Sur les transformations isométriques des espaces du type (F)

par

Z. CHARZYŃSKI (Łódź).

Introduction.

Dans ce travail je présente des recherches sur les transformations isométriques des espaces vectoriels du type (F), concernant la supposition générale, que chaque transformation isométrique de deux espaces du type (F), l'un en l'autre, telle que le point zéro passe en point zéro correspondant, doit être linéaire[1]).

Cette question n'est résolue affirmativement jusqu'aujourd'hui que pour certains cas particuliers où les espaces transformés satisfont à des conditions spéciales.

Les résultats obtenus vont dans deux directions: d'une part, on se borne aux espaces dont la norme satisfait à certaines conditions, d'autre part, laissant de côté des restrictions sur la norme, on introduit des conditions sur la dimension des espaces considérés.

En ce qui concerne le premier cas, S. MAZUR, S. ULAM et N. ARONSZAJN[2]) ont établi des théorèmes, qui vérifient la supposition citée pour les espaces admettant une norme homogène, ainsi que pour ceux de type plus général.

Pour le second cas, MAZUR a démontré que la supposition est vraie pour les espaces à une dimension[3]); néanmoins, pour les espaces au nombre de dimensions plus grand que un, la question reste ouverte.

[1]) Voir [1], p. 166 et 241.

[2]) Voir [1], p. 166 et [3], p. 812-813.

[3]) Ce résultat n'a pas été publié jusqu'aujourd'hui.

Le but de mon travail est de généraliser par une méthode différente le résultat de MAZUR pour les espaces à un nombre fini quelconque de dimensions.

§ 0. Termes et notations.

1. Nous emploierons les notions d'espace du type (F), de combinaison linéaire de points, de base de Hamel, d'opération biunivoque, d'opération additive, d'opération linéaire, de transformation isométrique, de translation, de rotation, d'isomorphie, d'ensemble compact, de sphère, mentionnées dans la monographie de BANACH [1]. De plus, nous admettrons les notions de norme, de norme homogène, de pseudonorme, mentionnées dans le travail de MAZUR et ORLICZ [2].

2. Etant donné un espace $\mathcal{E}$ du type (F), nous désignerons généralement par $\|x\|$ la norme dans $\mathcal{E}$ et par Θ_E, ou, pour qu'il n'y ait de malentendu, par Θ l'élément zéro de cet espace. Nous appellerons *rotations* de l'espace $\mathcal{E}$, les rotations de celui-ci autour du point Θ. Nous dirons que les points $x_1, x_2, \dots, x_m$, de l'espace $\mathcal{E}$ sont *linéairement indépendants*, si aucun d'eux n'est une combinaison linéaire des autres.

3. Nous appellerons chaque espace du type (F) *espace à n dimensions* si la base de Hamel dans cet espace se compose de n points. Il est clair que dans ce cas chaque suite de n points linéairement indépendants de l'espace donné forme une base de Hamel dans cet espace.

4. Etant donné un espace $\mathcal{E}$ à un nombre fini n de dimensions, nous désignerons par η_E le rayon de la sphère compacte dans cet espace. Une telle sphère existe evidemment[4]).

On trouve facilement que, pour chaque suite $x_1, x_2, \dots, x_m$ de points linéairement indépendants et différents de Θ de l'espace $\mathcal{E}$, il existe un nombre Φ tel que, pour chaque suite $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ de nombres, l'inégalité

$$\|\tau_1 x_1 + \dots + \tau_m x_m\| \leqslant \eta_E$$

entraîne

$$|\tau_1| < \Phi, \qquad \dots, \qquad |\tau_m| < \Phi,$$

[4]) Voir [2], p. 185, 188 et comparer [4].

car, dans le cas contraire, la sphère décrite ci-dessus ne serait pas compacte[5]).

On en déduit en particulier que, pour chaque point x de $\mathcal{E}$ et chaque ensemble non borné T de nombres, les relations

$$\|\tau x\| \leqslant \eta_E,$$

pour tout $\tau \epsilon T$, entraînent l'égalité

$$x = \Theta.$$

5. Étant donné un espace $\mathcal{E}$ décrit ci-dessus, nous poserons, pour tout nombre positif ε,

$$\varphi_E(\varepsilon) = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant \varepsilon, \\ |\xi| \leqslant 1}} \|\xi x\|.$$

On voit que la relation suivante a lieu:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_E(\varepsilon) = 0.$$

6. Nous dirons que la suite de nombres $\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(P)}$ *est du type* (n) si tous ses termes appartiennent à l'intervalle $\langle 0,1 \rangle$ et tout au plus n de ses termes se trouvent à l'intérieur de cet intervalle.

