second membre peut être représenté sous la forme de l'intégrale

$$\frac{1}{1-\lambda}\,e^{\lambda-1}=\int_1^\infty e^{-(1-\lambda)m}\,dm \qquad (\lambda<1).$$

Or, l'équation

$$x^{(4)}+2s^2x''+s^4x=e^{-(1-\lambda)m}$$

a la solution

$$x(\lambda,m)=\frac{e^{-(1-\lambda)m}}{(m^2+s^2)^2}=\left\{\frac{1}{2m^3}\,e^{-(1-\lambda)m}(\sin mt-mt\cos mt)\right\}.$$

Donc la solution de (29) est

$$x(\lambda)=\int_1^\infty \frac{e^{-(1-\lambda)m}}{(m^2+s^2)^2}\,dm=\left\{\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{m^3}e^{-(1-\lambda)m}(\sin mt-mt\cos mt)\,dm\right\},$$

car l'intégrale converge uniformément dans tout intervalle

$$(-\infty<\lambda<\lambda_0<1),$$

ainsi que toutes ses dérivées par rapport à λ. Cette solution est unique, car l'équation (29) est pure.

12. Une classe particulière d'équations.

Dans les considérations précédentes nous avons toujours supposé que le nombre de racines de l'équation caractéristique soit égal à son degré, ou, ce qui revient au même, que le polynôme caractéristique se laisse décomposer en facteurs linéaires. Nous montrerons que cette hypothèse devient superflue lorsque $a_0,\dots,a_n$ sont des polynômes de l'opérateur s

$$a_\nu=\beta_{\nu 0}s^{m_\nu}+\beta_{\nu 1}s^{m_\nu-1}+\dots+\beta_{\nu m_\nu} \qquad (\nu=0,\dots,n), \tag{30}$$

où $\beta_{\nu\sigma}$ sont des nombres complexes; dans ce cas, la proposition sur la décomposition en facteurs linéaires se laisse démontrer moyennant la théorie des fonctions algébriques.

Si $F(z)$ est une fonction algébrique de variable complexe z, il existe un demi-plan $\mathrm{R}(z)>z_0$, dans lequel $F(z)$ n'a pas de points

critiques. Si n est le degré de la fonction $F(z)$, elle se décompose dans le demi-plan $\mathrm{R}(z)>z_0$ en n branches séparées. Chacune de ces branches est une fonction holomorphe pour $\mathrm{R}(z)>z_0$ qui peut être représentée, pour z assez grand, sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{p} z^{(\nu-1)/p}(\gamma_{\nu,m_\nu}z^{m_\nu}+\dots+\gamma_{\nu,1}z+\gamma_{\nu,0}+\gamma_{\nu,-1}z^{-1}+\dots),$$

où p est un nombre naturel non supérieur à n, les coefficients $\gamma_{\nu,\mu}$ sont des nombres complexes et $z^{(\nu-1)/p}$ admet des valeurs réelles pour z réel.

Considérons l'ensemble H des fonctions $f(z)$ holomorphes dans un demi-plan $\mathrm{R}(z)>z_0$ (z_0 peut être différent pour différentes fonctions) qui sont des branches des fonctions algébriques. L'ensemble H constitue évidemment un corps.

Considérons encore l'ensemble S des opérateurs de la forme

$$k=\sum_{\nu=1}^{p} s^{(\nu-1)/p}(\gamma_{\nu,m_\nu}s^{m_\nu}+\dots+\gamma_{\nu,1}s+\gamma_{\nu,0}+\gamma_{\nu,-1}s^{-1}+\dots), \tag{31}$$

où s est l'opérateur différentiel et les γ ont le même sens que dans la formule précédente.

Si $k=0$, tous les coefficients $\gamma_{\nu,\mu}$ sont nuls. En effet, on a alors pour $m>m_\nu+1$ $(\nu=1,\dots,n)$

$$l^m k=\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\gamma_{\nu,m_\nu}\frac{t^{m-m_\nu-\frac{\nu-1}{n}-1}}{\Gamma\left(m-m_\nu-\frac{\nu-1}{n}\right)}+\dots\right)\right\}=0,$$

d'où la proposition résulte.

L'ensemble S est évidemment isomorphe au corps H.

Il s'ensuit que *tout polynôme*

$$P(w)=a_0w^n+a_1w^{n-1}+\dots+a_n$$

dont les coefficients sont de la forme (30) *se décompose en n facteurs linéaires*

$$P(w)=a_0\prod_{\nu=1}^{n}(w-w_\nu),$$

où les opérateurs w_ν sont de la forme (31). Chacun des opérateurs w_ν peut s'écrire encore sous la forme de somme finie

(32) $$\gamma+g+\sum_{\varkappa=1}^{p}\gamma_\varkappa s^{\alpha_\varkappa},$$

où γ et $\gamma_\varkappa$ sont des nombres complexes, $g=\{g(t)\}$ est une fonction continue pour $t>0$ et telle que $|g(t)|<t\cdot\varepsilon$ $(\varepsilon<1)$ au voisinage de $t=0$ et α_ν sont des nombres positifs. La somme $\sum_{\varkappa=1}^{p}\gamma_\varkappa s^{\alpha_\varkappa}$ sera dite *partie principale* de w_ν.

Les opérateurs $\gamma_\varkappa s^{\alpha_\varkappa}$ sont logarithmes lorsque $\alpha_\varkappa<1$ ou bien lorsque $\alpha_\varkappa=1$ et $\gamma_\varkappa$ est réel. Dans d'autres cas, les opérateurs ne sont pas logarithmes. L'opérateur (32) est logarithme lorsque tous les membres de la partie principale sont logarithmes (γ et g le sont toujours); dans le cas contraire, (32) n'est pas logarithme [10]). On peut donc, dans chaque cas particulier, déterminer le nombre de racines-logarithmes de l'équation

$$a_0w^n+a_1w^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Par conséquent, on peut établir le type de toute équation différentielle

$$a_nx^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_0x=0$$

dont les coefficients sont de la forme (30); de plus, on peut déterminer le nombre de solutions linéairement indépendantes et établir la solution générale. Cette classe d'équations est liée étroitement à une classe d'équations habituelles aux dérivées partielles.

13. Équations aux dérivées partielles aux coefficients constants.

L'équation aux dérivées partielles

(33) $$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}a_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu}=\varphi(t,\lambda),$$

où $a_{\mu\nu}$ sont des nombres, considérée dans la demi-bande $0\leqslant t<\infty$, $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$ se laisse écrire, en symboles du calcul opératoire,

(34) $$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(\lambda),$$

où

$$a_{n-\nu}=a_{m\nu}s^m+\ldots+a_{0\nu}\qquad(\nu=0,\ldots,n)$$

[10]) Voir J. G.-Mikusiński, *Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire*, ce volume p. 222.

et

$$f(\lambda)=\{\varphi(t,\lambda)\}+\sum_{\varkappa=0}^{m-1}s^{m-\varkappa-1}\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{m-\varkappa+\mu,\nu}h_\mu^{(\nu)}(\lambda),$$

$$h_\varkappa(\lambda)=\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial t^\varkappa}x(t,\lambda)\right)_{t=0}.$$

Pour avoir l'équation opératoire (34), il suffit donc de connaître les m fonctions $h_\varkappa(\lambda)$ $(\varkappa=0,\ldots,m-1)$ qui déterminent le comportement de la solution $x(t,\lambda)$ de (33) sur l'axe des λ.

Adoptons pour les équations (33) la même classification que pour les équations (34); on distinguera donc les équations *logarithmiques*, *mixtes* et *pures*, suivant le nombre de racines-logarithmes de l'équation caractéristique correspondante. Cette classification est relative à la variable λ, car les deux variables y jouent un rôle différent.

14. L'équation de second ordre.

La forme générale de l'équation de second ordre aux coefficients constants est

(35) $$\alpha\frac{\partial^2x}{\partial\lambda^2}+2\beta\frac{\partial^2x}{\partial\lambda\partial t}+\gamma\frac{\partial^2x}{\partial t^2}+2\delta\frac{\partial x}{\partial\lambda}+2\varepsilon\frac{\partial x}{\partial t}+\eta x=\varphi(\lambda,t).$$

L'équation opératoire correspondante

$$\alpha x''+2(\beta s+\delta)x'+(\gamma s^2+2\varepsilon s+\eta)x=f(\lambda)$$

a l'équation caractéristique

$$\alpha w^2+2(\beta s+\delta)w+(\gamma s^2+2\varepsilon s+\eta)=0.$$

Si $\alpha\neq0$, on a

$$w=\frac{1}{\alpha}\left(-\beta s-\delta\pm s\sqrt{\Delta}\right),$$

où $\Delta=A+2Bl+Cl^2$, $A=\beta^2-\alpha\gamma$, $B=\beta\delta-\alpha\varepsilon$, $C=\delta^2-\alpha\eta$.