7. Nous poserons enfin, pour tout nombre réel γ,

$$\bar{\gamma} = 1 - \gamma.$$

§ 1. Transformations isométriques.

Théorème I. *Étant donné deux espaces quelconques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ du type* (F), *à un même nombre fini de dimensions, toute transformation isométrique de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{H}$*

$$(1) \qquad y = U(x),$$

où $x \epsilon \mathcal{E}$ et $y \epsilon \mathcal{H}$, telle que

$$U(\Theta_E) = \Theta_H,$$

est une opération linéaire.

Démonstration. Remarquons d'abord que pour démontrer ce théorème on peut se borner au cas particulier où $\mathcal{H} = \mathcal{E}$, c'est-à-dire qu'il suffit de démontrer que toute rotation $V(x)$ de $\mathcal{E}$ est linéaire.

[5]) Voir [2], p. 185 et 188.

En effet, en supposant que le théorème soit vérifié dans ce cas, on voit que pour chaque transformation isométrique (1) de l'espace $\mathcal{E}$ en un autre $\mathcal{H}$, l'opération de la variable $x \epsilon \mathcal{E}$

$$(2) \qquad U^{-1}[U(x) + U(z)] - z,$$

où z est un point arbitraire fixe de $\mathcal{E}$, est une rotation de $\mathcal{E}$ autour de Θ_E, c'est-à-dire qu'on a, d'après la supposition admise

$$(3) \qquad U^{-1}[U(x) + U(z)] - z = L_z(x),$$

où $L_z(x)$ est une opération linéaire de la variable x dépendant du paramètre z.

D'autre part, en transposant x et z, on peut aussi écrire

$$(3') \qquad U^{-1}[U(x) + U(z)] - x = L_x(z),$$

où $L_x(z)$ est une opération linéaire de la variable z, dépendant du paramètre x.

Il vient de (3) et (3')

$$(4) \qquad L_z(x) - x = L_x(z) - z,$$

pour tous les x et z de $\mathcal{E}$, et nous allons démontrer que les expressions (4), que nous désignerons par le même symbole $S(x,z)$, sont identiquement égales à Θ_E.

Les opérations (3) et (3') étant linéaires, on voit que l'on a, pour tout nombre réel π, les égalités

$$S\left(\pi x, \frac{z}{\pi}\right) = L_{z/\pi}(\pi x) - \pi x = \pi[L_{z/\pi}(x) - x]$$

$$= \pi\left[L_x\left(\frac{z}{\pi}\right) - \frac{z}{\pi}\right] = L_x(z) - z = S(x,z),$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de l'isométrie des opérations (3) et (3'),

$$\|\pi x\| = \|L_{z/\pi}(\pi x)\| = \left\|\pi x + S\left(\pi x, \frac{z}{\pi}\right)\right\| = \|\pi x + S(x,z)\| \geqslant \|S(x,z)\| - \|\pi x\|,$$

ou bien

$$\left\|\frac{z}{\pi}\right\| = \left\|L_{\pi x}\left(\frac{z}{\pi}\right)\right\| = \left\|\frac{z}{\pi} + S\left(\pi x, \frac{z}{\pi}\right)\right\|$$

$$= \left\|\frac{z}{\pi} + S(x,z)\right\| \geqslant \|S(x,z)\| - \left\|\frac{z}{\pi}\right\|.$$

En passant à la limite avec π convergeant vers 0 ou ∞, on en obtient la relation demandée

$$S(x,z)=\Theta_E,$$

vu les propriétés connues de la norme dans les espaces du type (F).

Les expressions (4) étant égales à Θ_E, les équations (3) ou (3′) donnent

$$U^{-1}[U(x)+U(z)]=x+z, \tag{5}$$

par suite,

$$U(x)+U(z)=U(x+z). \tag{5′}$$

De là, la transformation (1) est additive, et, d'après sa continuité, linéaire, c. q. f. d.

Ceci remarqué, passons à la démonstration du théorème pour le cas particulier cité ci-dessus.

On s'appuiera sur deux lemmes qui suivent; en même temps, on suppose pour la suite que $\mathcal{E}$ désigne un espace quelconque du type (F) à n dimensions, n étant un nombre naturel arbitraire.

Lemme. *Pour chaque suite de points de l'espace* $\mathcal{E}$

$$a^{(1)},\ldots,a^{(P)}, \tag{6}$$

et pour chaque suite de nombres

$$\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(P)}, \tag{6′}$$

qui appartiennent à l'intervalle

$$\langle 0,1\rangle, \tag{7}$$

il existe une suite du type (n)

$$\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(P)}, \tag{8}$$

telle que

$$\sum_{s=1}^{P}\pi^{(s)}a^{(s)}=\sum_{s=1}^{P}\alpha^{(s)}a^{(s)}. \tag{9}$$

En particulier, pour tout nombre δ *de l'intervalle* (7), *il existe une suite du type* (n)

$$\varrho^{(1)},\ldots,\varrho^{(P)},$$

telle que

$$\sum_{s=1}^{P}\varrho^{(s)}a^{(s)}=\delta\sum_{s=1}^{P}a^{(s)}.$$

Démonstration. On peut se borner au cas particulier d'une suite (6) satisfaisant à la condition que tous les n points choisis de cette suite soient linéairement indépendants.

En effet, en supposant que le lemme soit vérifié pour ce cas, et en rapprochant les termes d'une suite quelconque (6) par les termes respectifs d'une autre suite satisfaisant à la condition citée, on a le lemme pour un cas général, en passant à la limite.

Ceci remarqué, posons

$$b=\sum_{s=1}^{P}\alpha^{(s)}a^{(s)},$$

et considérons la classe C composée de toutes les suites de nombres

$$\chi^{(1)},\ldots,\chi^{(P)},$$

dont les termes appartiennent à l'intervalle (7) et telle que l'on ait l'égalité

$$\sum_{s=1}^{P}\chi^{(s)}a^{(s)}=b.$$

Désignons, pour chaque suite (c) de la classe C, par $I(c)$ le nombre de tous les termes de cette suite, qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle (7), et posons

$$M=\inf_{(c)\in C}I(c). \tag{10}$$

Il suffit de démontrer, que le nombre M n'est pas plus grand que n.

Supposons à cet effet

$$M>n, \tag{11}$$

et prenons la classe C_M composée de toutes les suites (c) de la classe C, telles que

$$I(C)=M.$$

Désignons, pour chaque suite (c) de la classe C_M, par $\Omega(c)$ le nombre égal au plus petit terme, différent de zéro, de cette suite, et posons

$$\Phi=\inf_{(c)\in C_M}\Omega(c). \tag{12}$$

On déduit facilement, vu la définition du nombre (10), qu'il existe une suite (c_1) de la forme

$$\chi_1^{(1)}, \ldots, \chi_1^{(P)}, \tag{13}$$

appartenant à la classe C_M telle que

$$\Omega(c_1) = \Phi. \tag{14}$$

En désignant par

$$\chi_1^{(s_1)}, \ldots, \chi_1^{(s_M)} \tag{14'}$$

tous les termes de la suite (13), qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle (7), on déduit, en tenant compte de la définition de $\Omega(c)$, qu'il existe un terme $\chi_1^{(s_h)}$ de la suite (14'), tel que

$$\Omega(c_1) = \chi_1^{(s_h)}. \tag{15}$$

Il résulte ensuite de (11) et de la condition supposée au début de la démonstration pour la suite (6), que l'on peut choisir une suite de nombres $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(M)}$, telle que

$$\sum_{k=1}^{M} \omega^{(k)} a^{(s_k)} = \Theta$$

et

$$\omega^{(h)} < 0.$$

Choisissons maintenant une suite (c_2) de la forme

$$\chi_2^{(1)}, \ldots, \chi_2^{(P)}, \tag{16}$$

telle que

$$\chi_2^{(s_1)}, \ldots, \chi_2^{(s_M)} \tag{17}$$

soient donnés par les égalités

$$\chi_2^{(s_k)} = \chi_1^{(s_k)} + \tau\omega^{(k)} \qquad (k=1, \ldots, M), \tag{18}$$

et les autres termes soient identiques aux termes respectifs de la suite (13).