Supposons que tous les nombres α, β, γ, δ, ε et η soient réels. L'équation (35) est *elliptique* lorsque $A<0$; alors on peut écrire

$$w=\frac{1}{\alpha}[-\beta s+\delta\pm is(a_0+a_1l+a_2l^2+\ldots)],$$

où les coefficients $a_1,a_2,\ldots$ sont réels.

On voit que la fonction $e^{w\lambda}$ n'existe pas.

Donc, *toute équation elliptique est pure.*

Si l'équation (35) est *hyperbolique* et si $\alpha\neq 0$, on a $\Delta>0$ et on peut écrire

$$w=\frac{1}{\alpha}[-\beta s+\delta\pm s(\alpha_0+\alpha_1 l+\alpha_2 l^2+\ldots],$$

où les coefficients $\alpha_0,\alpha_1,\ldots$ sont réels. On voit que la fonction $e^{w\lambda}$ existe pour les deux racines w. Donc l'équation (35) est logarithmique.

Si l'équation (35) est hyperbolique et si $\alpha=0$, on a $\beta\neq 0$ et

$$w=-\frac{\gamma s^2+2\varepsilon s+\eta}{2(\beta s+\delta)}$$

$$=-\frac{\gamma}{2\beta}s+\frac{\gamma\delta-2\beta\varepsilon}{2\beta^2}-\frac{\beta^2\eta-2\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta^2}{2\beta^2}\frac{1}{\beta s+\delta}.$$

La fonction exponentielle $e^{w\lambda}$ existe.

Donc *toute équation hyperbolique est logarithmique.*

Si l'équation (35) est parabolique et si $\alpha\neq 0$, on a $A=0$ et

$$w=\frac{1}{\alpha}(-\beta s+\delta\pm\sqrt{s}\sqrt{2B+Cl})$$

et on voit que la fonction $e^{w\lambda}$ existe pour les deux racines w. Donc l'équation (35) est logarithmique.

Si l'équation (35) est parabolique et si $\alpha=0$, on a $A=0$, $\beta=0$, $\gamma\neq 0$, $\delta\neq 0$ et

$$w=-\frac{\gamma}{2\delta}s^2-\frac{\varepsilon}{\delta}s+\frac{y}{2\delta};$$

la fonction $e^{w\lambda}$ n'existe pas dans ce cas.

L'équation parabolique est donc logarithmique ou pure suivant que $\alpha\neq 0$ ou $\alpha=0$.

15. Autres exemples.

Nous donnerons encore quelques exemples d'équations d'ordre supérieur à 2.

L'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial^n x}{\partial t^n}=0$$

est évidemment pure lorsque $n=3,4,\ldots$ et logarithmique lorsque $n=1,2$.

L'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^n x}{\partial t^n}=0$$

est pure lorsque $n=2,3,\ldots$ et logarithmique lorsque $n=1$.

Si $m\geqslant 3$, l'équation

$$\frac{\partial^m x}{\partial\lambda^m}-\frac{\partial^n x}{\partial t^n}=0$$

est 1° logarithmique lorsque $m>n$, 2° mixte lorsque $m=n$ et 3° pure lorsque $m<n$.

L'équation

$$\frac{\partial^m x}{\partial\lambda^m}+\frac{\partial^n x}{\partial t^n}=0 \qquad (m\geqslant 3)$$

est 1° logarithmique lorsque $m>n$, 2° mixte lorsque $m=n=$ nombre impair, 3° pure lorsque $m=n=$ nombre pair et 4° pure lorsque $m<n$.

16. Un théorème d'unicité.

Le théorème du § 4 peut être facilement étendu aux équations

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}a_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu}=\varphi(t,\lambda) \quad (\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2,\ 0\leqslant t<\infty). \tag{36}$$

Nous nous bornerons partout dans la suite à considérer des solutions $x(t,\lambda)$ dont toutes les dérivées

$$\frac{\partial^{\mu+\nu}x}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu} \qquad (\mu=0,\ldots,m;\ \nu=0,\ldots,n)$$

sont continues dans le domaine considéré. Tous les théorèmes qui suivent seront entendus pour cette classe de solutions. On pourrait d'ailleurs énoncer ces théorèmes dans des conditions moins restrictives.

Supposons que l'équation caractéristique correspondant à l'équation (36) ait p (et seulement p) racines-logarithmes. Alors *les conditions*

$$\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}a_{m-\varkappa+\mu,\nu}h_\mu^{(\nu)}(\lambda)=g_\varkappa(\lambda) \qquad (\varkappa=0,\ldots,m-1), \tag{37}$$

$$\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial\lambda^\varkappa}x(t,\lambda)\right)_{\lambda=\lambda_0}=v_\varkappa(t) \quad (\lambda_1\leqslant\lambda_0\leqslant\lambda_2;\ \varkappa=0,\dots,p-1), \tag{38}$$

où $g_\varkappa$ et $v_\varkappa$ sont des fonctions données et

$$h_\varkappa(\lambda)=\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial t^\varkappa}x(t,\lambda\right)_{t=0},$$

déterminent univoquement la solution de l'équation (36) (pourvu que cette solution existe).

Il peut arriver que les conditions (37) déterminent univoquement les fonctions $h_0,\dots,h_{m-1}$, sans faire appel à l'équation (36). Cela a lieu lorsque le système d'équations

$$\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}a_{m-\varkappa+\mu,\nu}y_\mu^{(\nu)}(\lambda)=0 \qquad (\varkappa=0,\dots,m-1) \tag{39}$$

n'a qu'une seule solution $y_0(\lambda)=\dots=y_{m-1}(\lambda)=0$. Si cette dernière condition est satisfaite, l'équation (36) sera dite *neutre*. Dans le cas contraire, elle sera dite *restrictive*. Cette classification est relative à la variable λ.

Si l'équation (36) est neutre, les conditions (37) et (38) peuvent être aisément remplacées par les conditions habituelles de Cauchy

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial t^\varkappa}x(t,\lambda)\right)_{t=0}=h_\varkappa(\lambda) && (\varkappa=0,\dots,m-1),\\ &\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial\lambda^\varkappa}x(t,\lambda)\right)_{\lambda=\lambda_0}=v_\varkappa(t) && (\lambda_1\leqslant\lambda_0\leqslant\lambda_2;\ \varkappa=0,\dots,p-1),\end{aligned} \tag{40}$$

où $h_\varkappa$ et $v_\varkappa$ sont des fonctions données. Ces conditions assurent évidemment l'unicité de la solution.

Il est clair que dans le cas de l'équation restrictive les conditions de Cauchy (40) assurent aussi l'unicité de la solution, mais alors les fonctions $h_\varkappa(\lambda)$ sont soumises à certaines restrictions imposées par cette équation. Pour cette raison, il est plus convenable de donner, dans le cas de l'équation restrictive, les conditions initiales sous la forme (37) et (38).

Pour l'équation de second ordre (35), le système (39) se réduit aux deux équations suivantes:

$$\gamma y_0(\lambda)=0,$$
$$\gamma y_1(\lambda)+2\beta y_0'(\lambda)+2\varepsilon y_0(\lambda)=0.$$

Si $\gamma\neq0$, on a évidemment $y_0(\lambda)=y_1(\lambda)=0$; l'équation (35) est alors neutre. En particulier, *toute équation elliptique est neutre.*

17. Un critère pour les équations neutres.

L'équation (36) est *d'ordre m par rapport à t* lorsque l'un au moins des coefficients $a_{m0},\dots,a_{mn}$ est différent de zéro.

On a le critère suivant:

Pour que l'équation (36), *d'ordre m par rapport à t, soit neutre (relativement à λ), il faut et il suffit que*

$$a_{m0}\neq0 \quad \text{et} \quad a_{m1}=\dots=a_{mn}=0\ ^{11}). \tag{41}$$

Démonstration. Si la condition (41) est satisfaite, les équations (39) peuvent s'écrire

$$a_{m0}y_0(\lambda)=0,$$
$$a_{m0}y_\varkappa(\lambda)+\sum_{\mu=0}^{\varkappa-1}\sum_{\nu=0}^{n}a_{m-\varkappa+\mu,\nu}y_\mu^{(\nu)}(\lambda)=0 \quad (\varkappa=1,\dots,\ m-1),$$

d'où l'on trouve successivement $y_0(\lambda)=0$, $y_1(\lambda)=0,\dots$ La suffisance de la condition est donc démontrée.