Le symbole τ désigne dans (18) un nombre positif, tel que les termes (17) puissent se trouver à l'intérieur de l'intervalle (7).

On voit sans difficulté, que la suite (16) appartient à la classe C_M, et que

$$\chi_2^{(s_h)} < \chi_1^{(s_h)}. \tag{19}$$

D'après la définition de $\Omega(c)$, on a évidemment

$$\Omega(c_2) \leqslant \chi_2^{(s_h)},$$

et, par conséquent, vu (19), (15), et (14),

$$\Omega(c_2) < \Phi.$$

Cette dernière relation étant contraire à (12), la démonstration est ainsi terminée.

Lemme fondamental. *On peut définir dans l'espace $\mathcal{E}$ une pseudonorme $|x|_*$ qui satisfasse pour tous les points x, x_1, x_2 de $\mathcal{E}$ aux conditions suivantes:*

1. $|x|_* \geqslant 0$,
2. $|x_1 + x_2|_* \leqslant |x_1|_* + |x_2|_*$,
3. $|\tau x|_* = |\tau| |x|_*$ *pour tout nombre réel* τ,
4. $|V(x_2) - V(x_1)|_* = |x_2 - x_1|_*$ *pour toute rotation* $V(x)$ *de l'espace* $\mathcal{E}$,
5. $|x|_*$ *n'est pas identiquement égal a zéro.*

Démonstration. Nous la décomposons en deux parties, I et II.

I. **La ε-norme.** Soient donnés un nombre positif ε et un point quelconque x de l'espace $\mathcal{E}$.

Nous appellerons *ε-représentation du point* x chaque système composé d'une suite

$$z^{(1)}, \ldots, z^{(L)}, \tag{20}$$

de points de l'espace $\mathcal{E}$ et d'une suite

$$\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(L)}, \tag{20'}$$

du type (n), telle que

$$\|z^{(s)}\| \leqslant \varepsilon \qquad (s=1, \ldots, L)$$

et

$$\sum_{s=1}^{L} \nu^{(s)} z^{(s)} = x.$$

Nous appellerons *ordre de la ε-représentation* décrite le nombre L des termes des suites (20), (20').

Il est facile de voir que, pour chaque nombre ε et chaque point x, il existe une ε-representation de ce point.

En efffet, d'après une propriété connue de la norme dans l'espace $\mathcal{E}$, il existe un nombre naturel L tel que

$$\left\| \frac{x}{L} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

En posant

$$z^{(s)}=\frac{x}{L}, \qquad \nu^{(s)}=1 \qquad (s=1,\dots,L), \tag{21}$$

on vérifie que les suites (20) et (20′), dont les termes sont exprimés par les égalités (21), donnent une ε-représentation du point x.

On voit ensuite que, le nombre ε et le point x étant fixes pour le moment, il existe des représentations du point x d'ordre minimal. Nous appellerons *fondamentale* chacune de ces représentations.

Nous désignerons en même temps par

$$N(\varepsilon,x) \tag{22}$$

l'ordre des représentations fondamentales du point x, et nous l'appellerons *ε-norme du point x*.

Il est évident que, si les suites (20) et (20′) donnent une ε-représentation fondamentale du point x, tous les termes de la suite (20′) sont différents de zéro.

En effet, en supposant au contraire qu'un terme de la suite (20′) soit égal à zéro et en le supprimant dans la suite (20′) ainsi que le terme correspondant de la suite (20), on a une ε-représentation nouvelle du point x d'ordre moindre, ce qui est incompatible avec la définition du nombre (22).

La ε-norme introduite ci-dessus a plusieurs propriétés essentielles, que nous présentons dans la suite, en supposant que x, x_1, x_2 désignent des points arbitraires de l'espace $\mathcal{E}$, et ε — un nombre positif quelconque.

1° $N(\varepsilon,x)\geqslant 0$.

Cette propriété est évidente.

2° $N(\varepsilon,x_1+x_2)\leqslant N(\varepsilon,x_1)+N(\varepsilon,x_2)$.

Pour le démontrer, on prend des ε-représentation fondamentales des points x_k

$$z_k^{(1)},\dots,z_k^{(L_k)}, \tag{23}$$

$$\nu_k^{(1)},\dots,\nu_k^{(L_k)}, \tag{23′}$$

où

$$L_k=N(\varepsilon,x_k) \qquad (k=1,2), \tag{23″}$$

et on considère les suites

$$z^{(1)},\dots,z^{(L)}, \tag{24}$$

$$\nu^{(1)},\dots,\nu^{(L)}, \tag{24′}$$

où

$$L=L_1+L_2, \tag{24″}$$

et

$$z^{(s)}=\begin{cases} z_1^{(s)} & (s=1,\dots,L_1),\\ z_2^{(s-L_1)} & (s=L_1+1,\dots,L),\end{cases}$$

$$\nu^{(s)}=\begin{cases} \nu_1^{(s)} & (s=1,\dots,L_1),\\ \nu_2^{(s-L_1)} & (s=L_1+1,\dots,L).\end{cases}$$

Il résulte du lemme précédent qu'il existe une suite du type (n)

$$\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(L)}, \tag{25}$$

telle que

$$\sum_{s=1}^{L}\sigma^{(s)}z^{(s)}=\sum_{s=1}^{L}\nu^{(s)}z^{(s)}; \tag{26}$$

puisqu'on a, d'après la définition des suites (23), (23′) et (24), (24′),

$$\sum_{s=1}^{L}\nu^{(s)}z^{(s)}=\sum_{s=1}^{L_1}\nu_1^{(s)}z_1^{(s)}+\sum_{s=1}^{L_2}\nu_2^{(s)}z_2^{(s)}=x_1+x_2,$$

$$\|z^{(s)}\|\leqslant\varepsilon \qquad (s=1,\dots,L),$$

on peut en déduire, vu (26), que le système de suites (24), (25) est une ε-représentation du point x_1+x_2. Il s'ensuit immédiatement que

$$N(\varepsilon,x_1+x_2)\leqslant L,$$

ce qui donne, d'après (23″) et (24″), la propriété demandée 2°.

3° (a) $N(\varepsilon,\delta x)+N(\varepsilon,\bar{\delta}x)\leqslant N(\varepsilon,x)+n$ *pour tout nombre* δ *de l'intervalle* $\langle 0,1\rangle$.

Pour la démonstration, on prend une ε-représentation fondamentale du point x

$$z^{(1)},\dots,z^{(L)}, \tag{27}$$

$$\nu^{(1)},\dots,\nu^{(L)}, \tag{27′}$$

où

(27″) $$L=N(\varepsilon,x).$$

On choisit ensuite, vu le lemme précédent, une suite du type (n)

(28) $$\varrho^{(1)},\dots,\varrho^{(L)}$$

telle que

(28′) $$\sum_{s=1}^{L}\varrho^{(s)}(\nu^{(s)}z^{(s)})=\delta\sum_{t=1}^{L}\nu^{(s)}z^{(s)}=\delta x,$$

et on construit la suite

(29) $$\bar\varrho^{(1)},\dots,\bar\varrho^{(L)},$$

pour laquelle on a évidemment

(29′) $$\sum_{t=1}^{L}\bar\varrho^{(t)}(\nu^{(t)}z^{(t)})=\sum_{t=1}^{L}(1-\varrho^{(t)})(\nu^{(t)}z^{(t)})=\bar\delta x.$$

Désignons respectivement par

(30) $$\varrho^{(s_1)},\dots,\varrho^{(s_G)},$$

(31) $$\bar\varrho^{(t_1)},\dots,\bar\varrho^{(t_H)}$$

les suites partielles des suites (28), (29), composées de tous les termes différents de zéro de ces suites.

Il est facile de vérifier que

(32) $$G+H\leqslant L+n,$$

car aux termes égaux à 1 de la suite (28) correspondent les termes égaux à 0 de la suite (29), et réciproquement, tandis que le nombre des autres termes, appartenant à l'intérieur de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, ne dépasse pas n.