Pour $\varkappa=0$, l'équation (39) a la forme

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_{m\nu}y_0^{(\nu)}(\lambda)=0;$$

si l'un des coefficients $a_{m1},\dots,a_{mn}$ est non nul, alors il existe une fonction $y_0(\lambda)$, non identiquement nulle, satisfaisant à cette équation. Les fonctions restantes $y_1(\lambda),\dots,y_{m-1}(\lambda)$ peuvent être déterminées de (39) en posant successivement $\varkappa=1,\dots,m-1$, ce qui prouve la nécessité de la condition.

18. Équations pures.

L'équation (36) est *d'ordre absolu q* lorsque l'un au moins des coefficients $a_{\mu\nu}$, où $\mu+\nu=q$, est non nul et que $a_{\mu\nu}=0$ pour $\mu+\nu>q$.

On a le théorème suivant:

Si l'équation (36) *est pure, son ordre absolu est égal à son ordre par rapport à t et l'équation est neutre.*

---

11) De ce critère l'on déduit facilement que l'équation (36) est restrictive lorsque l'axe des λ est une caractéristique de cette équation, et seulement dans ce cas.

Démonstration. Soit

$$a_0 w^n + \ldots + a_n = 0,$$

où $a_\nu = \beta_{\nu 0} s^{m_\nu} + \ldots + \beta_{\nu m_\nu}$ $(\beta_{\nu 0} \neq 0)$ pour $\nu = 0, \ldots, n$, l'équation caractéristique et $w_1, \ldots, w_n$ ses racines. Si l'équation proposée (36) est pure, chacune des racines $w_1, \ldots, w_n$ se laisse représenter comme une série convergente

$$\gamma_k r^k + \ldots + \gamma_1 r + \gamma_0 + \gamma_{-1} r^{-1} + \ldots,$$

où $r = \sqrt[p]{s}$ $(p \leqslant n)$, $k \geqslant p$ et $\gamma_k \neq 0$ (voir § 12). Or on a

$$a_0 w^n + \ldots + a_n = a_0 (w - w_1) \ldots (w - w_n),$$

d'où il résulte que

$$m_n \geqslant m_\nu + n - \nu \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

Il s'ensuit en particulier que l'ordre absolu est égal à l'ordre par rapport à t et, en vertu du critère du § 17, que l'équation (36) est neutre.

On a ensuite le théorème suivant:

Pour que les conditions

$$\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial t^\varkappa} x(t,\lambda)\right)_{t=0} = h_\varkappa(\lambda) \qquad (\varkappa = 0, \ldots, m-1) \tag{42}$$

déterminent univoquement la solution de l'équation (36) (*les nombres* λ_1 *et* λ_2 *étant finis*), *il faut et il suffit que cette équation soit pure.*

Remarque. En disant que certaines conditions *déterminent univoquement la solution*, nous entendons qu'il existe au plus une solution satisfaisant à ces conditions. Il peut d'ailleurs arriver qu'il n'existe guère de telles solutions.

Démonstration. En vertu du § 16, il suffit de montrer que les conditions (42) sont insuffisantes pour déterminer la solution de l'équation (36) lorsque celle-ci n'est pas pure. En effet, dans ce cas, il existe une racine-logarithme w_0 de l'équation caractéristique.

Si l'opérateur c est convenablement choisi, la fonction

$$y(\lambda) = c s^m w_0^n e^{w_0 \lambda}$$

admet, pour $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, les valeurs de la classe C, c'est-à-dire qu'elle est paramétrique:

$$y(\lambda) = \{y(t,\lambda)\}.$$

Si maintenant $x_0(t,\lambda)$ est une solution de (36) satisfaisant aux conditions (42), alors la fonction

$$x(t,\lambda) = x_0(t,\lambda) + y(t,\lambda)$$

est une autre solution de (36) satisfaisant aux conditions (42), car $y(t,\lambda)$ satisfait évidemment à l'équation homogène

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x}{\partial t^\mu \partial \lambda^\nu} = 0$$

avec les conditions

$$\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial t^\varkappa} y(t,\lambda)\right)_{t=0} = 0 \qquad (\varkappa = 0, \ldots, m-1).$$

Le théorème est ainsi démontré.

Considérons enfin quelques exemples particuliers d'équations pures.

1° La solution de l'équation harmonique

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

est déterminée par les deux conditions

$$x(0,\lambda) = h_0(\lambda), \qquad x_t(0,\lambda) = h_1(\lambda).$$

Ce problème, bien connu d'ailleurs, peut être parfois résolu aisément, en utilisant les symboles du calcul opératoire. Soient par exemple

$$x(0,\lambda) = e^\lambda, \qquad x_t(0,\lambda) = e^{2\lambda}.$$

L'équation opératoire correspondante est alors

$$x'' + s^2 x = s e^\lambda + e^{2\lambda}.$$

Il est le plus commode de décomposer cette équation en deux équations

$$x_1'' + s^2 x_1 = s e^\lambda \qquad \text{et} \qquad x_2'' + s^2 x_2 = e^{2\lambda},$$

dont les solutions peuvent s'écrire aussitôt

$$x_1 = \frac{s}{1+s^2} e^\lambda, \qquad x_2 = \frac{1}{4+s^2} e^{2\lambda}.$$

D'où

$$x = x_1 + x_2 = \frac{s}{1+s^2} e^\lambda + \frac{1}{4+s^2} e^{2\lambda}$$

et la fonction harmonique cherchée est

$$x(t,\lambda)=e^{\lambda}\cos t+\frac{1}{2}e^{2\lambda}\sin 2t.$$

2° Plus généralement, l'équation

$$\frac{\partial^m x}{\partial\lambda^m}+\frac{\partial^n x}{\partial t^n}=0,$$

où m est pair et non supérieur à n, ne peut avoir qu'une seule solution satisfaisant aux conditions

$$x(0,\lambda)=h_0(\lambda),\quad\ldots,\quad x_{t^{n-1}}(0,\lambda)=h_{n-1}(\lambda).$$

Cherchons par exemple la solution de l'équation

$$\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}+\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}=0\qquad(-1<\lambda<1,\ 0\leqslant t<\infty)$$

telle que

$$x(0,\lambda)=0,\qquad x_t(0,\lambda)=0,\qquad x_{tt}(0,\lambda)=\frac{1}{1-\lambda}.$$

L'équation opératoire a ici la forme

$$x''+s^3x=\frac{1}{1-\lambda},$$

d'où

$$x(\lambda,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\left[1+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{t^{3m+3\mu-1}}{m!(m+2\mu-1)\ldots(3m+3\mu-1)}\right]$$

(voir § 8). Cette solution est unique.

3° La solution de l'équation biharmonique

$$\frac{\partial^4 x}{\partial\lambda^4}+2\frac{\partial^4 x}{\partial\lambda^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 x}{\partial t^4}=0$$

est déterminée par 4 conditions suivantes:

$$x(0,\lambda)=h_0(\lambda),\quad\ldots,\quad x_{ttt}(0,\lambda)=h_3(\lambda).$$

Si par exemple $\lambda<1$ et

$$x(0,\lambda)=x_t(0,\lambda)=x_{tt}(0,\lambda)=0,\qquad x_{ttt}(0,\lambda)=\frac{1}{1-\lambda}e^{\lambda-1},$$

l'équation opératoire correspondante est

$$x^{(4)}+2s^2x''+s^4x=\frac{1}{1-\lambda}e^{\lambda-1},$$

d'où

$$x(t,\lambda)=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{m^3}e^{(\lambda-1)}(\sin mt-mt\cos mt)\,dm$$

(voir § 11). C'est l'unique solution satisfaisant aux conditions données.

Remarque. La théorie précédente de l'équation pure est valable non seulement pour la demi-bande (infinie) $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, $0\leqslant t\leqslant\infty$, mais aussi pour tout rectangle (fini) $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$, $0\leqslant t\leqslant t_0$. Les démonstrations sont analogues, mais il faut, dans ce dernier cas, généraliser la notion de l'opérateur, en le définissant comme une fraction a/b, où a et b sont des fonctions continues dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant t_0$ et b est non nulle au voisinage de $t=0$. Dans cet article nous n'entrerons pas dans les détails de ce procédé; mentionnons seulement qu'une telle généralisation entraîne des complications gênantes pour le cas d'équations logarithmiques et mixtes.

19. Conditions superflues et indispensables.

Commençons par des exemples très simples. L'équation

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}-\frac{\partial x}{\partial t}=0\qquad(0\leqslant\lambda\leqslant 1,\ 0\leqslant t<\infty),\tag{43}$$

avec les conditions

$$x(t,0)=v(t),\qquad x(0,\lambda)=h(\lambda),$$

s'écrit, en symbole du calcul opératoire,

$$x'-sx=h(\lambda),$$

où la condition initiale est

$$x(0)=v.$$

En appliquant la méthode de variation des constantes, on trouve facilement la solution générale

$$x(\lambda)=e^{\lambda s}\Big(c+\int_0^{\lambda}e^{-s\varkappa}h(\varkappa)\,d\varkappa\Big);\tag{44}$$

la condition initiale entraîne $c=v$.

Cette solution a un sens, quelles que soient les fonctions v et h, mais elle représente une fonction opératoire qui ne se réduit pas,

en général, à une fonction paramétrique. Or, la solution qui n'est pas paramétrique est inutile, lorsqu'il s'agit de l'équation (43).

Nous montrerons que la condition que $x(\lambda)$ soit paramétrique entraîne quelques restrictions par rapport aux fonctions v et h qui ne peuvent plus être tout à fait arbitraires.

En effet, on peut écrire

$$v-\int_0^{\lambda} e^{-sx}h(x)\,dx=\{v(t)+g(t,\lambda)\},$$

où

$$g(t,\lambda)=\begin{cases}-h(t) & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{pour } 0\leqslant\lambda\leqslant t.\end{cases}$$

Si $x(\lambda)$ est paramétrique dans l'intervalle $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, on a donc

$$v(t)+g(t,\lambda)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$

d'où

$$v(t)=h(t) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Si la fonction h est donnée, la fonction v lui est donc égale dans l'intervalle $[0,1]$ et n'est arbitraire qu'au delà de cet intervalle. Si, réciproquement, la fonction v est donnée, la fonction h est déterminée complètement.

La condition $x(t,0)=v(t)$ suffit donc seule pour déterminer la solution de l'équation (43), ce qui est d'ailleurs un fait bien connu dans la théorie élémentaire.

Considérons maintenant la même équation (43) avec les conditions

$$x(t,1)=v(t), \qquad x(0,\lambda)=h(\lambda). \tag{45}$$

L'équation opératoire reste aussi la même,

$$x'-sx=h(\lambda),$$

mais la condition initiale est

$$x(1)=v.$$

En substituant $\lambda=1$ dans (44), on a donc

$$v=e^{s}\Big(c+\int_0^1 e^{-sx}h(x)\,dx\Big),$$

d'où

$$c=ve^{-s}-\int_0^1 e^{-sx}h(x)\,dx$$

et

$$x(\lambda)=ve^{-(1-\lambda)s}-\int_{\lambda}^{1} e^{-(x-\lambda)s}h(x)\,dx.$$

La fonction $x(\lambda)$ est évidemment paramétrique et peut s'écrire explicitement

$$x(\lambda)=\{x(t,\lambda)\},$$

où

$$x(t,\lambda)=\begin{cases}v(t-\lambda) & \text{pour} \quad 0\leqslant\lambda\leqslant t,\\ h(\lambda-t) & \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\lambda.\end{cases}$$

Dans le cas présent les deux fonctions v et h peuvent être données arbitrairement, pourvu que $v(0)=h(0)$ et $v'(0)=h'(0)$.

Les conditions à l'origine sont introduites pour la seule raison que la fonction $x(t,\lambda)$ soit dérivable. Or, ces conditions sont souvent négligées dans les applications physiques, où ce sont justement les solutions discontinues qui ont une interprétation convenable. Ces solutions sont cependant dérivables au sens opératoire donc, à ce point de vue, l'interprétation opératoire est mieux adaptée aux besoins de la physique.

Dans le premier des exemples précédents, la condition

$$x(0,\lambda)=h(\lambda)$$

est superflue; cependant, dans le second les deux conditions (45) sont indispensables pour déterminer la solution.

Appelons généralement *superflue* chacune des conditions (37) et (38) qui, étant négligée, les conditions restantes déterminent complètement la solution de (36). La condition qui n'est pas superflue sera dite *indispensable*.

Si l'équation (36) *est pure et d'ordre* m *par rapport à* t, *chacune des conditions* (41) *est indispensable.*

Il suffit évidemment de montrer que, pour tout $x_0=0,\dots,m-1$, il existe une solution $x(t,\lambda)$ de l'équation homogène

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x}{\partial t^{\mu}\partial\lambda^{\nu}}=0 \tag{46}$$

telle que

$$\Big(\frac{\partial^{x}}{\partial t^{x}}x(t,\lambda)\Big)_{t=0}=0 \qquad (x=x_0,\ 0\leqslant x\leqslant m-1),$$

et

$$\Big(\frac{\partial^{x_0}}{\partial t^{x_0}}x(t,\lambda)\Big)_{t=0}=1.$$

En effet, la fonction paramétrique

$$x(\lambda)=\{x(t,\lambda)\}=\frac{\sum_{\mu=\varkappa_0+1}^{m}\alpha_{\mu_0}s^{\mu-\varkappa_0-1}}{\sum_{\mu=0}^{n}\alpha_{\mu_0}s^{\mu}}$$

satisfait à l'équation opératoire

$$a_0x^{(n)}+\ldots+a_nx=\sum_{\mu=\varkappa_0+1}^{m}\alpha_{\mu_0}s^{\mu-\varkappa_0-1}\qquad\left(a_n=\sum_{\mu=0}^{m}\alpha_{\mu_0}s^{\mu}\right)$$

qui correspond à l'équation et aux conditions précédentes. Cette fonction est évidemment la solution cherchée de (46).

On a encore la proposition suivante:

Si l'équation (36) *est d'ordre n par rapport à t et si l'intervalle* (λ_1,λ_2) *est fini, chacune des conditions* (38) *est indispensable.*

Démonstration. Soit

$$a_0x^{(n)}+\ldots+a_nx=0 \tag{47}$$

l'équation opératoire homogène correspondant à l'équation (36). Cette équation a p solutions linéairement indépendantes. Soit $D(\lambda)$ le déterminant de Wroński

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} x_1(\lambda) & \ldots & x_p(\lambda)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{(p-1)}(\lambda) & \ldots & x_p^{(p-1)}(\lambda)\end{vmatrix}$$

formé de ces solutions.

Fixons arbitrairement un entier $\varkappa_0$ $(0\leqslant\varkappa_0\leqslant p-1)$ et désignons par A_ν $(\nu=1,\ldots,p)$ le mineur du déterminant $D(\lambda_0)$ correspondant à l'élément $x_\nu^{(\varkappa_0)}(\lambda)$. La fonction

$$x(\lambda)=\frac{c}{D(\lambda_0)}[A_1x_1(\lambda)+\ldots+A_px_p(\lambda)],$$

où c est un opérateur arbitraire, satisfait évidemment à l'équation (47) avec les conditions initiales

$$x^{(\varkappa_0)}(\lambda_0)=c\quad\text{et}\quad x^{(\varkappa)}(\lambda_0)=0\quad\text{pour}\quad\varkappa\neq\varkappa_0\quad(0\leqslant\varkappa\leqslant p-1).$$

Les fonctions $x_\nu(\lambda)$ peuvent être supposées de la forme $\lambda^\varkappa e^{w\lambda}$, où w est la racine (logarithme) de l'équation caractéristique. Il

s'ensuit que l'opérateur c peut être déterminé de manière que la fonction $s^mx(\lambda)$ ainsi que ses dérivées $s^mx'(\lambda),\ldots,s^mx^{(n-1)}(\lambda)$ soient paramétriques et que $c=\{(t)\}\in C$.

En posant $x(\lambda)=\{x(t,\lambda)\}$, on aura

$$\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial t^\varkappa}x(t,\lambda)\right)_{t=0}=0\quad\text{pour}\quad\varkappa=0,\ldots,m-1$$

et

$$\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial\lambda^\varkappa}x(t,\lambda)\right)_{\lambda=\lambda_0}=\begin{cases}c(t) & \text{pour}\quad\varkappa=\varkappa_0,\\ 0 & \text{pour}\quad\varkappa\neq\varkappa_0,\quad 0\leqslant\varkappa\leqslant p-1;\end{cases}$$

de plus, la fonction $x(t,\lambda)$ satisfait à l'équation homogène (46).