En appliquant encore le lemme précédent aux suites (30), (31) et aux suites respectives

(33) $$z^{(s_1)},\dots,z^{(s_G)},$$

(34) $$z^{(t_1)},\dots,z^{(t_H)},$$

on a, vu (28′), (29′) et la définition des suites (30), (31), qu'il existe des suites du type (n)

(33′) $$\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(G)}$$

et

(34′) $$\mu^{(1)},\dots,\mu^{(H)},$$

telles que

$$\sum_{p=1}^{G}\lambda^{(p)}z^{(s_p)}=\sum_{p=1}^{G}\varrho^{(s_p)}(\nu^{(s_p)}z^{(s_p)})=\sum_{p=1}^{L}\varrho^{(s)}(\nu^{(s)}z^{(s)})=\delta x,$$

$$\sum_{q=1}^{H}\mu^{(q)}z^{(t_q)}=\sum_{q=1}^{H}\varrho^{(t_q)}(\nu^{(t_q)}z^{(t_q)})=\sum_{q=1}^{L}\bar\varrho^{(t)}(\nu^{(t)}z^{(t)})=\bar\delta x.$$

Il en résulte facilement que les systèmes de suites (33), (33′) et (34), (34′) sont des ε-représentations des points δx et $\bar\delta x$ et, par conséquent, on a les inégalités

$$N(\varepsilon,\delta x)\leqslant G,$$

$$N(\varepsilon,\bar\delta x)\leqslant H,$$

ce qui donne, vu (32) et (27″), la propriété 3° (a).

3° (b) $N(\varepsilon,-x)=N(\varepsilon,x)$.

Cette propriété résulte facilement de ce qu'en changeant les signes des termes de la suite (20) dans une ε-représentation quelconque (20), (20′) du point x, on obtient une ε-représentation du point $-x$.

4° $N(\varepsilon,V(x))\leqslant N(\varepsilon,x)+M(\varepsilon)$,

où $V(x)$ est une rotation quelconque de l'espace $\mathcal{E}$ et

(35) $$M(\varepsilon)=\sup_{\|y\|\leqslant n\varphi_E(\varepsilon)}N(\varepsilon,y).$$

Prenons une ε-représentation fondamentale du point x

(36) $$z^{(1)},\dots,z^{(L)},$$

(36′) $$\nu^{(1)},\dots,\nu^{(L)},$$

où

(36″) $$L=N(\varepsilon,x).$$

Désignons par

(37) $$\nu^{(f_1)},\dots,\nu^{(f_C)}$$

la suite de tous les termes (36′) qui appartiennent, s'ils existent, à l'intérieur de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$.

Posons

$$d^{(s)}=\begin{cases}\Theta & (s=0),\\ \sum_{j=1}^{s} z^{(j)} & (s=1,\dots,L),\end{cases}$$

et considérons les suites

(38) $$w^{(1)},\dots,w^{(L)},$$

(38′) $$\tau^{(1)},\dots,\tau^{(L)},$$

où

$$w^{(s)}=V(d^{(s)})-V(d^{(s-1)}) \qquad (s=1,\dots,L),$$

$$\tau^{(s)}=1 \qquad (s=1,\dots,L).$$

L'opération $V(x)$ étant une rotation, on a l'inégalité

(39) $$\|w^{(s)}\|=\|d^{(s)}-d^{(s-1)}\|=\|z^{(s)}\|\leqslant\varepsilon \qquad (s=1,\dots,L).$$

Evidemment, on a en même temps

(39′) $$\sum_{s=1}^{L}\tau^{(s)}w^{(s)}=V(d^{(L)}).$$

D'après la définition des suites (36), (36′) et (37), il vient

$$\|x-d^{(L)}\|=\|\sum_{j=1}^{L}\nu^{(j)}z^{(j)}-\sum_{j=1}^{L}z^{(j)}\|=\|\sum_{c=1}^{C}\bar{\nu}^{(fc)}z^{(fc)}\|$$

$$\leqslant\sum_{c=1}^{C}\|\bar{\nu}^{(fc)}z^{(fc)}\|\leqslant C\varphi_E(\varepsilon)\leqslant n\varphi_E(\varepsilon)$$

et

(40) $$\|V(x)-V(d^{(L)})\|=\|x-d^{(L)}\|\leqslant n\varphi_E(\varepsilon).$$

On voit en outre que les dernières relations subsistent aussi lorsque la suite (37) n'existe pas.