Si maintenant $x_0(t,\lambda)$ est une solution de (36) satisfaisant aux conditions (37) et (38), la somme $x_0(t,\lambda)+x(t,\lambda)$ est encore une solution de (36) satisfaisant à ces conditions, sauf à celle de (38) où $\varkappa=\varkappa_0$. Cela prouve que toutes les conditions (38) sont indispensables, car $\varkappa_0$ peut être choisi arbitrairement.

Quant aux conditions (37), nous avons déjà vu qu'elles peuvent être indispensables ou superflues suivant le cas. On a le critère général suivant:

Pour que la condition (37), *où* $\varkappa=\varkappa_0$, *soit indispensable, il faut et il suffit qu'il existe une solution de l'équation homogène*

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu}=0 \tag{36'}$$

satisfaisant aux conditions

$$\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{m-\varkappa+\mu,\nu}h_\mu^{(\nu)}(\lambda)=\begin{cases}\psi(\lambda) & \textit{pour}\quad\varkappa=\varkappa_0,\\ 0 & \textit{pour}\quad\varkappa\neq\varkappa_0,\quad 0\leqslant\varkappa\leqslant m-1,\end{cases} \tag{37'}$$

$$\left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial\lambda^\varkappa}x(t,\lambda)\right)_{\lambda=\lambda_0}=0, \tag{38'}$$

où $\psi(\lambda)$ *n'est pas identiquement nulle.*

Démonstration. Supposons que la condition (37), où $\varkappa=\varkappa_0$, soit indispensable. Alors il existe deux solutions de (36) $x_1(t,\lambda)$ et $x_2(t,\lambda)$ satisfaisant aux conditions (37) et (38), sauf (37) où $\varkappa=\varkappa_0$. La différence $x(t,\lambda)=x_1(t,\lambda)-x_2(t,\lambda)$ satisfait évidemment à l'équation (36') et aux conditions (37') et (38'), d'où la nécessité de la condition.

Supposons maintenant qu'il existe une solution $x_0(t,\lambda)$ de (36′) satisfaisant aux conditions (37′) et (38′). Si $x(t,\lambda)$ est une solution de (36) satisfaisant aux conditions (37) et (38), la fonction $x(t,\lambda)+x_0(t,\lambda)$ satisfera à l'équation (36) avec les conditions (37) et (38), sauf (37) où $\varkappa=\varkappa_0$. Cela prouve que la condition (37), où $\varkappa=\varkappa_0$, est indispensable.

Le critère précédent est très général, mais il est difficile de l'appliquer dans les cas concrets. Nous en déduirons d'autres qui seront mieux adaptés à des applications.

20. Équations logarithmiques.

Si l'équation (36) est logarithmique d'ordre n par rapport à λ, le déterminant $D(\lambda)$ est d'ordre n:

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} x_1(\lambda) & \dots & x_n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(\lambda) & \dots & x_n^{(n-1)}(\lambda) \end{vmatrix}.$$

Désignons par $D_1(\lambda)$ le déterminant que l'on obtient de $D(\lambda)$ en remplaçant la dernière ligne $x_1^{(n-1)}(\lambda),\dots,x_n^{(n-1)}(\lambda)$ par $x_1(\lambda_1),\dots,x_n(\lambda_1)$; on a donc

$$D_1(\lambda)=\begin{vmatrix} x_1(\lambda) & \dots & x_n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)}(\lambda) & \dots & x_n^{(n-2)}(\lambda) \\ x_1(\lambda_1) & \dots & x_n(\lambda_1) \end{vmatrix}.$$

Supposons enfin que $\lambda_0=\lambda_1$. Cela posé, on a le critère suivant:

Étant donnée l'équation logarithmique (36) *d'ordre n par rapport à* λ *et d'ordre m par rapport à t, pour que la condition* (37), *où* $\varkappa=\varkappa_0$, *soit indispensable, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue numérique* $\psi(\lambda)$, *non identiquement nulle, telle que la fonction*

$$\Psi(\lambda)=s^{m-q-\varkappa_0-1}\int_{\lambda_1}^{\lambda}\psi(\varkappa)\frac{D_1(\lambda_1+\lambda-\xi)}{D(\lambda_1)}\,d\xi,$$

où q est le plus grand nombre tel que $a_{qn}\neq 0$, *soit paramétrique,* $\Psi(\lambda)=\{\Psi(t,\lambda)\}$, *et que toutes les dérivées partielles* $\dfrac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu}\Psi(t,\lambda)$ *d'ordres qui paraissent dans* (36) *soient continues.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si la fonction $\Psi(\lambda)$ est paramétrique, il en est de même de $\Phi(\lambda)=\dfrac{s^q}{a_0}\Psi(\lambda)$, où $a_0=a_{qn}s^q+\dots+a_{0n}$, et réciproquement; de plus, si la dérivée $\dfrac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu}\Psi(t,\lambda)$ est continue, il en est de même de $\dfrac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu}\Phi(t,\lambda)$, et réciproquement.

Cela posé, supposons que la condition (37), où $\varkappa=\varkappa_0$, soit indispensable. Alors il existe une solution $x_0(t,\lambda)$ satisfaisant aux conditions (37′) et (38′). En posant $x(\lambda)=\{x(t,\lambda)\}$, la fonction $x(\lambda)$ satisfait à l'équation opératoire

$$a_0x^{(n)}+\dots+a_nx=s^{m-\varkappa_0-1}\psi(\lambda) \tag{48}$$

avec les conditions $x(\lambda_1)=\dots=x^{(n-1)}(\lambda_1)=0$. Or, il est facile de vérifier que la fonction $\Phi(\lambda)$ satisfait à cette même équation avec les mêmes conditions initiales. En vertu du théorème d'unicité, on a donc identiquement $\Phi(\lambda)=x(\lambda)$, d'où la nécessité de la condition.

Pour démontrer la suffisance, supposons maintenant que la fonction $\Psi(\lambda)$ soit paramétrique et que toutes les dérivées $\dfrac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu}\Psi(t,\lambda)$ d'ordres qui paraissent dans (36) soient continues. Alors il en est de même de $\Phi(\lambda)$ et $\dfrac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu\partial\lambda^\nu}\Phi(t,\lambda)$. Du fait que $\Phi(\lambda)$ satisfait à l'équation (48) avec les conditions initiales nulles, il résulte que $\Phi(t,\lambda)$ satisfait à l'équation (36′) avec les conditions (37′) et (38′), d'où la suffisance de la condition.

Le critère précédent se prête bien à des applications pratiques.

Exemples. 1° L'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2x}{\partial t\partial\lambda}-x=0 \qquad (\lambda\geqslant 0,\ t\geqslant 0) \tag{49}$$

est évidemment restrictive. Les conditions initiales doivent donc être données sous la forme

$$x_\lambda(0,\lambda)=g(\lambda), \qquad x(t,0)=v(t). \tag{50}$$

On a dans ce cas

$$D(\lambda)=D_1(\lambda)=e^{l\lambda}$$

et, en posant $\varkappa_0=0$, $\psi(\lambda)=1$,

$$\Psi(\lambda)=l\int_0^\lambda e^{l(\lambda-\varkappa)}d\varkappa=\frac{l\lambda}{1!}+\frac{l^2\lambda^2}{2!}+\dots$$

On voit que la fonction $\Psi(\lambda)$ est paramétrique et que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^{\mu}\partial\lambda^{\nu}}\Psi(t,\lambda)$ sont continues. Donc, les deux conditions (50) sont indispensables.

L'équation opératoire correspondante est

$$sx'-x=h(\lambda),$$

avec la condition initiale $x(0)=v$. D'où la solution

$$x(\lambda)=ve^{l\lambda}+l\int_0^{\lambda}h(\lambda-\varkappa)e^{l\varkappa}d\varkappa.$$

En cherchant, par exemple, la solution de (49) telle que

$$x_{\lambda}(0,\lambda)=0, \qquad x(t,0)=1, \tag{51}$$

on aura

$$x(\lambda)=le^{l\lambda},$$

d'où

$$x(t,\lambda)=1+\frac{t\lambda}{1!1!}+\frac{t^2\lambda^2}{2!2!}+\frac{t^3\lambda^3}{3!3!}+\ldots$$

C'est l'unique solution de (49) satisfaisant aux conditions (51).

2° L'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0 \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0,\ t\geqslant 0) \tag{52}$$

est neutre. Les conditions initiales s'écriront donc

$$x(0,\lambda)=h_0(\lambda), \qquad x_t(0,\lambda)=h_1(\lambda), \tag{53}$$

et

$$x(t,0)=v_0(t), \qquad x_{\lambda}(t,0)=v_1(t).$$

On a maintenant

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} e^{-s\lambda} & e^{s\lambda} \\ -e^{-s\lambda} & se^{s\lambda}\end{vmatrix}=2s,$$

$$D_1(\lambda)=\begin{vmatrix} e^{-s\lambda} & e^{s\lambda} \\ 1 & 1\end{vmatrix}=e^{-\lambda s}-e^{\lambda s}$$

et

$$\Psi(\lambda)=\tfrac{1}{2}l^{\varkappa_0}\int_0^{\lambda}\Phi(\xi)e^{(\lambda-\xi)s}d\xi-\tfrac{1}{2}\int_0^{\lambda}\psi(\xi)e^{-(\lambda-\xi)s}d\xi \qquad (\varkappa_0=0,1).$$

Pour que $\Psi(\lambda)$ soit paramétrique, il faut donc que $\psi(\lambda)=0$. Il s'ensuit que chacune des conditions (53) est superflue. La solution est donc déterminée par l'un quelconque des triples de conditions

$$x(0,\lambda)=h_0(\lambda), \quad x(t,0)=v_0(t), \quad x_{\lambda}(t,0)=v_1(t),$$

ou

$$x_t(0,\lambda)=h_1(\lambda), \quad x(t,0)=v_0(t), \quad x_{\lambda}(t,0)=v_1(t).$$

L'équation opératoire, correspondant à (52), est

$$x''-s^2x=-sh_0(\lambda)-h_1(\lambda) \tag{54}$$

avec les conditions initiales $x(0)=v_0$, $x'(0)=v_1$. Sa solution a la forme [12])

$$x(\lambda)=\tfrac{1}{2}(v_0-lv_1)e^{-s\lambda}+\tfrac{1}{2}\int_0^{\lambda}e^{-(\lambda-\varkappa)s}[h_0(\varkappa)+lh_1(\varkappa)]d\varkappa$$

$$+\tfrac{1}{2}e^{\lambda s}\Big(v_0+lv_1-\int_0^{\lambda}e^{-\varkappa s}[h_0(\varkappa)+lh_1(\varkappa)]d\varkappa\Big).$$

Pour que $x(\lambda)$ soit une fonction paramétrique, il faut et il suffit que la fonction

$$y(\lambda)=v_0+lv_1-\int_0^{\lambda}e^{-\varkappa s}[h_0(\varkappa)+lh_1(\varkappa)]d\varkappa$$

soit paramétrique, $y(\lambda)=\{y(t,\lambda)\}$, et telle que $y(t,\lambda)=0$ pour $t\leqslant\lambda$. Un calcul facile à effectuer montre que

$$y(t,\lambda)=v_0(t)+\int_0^t v_1(\tau)d\tau-h_0(t)-\int_0^t h_1(\tau)d\tau \qquad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\lambda.$$

Comme λ varie dans l'intervalle $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$, il en résulte

$$v_0(t)+\int_0^t v_1(\tau)d\tau=h_0(t)+\int_0^t h_1(\tau)d\tau \qquad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\lambda_0 \tag{55}$$

qui permet d'évaluer la fonction h_0 lorsque h_1 est connue et réciproquement.

En pratique on n'a pas besoin de se servir toujours de la méthode générale, on peut cependant chercher des solutions parti-

[12]) La discussion qui suit est due à M. S. Drobot.

culières par les méthodes des §§ 8-11, ce qui permet d'écrire ensuite la solution générale. Celle-ci peut être facilement adaptée aux conditions données.

3° L'équation

$$\frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial \lambda^2} - 2\frac{\partial^3 x}{\partial t \partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} - x + 4e^{\lambda} = 0 \qquad (\lambda \geqslant 0,\ t \geqslant 0) \tag{56}$$

est restrictive. Les conditions initiales sont donc

$$\begin{gathered} x_{\lambda\lambda}(0,\lambda) = g_0(\lambda), \qquad x_{t\lambda\lambda}(0,\lambda) - 2x_{\lambda\lambda}(0,\lambda) = g_1(\lambda), \\ x(t,0) = v_0(t), \qquad x_{\lambda}(t,0) = v_1(t). \end{gathered} \tag{57}$$

On a

$$D_1(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda}{1-s}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda}{1-s}\right)$$

et pour $\psi(\lambda) = 1$

$$\Psi(\lambda) = \tfrac{1}{2} s^{-\varkappa_0}(l-1) \int_0^{\lambda} \left\{ \exp\left(\frac{\lambda-\xi}{1-s}\right) - \exp\left(\frac{s-\lambda}{1-s}\right) \right\} d\xi.$$

On voit que $\Psi(\lambda)$ est une fonction paramétrique pour $\varkappa_0 = 0,1$ et que toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^{\mu} \partial \lambda^{\nu}} \Psi$ sont continues. Donc, toutes les conditions (57) sont indispensables.

Cherchons par exemple la solution de (56) telle que

$$\begin{gathered} x_{\lambda\lambda}(0,\lambda) = e^{\lambda}, \qquad x_{t\lambda\lambda}(0,\lambda) - 2x_{\lambda\lambda}(0,\lambda) = \lambda, \\ x(t,0) = 1 + 2t, \qquad x_{\lambda}(t,0) = 2t. \end{gathered} \tag{58}$$

L'équation opératoire correspondante est

$$(s-1)^2 x'' - x = (s-4l)e^{\lambda} + \lambda \tag{59}$$

et les conditions initiales

$$x(0) = l + 2l^2, \qquad x'(0) = 2l^2.$$

Cette équation peut être décomposée en deux équations suivantes

$$(s-1)^2 x_1'' - x_1 = (s-4l)e^{\lambda}, \qquad (s-1)^2 x_2'' - x_2 = \lambda$$

dont des solutions particulières sont

$$x_1(\lambda) = (l + 2l^2)e^{\lambda} \qquad \text{et} \qquad x_2(\lambda) = -\lambda$$

respectivement. La solution générale de (59) est donc

$$x(\lambda) = c_1 \exp\left(\frac{\lambda}{1-s}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda}{1-s}\right) + (l + 2l^2)e^{\lambda} - \lambda;$$

en adaptant les coefficients c_1 et c_2 aux conditions initiales, on trouve

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= -l(1-s)^2 sh\frac{\lambda}{1-s} + (l+2l^2)e^{\lambda} - \lambda \\ &= (l+2l^2)e^{\lambda} - l\lambda - \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} + \ldots + \frac{1}{(1-s)^{\nu-2}} \right) \end{aligned}$$

et

$$x(t,\lambda) = (1+2t)e^{\lambda} - \lambda - \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} \left[1 + e^{t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \ldots + \frac{t^{\nu-3}}{(\nu-3)!} \right) \right].$$

C'est l'unique solution de (56) satisfaisant aux conditions (58).

21. Équations mixtes.

Nous avons vu, au § 14, que toute équation d'ordre absolu 2 aux coefficients réels est pure ou logarithmique. Il en est évidemment de même de toute équation de premier ordre. Donc, *toute équation mixte aux coefficients réels est d'ordre absolu* $\geqslant 3$.

L'équation

$$\frac{\partial^n x}{\partial \lambda^n} + \frac{\partial^n x}{\partial t^n} = 0 \qquad (t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0) \tag{60}$$

est mixte lorsque n est impair et $\geqslant 3$. Cette équation étant neutre, les conditions initiales s'écriront

$$x(t,0) = v(t), \qquad x_{t^{\nu}}(0,\lambda) = h_{\nu}(\lambda) \qquad (\nu = 0,\ldots,n-1). \tag{61}$$

Toutes ces conditions sont indispensables, car la fonction $x(t,\lambda) = t^{\varkappa_0}\lambda^2$ $(\varkappa_0 = 0,\ldots,n-1)$ satisfait à l'équation (64) avec les conditions initiales

$$x(t,0) = 0, \qquad x_{t^{\nu}}(0,\lambda) = \begin{cases} \varkappa_0!\lambda^2 & \text{pour} \quad \nu = \varkappa_0, \\ 0 & \text{pour} \quad \nu \neq \varkappa_0 \end{cases} \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant n-1).$$

L'équation

$$\frac{\partial^n x}{\partial \lambda^n} - \frac{\partial^n x}{\partial t^n} = 0 \qquad (t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0) \tag{62}$$

est mixte pout tout n naturel $\geqslant 3$.