Il résulte de (39), (39′) que le système (38), (38′) est une ε-représentation du point $V(d^{(L)})$, d'où

(41) $$N[\varepsilon,V(d^{(L)})]\leqslant L.$$

On a ensuite, d'après (40) et (35),

(42) $$N[\varepsilon,V(x)-V(d^{(L)})]\leqslant M(\varepsilon).$$

En même temps il vient, d'après la propriété 2°, que

(43) $$N[\varepsilon,V(x)]\leqslant N[\varepsilon,V(d^{(L)})]+N[\varepsilon,V(x)-V(d^{(L)})].$$

Les relations (43), (42), (41), (36″) donnent immédiatement la propriété 4°.

5° $N(\varepsilon,x)\geqslant\dfrac{\|x\|}{\varphi_E(\varepsilon)}$.

En prenant une ε-représentation fondamentale du point x,

$$z^{(1)},\dots,z^{(L)}, \qquad \nu^{(1)},\dots,\nu^{(L)},$$

où

$$L=N(\varepsilon,x),$$

on a

$$\|x\|\leqslant\sum_{s=1}^{L}\|\nu^{(s)}z^{(s)}\|\leqslant L\varphi_E(\varepsilon),$$

d'où résulte la propriété 5°.

II. La pseudonorme. Choisissons maintenant, dans l'espace $\mathcal{E}$, une base quelconque composée de points

(44) $$e_1,e_2,\dots,e_n$$

et posons

(45) $$N(\varepsilon)=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}N(\varepsilon,e_i).$$

Faisons correspondre à chaque point x de $\mathcal{E}$ le nombre

(46) $$|x|_*=\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)}.$$

C'est une fonctionnelle dans $\mathcal{E}$ aux valeurs finies ou infinies.

Nous allons démontrer qu'elle est toujours finie et qu'elle satisfait aussi à toutes les conditions citées 1-5 du lemme fondamental.

Bornons nous pour le moment aux points pour lesquels la limite (45) est finie. On a d'abord, pour tous tels points x,x_1,x_2 de $\mathcal{E}$, en s'appuyant sur les propriétés 1°, 2° de la ε-norme, les relations presque évidentes

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)}\geqslant0,$$

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{N(\varepsilon,x_1+x_2)}{N(\varepsilon)}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{N(\varepsilon,x_1)+N(\varepsilon,x_2)}{N(\varepsilon)}$$

$$\leqslant\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{N(\varepsilon,x_1)}{N(\varepsilon)}+\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{N(\varepsilon,x_2)}{N(\varepsilon)},$$

équivalentes, d'après la définition (46), aux conditions 1 et 2 du lemme.

Démontrons maintenant la condition 3.

On voit d'abord, d'après (45), la propriété 5⁰ de la ε-norme et la remarque contenue dans le § 0, que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} N(\varepsilon)=+\infty. \tag{47}$$

On en déduit, en tenant compte de la propriété 3⁰(a) de la ε-norme, les inégalités

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,\delta x)}{N(\varepsilon)}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)+n}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)}, \tag{48}$$

pour tout nombre

$$0\leqslant\delta\leqslant 1,$$

et

$$2\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x/2)}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x/2)+N(\varepsilon,x/2)}{N(\varepsilon)} \tag{49}$$

$$\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)+n}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)}.$$

Par suite, on a, d'après (46), (48) et (49),

$$|\delta x|_*\leqslant|x|_*, \tag{48'}$$

$$\left|\frac{x}{2}\right|_*\leqslant\frac{1}{2}|x|_*, \tag{49'}$$

d'où, par induction,

$$\left|\frac{x}{2^p}\right|_*\leqslant\frac{1}{2^p}|x|_* \qquad (p=1,2,\ldots). \tag{49''}$$