Lorsque n est impair, les conditions initiales sont (61) et le même raisonnement montre que toutes ces conditions sont encore indispensables.

Si $x_1(t,\lambda)$ et $x_2(t,\lambda)$ sont deux solutions de (62) satisfaisant aux mêmes conditions initiales sur l'axe des λ, leur différence

$$x(t,\lambda) = x_1(t,\lambda) - x_2(t,\lambda)$$

est encore une solution de (62), telle que $x_{t^\nu}(0,\lambda)=0$ pour $\nu=0,\dots,n-1$. En posant $x(\lambda)=\{x(t,\lambda)\}$, la fonction $x(\lambda)$ satisfera à l'équation opératoire

$$x^{(n)} - s^n x = 0. \tag{63}$$

La solution générale de cette équation est $ce^{s\lambda}$; on a donc

$$x(\lambda)=ce^{s\lambda}$$

pour un c convenablement choisi. Or, on a

$$x(0)=c\,\epsilon\,C \quad \text{et} \quad x(\lambda_0)=ce^{s\lambda_0}\,\epsilon\,C,$$

d'où il résulte que, pour $c=\{c(t)\}$,

$$c(t)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\lambda_0.$$

Par conséquent, on a

$$x_1(t,0)=x_2(t,0) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\lambda_0.$$

Cela prouve que la fonction $v(t)$ dans la première des conditions (61) n'est plus arbitraire; elle est cependant déterminée dans l'intervalle $[0,\lambda_0]$ par les conditions restantes. En considérant l'équation (62) dans le quadrant $t\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$, la première des conditions (61) devient superflue.

Par exemple, la fonction $x(t,\lambda)=1$ est l'unique solution de (62) qui existe dans tout le quadrant $t\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$ et telle que $x(0,\lambda)=1$, $x_{t^\nu}(0,\lambda)=0$ pour $\nu=1,\dots,n-1$.

Lorsque n est pair ($\geqslant 4$), les conditions initiales pour l'équation (62) sont

$$x(t,0)=v_0(t), \quad x_\lambda(t,0)=v_1(t), \quad x_{t^\nu}(0,\lambda)=h_\nu(\lambda) \quad (\nu=0,\dots,n-1). \tag{64}$$

Toutes ces conditions sont indispensables, ce qu'on voit de la même manière que dans les cas précédents.

Si $x_1(t,\lambda)$ et $x_2(t,\lambda)$ sont deux solutions de (62), la fonction $x(\lambda)=\{x_1(t,\lambda)-x_2(t,\lambda)\}$ satisfait à l'équation (63) avec des conditions initiales nulles. Or, la solution générale de cette équation est maintenant $c_1e^{s\lambda}+c_2e^{-s\lambda}$, d'où

$$x(\lambda)=c_1e^{s\lambda}+c_2e^{-s\lambda}$$

pour c_1 et c_2 convenablement choisis. On a

$$x(0)=c_1+c_2, \qquad x(\lambda_0)=c_1e^{s\lambda_0}+c_2e^{-s\lambda_0},$$

d'où

$$c_2=\frac{x(0)-x(\lambda_0)e^{-s\lambda_0}}{1-e^{-2s\lambda_0}}\,\epsilon\,C.$$

Il s'ensuit que $c_1e^{s\lambda}\,\epsilon\,C$ pour $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$ et, par conséquent, que

$$c_1(t)=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\lambda_0,$$

où $\{c_1(t)\}=c_1$. D'autre part, on a

$$x(0)=c_1+c_2 \qquad \text{et} \qquad x'(0)=sc_1-sc_2,$$

d'où

$$2c_1=x(0)+lx'(0)$$

et enfin

$$x(t,0)+\int_0^t x_\lambda(\tau,0)\,d\tau=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant\lambda_0.$$

Cela prouve que les fonctions $v_0(t)$ et $v_1(t)$ ne peuvent pas être arbitraires dans les conditions (64) et que l'expression

$$v_0(t)+\int_0^t v_1(\tau)\,d\tau$$

est determinée dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant\lambda_0$ par les conditions restantes. En considérant l'équation (62) dans le quadrant $t\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$, chacune des deux premières conditions (64) est superflue et, l'une quelconque d'elles étant supprimée, les conditions restantes déterminent univoquement la solution.

Cherchons par exemple la solution de l'équation

$$\frac{\partial^4 x}{\partial\lambda^4}-\frac{\partial^4 x}{\partial t^4}=0 \qquad (t\geqslant 0, \quad \lambda\geqslant 0), \tag{65}$$

satisfaisant aux conditions

$$x(t,0)=t,$$

(66)
$$x(0,\lambda)=0,\quad x_t(0,\lambda)=0,\quad x_{tt}(0,\lambda)=2e^{\lambda},\quad x_{ttt}(0,\lambda)=0.$$

L'équation opératoire correspondante est

$$x^{(4)}-s^4x=-2se^{\lambda}$$

et sa solution particulière

$$x_0(\lambda)=\frac{2s}{s^4-1}e^{\lambda}.$$

La solution générale est donc

$$x(\lambda)=c_1e^{s\lambda}+c_2e^{-s\lambda}+\frac{2s}{s^4-1}e^{\lambda};$$

cette solution se réduit à une fonction paramétrique lorsque $c_1=0$ et seulement dans ce cas. En déterminant la constante c_2 conformément aux conditions, on a

$$x(\lambda)=\left(2l^3-\frac{2s}{s^4-1}\right)e^{-s\lambda}+\frac{2s}{s^4-1}e^{\lambda}$$

et

$$x(t,\lambda)=\begin{cases}e^{\lambda}(\operatorname{ch}t-\cos t) & \text{pour}\quad 0\leqslant t\leqslant\lambda,\\ (t-\lambda)^2+\cos(t-\lambda)+e^t\operatorname{sh}\lambda-e^{\lambda}\cos t & \text{pour}\quad 0\leqslant\lambda\leqslant t.\end{cases}$$

C'est l'unique solution de (65) satisfaisant aux conditions (66).

Dans le cas de l'équation mixte, nous ne connaissons pas de condition nécessaire et suffisante analogue à celle du § 20. Nous donnerons cependant une condition suffisante qui est applicable dans beaucoup de cas particuliers.

Soit (36) une équation mixte dont l'équation caractéristique a p (et seulement p) racines-logarithmes. Soit

$$Lx=a_0x^{(n)}+\ldots+a_nx=0$$

l'équation opératoire homogène correspondant à l'équation considérée (36). Cette équation a p solutions linéairement indépendantes $x_1(\lambda),\ldots,x_p(\lambda)$. Désignons par $D(\lambda)$ le déterminant de Wroński

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}x_1(\lambda) & \ldots & x_p(\lambda)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{(p-1)}(\lambda) & \ldots & x_p^{(p-1)}(\lambda)\end{vmatrix}$$

et par $D(\lambda,\varkappa)$ le déterminant qui s'obtient de $D(\varkappa)$ en remplaçant la dernière ligne $x_1^{(p-1)}(\varkappa),\ldots,x_p^{(p-1)}(\varkappa)$ par $x_1(\lambda),\ldots,x_p(\lambda)$:

$$D(\lambda,\varkappa)=\begin{vmatrix}x_1(\varkappa) & \ldots & x_p(\varkappa)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{(p-2)}(\varkappa) & \ldots & x_p^{(p-2)}(\varkappa)\\ x_1(\lambda) & \ldots & x_p(\lambda)\end{vmatrix}.$$

Supposons encore que $\lambda_0=\lambda_1$ et que q soit le plus grand nombre tel que $a_{qn}\neq 0$. Cela posé, on a le critère suivant:

Étant donnée l'équation (36) *d'ordre n par rapport à λ et d'ordre m par rapport à t, pour que la condition* (37), *où $\varkappa=\varkappa_0$, soit indispensable, il suffit que la fonction*

$$\Psi(\lambda)=s^M\int_{\lambda_1}^{\lambda}\frac{D(\lambda,\varkappa)}{D(\varkappa)}\,d\varkappa,$$

où $M=m+p-n-q-\varkappa_0-1$, soit paramétrique et que toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^{\mu}\partial\lambda^{\nu}}\Psi(t,\lambda)$ d'ordres qui paraissent dans (36) *soient continues.*

Démonstration. Soient $w_1,\ldots,w_p$ les racines-logarithmes de l'équation $Lx=0$ et $w_{p+1},\ldots,w_n$ les racines restantes. En posant

$$P_1(w)=a_0(w-w_1)\ldots(w-w_p),$$
$$P_0(w)=(w-w_{p+1})\ldots(w-w_n),$$

et en désignant par L_1x et L_0x les expressions différentielles correspondantes, on a $Lx=L_1L_0x$.

On peut écrire

$$L_0x=x^{(n-p)}+b_1x^{(n-p-1)}+\ldots+b_{n-p},$$

où

$$b_{n-p}=w_{p+1}\ldots w_n.$$

Or, chacune des racines $w_{p+1},\ldots,w_n$ a la forme d'une série convergente

$$\sum_{\nu}\gamma_{\nu}s^{\frac{\nu}{r}}$$

(voir § 12), où le plus grand exposant ν/r est non inférieur à 1; il s'ensuit que b_{n-p} se développe en une série

$$\sum_{\nu} \beta_\nu s^{\frac{\nu}{q}},$$

où le plus grand exposant est non inférieur à $n-p$. Par conséquent, le quotient s^M/b_{n-p} peut être représenté comme une série convergente

$$\frac{s^M}{b_{n-p}} = \sum_{\nu=(M-n+p)q}^{\infty} \delta_\nu s^{\frac{\nu}{q}}.$$

Si $\Psi(\lambda)$ est paramétrique, il en est de même de $\Phi(\lambda)=\frac{s^q}{\alpha_{qn}}\Psi(\lambda)$, et réciproquement; de plus, si la dérivée $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial \lambda^\nu}\Psi(t,\lambda)$ est continue, il en est de même de $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial \lambda^\nu}\Phi(t,\lambda)$, et réciproquement. On peut donc démontrer le critère en remplaçant Ψ par Φ.

Si $\Phi(\lambda)$ satisfait aux conditions imposées par le critère, il en est de même de $s^{-\gamma}\Phi(\lambda)$, où $\gamma \geqslant 0$. Par conséquent, la fonction

$$F(\lambda)=\frac{s^{n-p}}{b_{n-p}}\Phi(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu s^{\frac{\nu}{q}}\Phi(\lambda)$$

est paramétrique, $F(\lambda)=\{F(t,\lambda)\}$, et les dérivées $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial \lambda^\nu}F(t,\lambda)$ sont continues. De plus, on a

$$LF(\lambda)=L_0L_1F(\lambda)=L_0\left(\frac{s^{M+n-p}}{b_{n-p}}\right)=s^{m-q-\varkappa_0-1}.$$

Il s'ensuit que $F(t,\lambda)$ satisfait à l'équation (36′) avec les conditions (37′), où $\psi(\lambda)=1$, et (38′). Or, cela prouve que la condition (37), où $\varkappa=\varkappa_0$, est indispensable.

Exemple. L'équation

$$\frac{\partial^6 x}{\partial\lambda^4\partial t^2}+4\frac{\partial^6 x}{\partial\lambda^2\partial t^4}-\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}-4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0 \qquad (\lambda\geqslant 0,\ t\geqslant 0) \tag{67}$$

est mixte, car l'équation caractéristique correspondante

$$s^2w^4+4s^4w^2-w^2-4s^2=0$$

a les racines

$$l,\ -l,\ 2is,\ -2is,$$

dont les deux premières sont des logarithmes et les deux restantes ne le sont pas. On a $m=4$, $n=4$, $p=2$ et $q=2$, d'où $M=-\varkappa_0-1$. On a ensuite

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} e^{-l\lambda} & e^{l\lambda} \\ -le^{-l\lambda} & le^{l\lambda}\end{vmatrix}=2l,\qquad D(\lambda,\varkappa)=\begin{vmatrix} e^{-l\varkappa} & e^{l\varkappa} \\ e^{-l\lambda} & e^{l\lambda}\end{vmatrix}=e^{l(\lambda-\varkappa)}-e^{-l(\lambda-\varkappa)},$$

$$\Psi(\lambda)=s^{-\varkappa_0}\int_0^\lambda \operatorname{sh} l\varkappa\, d\varkappa,$$

et l'on voit que $\Psi(\lambda)$ est paramétrique et que toutes les dérivées $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial\lambda^\nu}\Psi(t,\lambda)$ sont continues, quel que soit $\varkappa_0=0,1,\ldots$

Il s'ensuit que toutes les conditions

$$\begin{aligned} &4x_{\lambda^2}(0,\lambda)=g_0(\lambda), \qquad 4x_{t\lambda^2}(0,\lambda)=g_1(\lambda),\\ &x_{\lambda^4}(0,\lambda)+4x_{t^2\lambda^2}(0,\lambda)-4x(0,\lambda)=g_2(\lambda),\\ &x_{t\lambda^4}(0,\lambda)+4x_{t^3\lambda^2}(0,\lambda)-4x_t(0,\lambda)=g_3(\lambda),\\ &x(t,0)=v_0(t), \qquad x_\lambda(t,0)=v_1(t)\end{aligned}$$

sont indispensables pour déterminer la solution de (67).

Posons par exemple

$$g_0(\lambda)=0, \qquad g_1(\lambda)=4, \qquad g_2(\lambda)=g_3(\lambda)=0, \qquad v_0(t)=v_1(t)=0.$$

L'équation opératoire correspondante est

$$s^2x^{(4)}+(4s^4-1)x''-4s^2x=4s^2$$

et les conditions initiales: $x(0)=x'(0)=0$. La solution générale de cette équation est

$$x(\lambda)=c_1e^{l\lambda}+c_2e^{-l\lambda}-1.$$

En posant $x(0)=x'(0)=0$, on trouve $c_1=c_2=\frac{1}{2}$; donc la solution cherchée est

$$x(\lambda)=\operatorname{ch} l\lambda-1=\frac{l^2\lambda^2}{2!}+\frac{l^4\lambda^4}{4!}+\ldots$$

et

$$x(t,\lambda)=\frac{t\lambda^2}{1!2!}+\frac{t^3\lambda^4}{3!4!}+\ldots$$

C'est l'unique solution de (67) satisfaisant aux conditions demandées.

22. Remarques.

En terminant cet article, remarquons encore que la méthode ici exposée peut être aisément étendue à d'autres problèmes sur les équations aux dérivées partielles (aux coefficients constants). On peut par exemple discuter les conditions initiales discontinues ou bien les conditions imposées sur trois (ou plus) droites du plan des λ et t. Or, l'étude systématique de ces problèmes exigera un nouvel article. Ici, nous nous sommes bornés à l'étude des conditions de Cauchy et des conditions plus générales de type analogue à (37) et (38).

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 18. 1. 1951).

Quelques propriétés ergodiques des fractions continues

par

S. HARTMAN (Wrocław).

1. Le but de cette note est d'ajouter quelques résultats nouveaux aux théorèmes concernant les développements des nombres irrationnels en fractions continues; ces résultats se laissent déduire de la théorie ergodique des fractions continues, établie par C. RYLL-NARDZEWSKI [1]).

Soit $(c_1(x), c_2(x), \ldots)$ le développement en fraction continue régulière d'un nombre irrationnel x de l'intervalle (0,1). Désignons par $\delta(x)$ la transformation (introduite par E. MARCZEWSKI) qui fait correspondre à x le nombre $(c_2(x), c_3(x), \ldots)$ [2]).

Envisageons les suites

$$A_n(x)=\frac{c_1(x)+c_2(x)+\ldots+c_n(x)}{n} \quad \text{et} \quad B_n(x)=\sqrt[n]{c_1(x)\cdot c_2(x)\cdot\ldots\cdot c_n(x)}.$$

KHINTCHINE [3]) a démontré que, pour presque tout x (c'est-à-dire à l'exception d'un ensemble de mesure lebesguienne nulle), on a

$$\lim_n B_n(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{\frac{\log n}{\log 2}}.$$

Un résultat analogue concernant la suite $A_n(x)$ a manqué jusqu'à présent. Il a été démontré seulement que

---

[1]) C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems (II) (Ergodic Theory of continued fractions)*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 74-79.

[2]) Cf. S. Hartman, E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Colloquium Mathematicum II. 2 (1950), p. 109-123, surtout p. 117.

[3]) A. Khintchine, *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Mathematica 1 (1935), p. 359-382, surtout p. 376.