En outre, on a évidemment, vu la propriété 3⁰(b) de la ε-norme

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,-x)}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)},$$

c'est-à-dire

$$|-x_*|=|x|_*. \tag{50}$$

Soit donné maintenant un nombre réel arbitraire τ. Prenons une suite de nombres naturels r_p $(p=1,2,\ldots)$, tels que

$$\frac{r_p}{2^p}>|\tau| \qquad (p=1,2,\ldots),$$

$$\lim_{p\to\infty}\frac{r_p}{2^p}=|\tau|.$$

En s'appuyant sur (50), (48'), (49'') et sur la propriété 2⁰, on déduit que

$$|\tau x|_*=||\tau|x|_*\leqslant\left|\frac{r_p}{2^p}x\right|\leqslant\frac{r_p}{2^p}|x|_* \qquad (p=1,2,\ldots),$$

et, par conséquent,

$$|\tau x|_*\leqslant\lim_{p\to\infty}\frac{r_p}{2^p}|x|_*=|\tau|\,|x|_*. \tag{51}$$

En remplaçant dans (51) τ et x respectivement par $1/\tau$ et τx, il vient l'inégalité inverse

$$|\tau|\,|x|_*\leqslant|\tau x|_*,$$

ce qui donne, avec (51), la condition demandée 3.

Passons à la condition 4 du lemme. On voit d'abord que, d'après la formule (45),

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,e_i)}{N(\varepsilon)}\leqslant 1 \qquad (i=1,\ldots,n),$$

c'est-à-dire

$$|e_i|_*\leqslant 1 \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{52}$$

Désignons, pour tout nombre positif suffisamment petit ε, par $m(\varepsilon)$ le plus grand nombre entier tel que, pour chaque point

$$y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i \tag{53}$$

de l'espace $\mathcal{E}$, l'inégalité

$$\|y\|\leqslant n\varphi(\varepsilon) \tag{54}$$

entraîne

$$|\eta_i|<\frac{1}{2^{m(\varepsilon)}} \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{54'}$$

L'existence d'une telle fonction $m(\varepsilon)$ résulte des remarques contenues dans le § 0 et il est clair que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} m(\varepsilon)=+\infty. \tag{55}$$

Remarquons en outre que, d'après la propriété 3°(a), on a

$$N\left(\varepsilon,\frac{x}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}N(\varepsilon,x)+\frac{n}{2} \tag{55'}$$

et ensuite, par induction,

$$N\left(\varepsilon,\frac{x}{2^p}\right)\leqslant\frac{1}{2^p}N(\varepsilon,x)+\frac{n}{2^p}+\frac{n}{2^{p-1}}+\ldots+\frac{n}{2} \tag{55''}$$

$$<\frac{1}{2^p}N(\varepsilon,x)+n \qquad (p=1,2,\ldots).$$

En tenant compte de (55''), (54'), (45) et des propriétés 2°, 3°(a) et 3°(b) on voit que les relations

$$N(\varepsilon,y)\leqslant\sum_{i=1}^{n}N[\varepsilon,\eta_i e_i]=\sum_{i=1}^{n}N(\varepsilon,|\eta_i|e_i)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(N\left(\varepsilon,\frac{e_i}{2^{m(\varepsilon)}}\right)+n\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{m(\varepsilon)}}N(\varepsilon,e_i)+2n\right)\leqslant\frac{nN(\varepsilon)}{2^{m(\varepsilon)}}+2n^2$$

ont lieu pour chaque point (53) satisfaisant à la condition (54), et on en déduit l'inégalité

$$M(\varepsilon)\leqslant\frac{nN(\varepsilon)}{2^{m(\varepsilon)}}+2n^2,$$

où le premier terme est la fonction définie par (35). De là, on obtient, vu la propriété 4° et (55),

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N[\varepsilon,V(x)]}{N(\varepsilon)}\leqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)+M(\varepsilon)}{N(\varepsilon)}=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,x)}{N(\varepsilon)},$$

c'est-à-dire

$$|V(x)|_*\leqslant|x|_*, \tag{56}$$

pour chaque rotation $V(x)$ de l'espace $\mathcal{E}$.

Cette dernière inégalité, étant vraie pour toutes les rotations et tous les points de $\mathcal{E}$, reste aussi vraie si l'on remplace dans (56) x et $V(x)$ respectivement par $V(x)$ et $V^{-1}(x)$, ce qui donne

$$|x|_*\leqslant|V(x)|_*. \tag{57}$$

En remplaçant ensuite dans (56) et (57) $V(x)$ par la rotation

$$V_1(x)=V(x+x_1)-V(x_1),$$

en traitant x_1 comme un paramètre, et en posant

$$x=x_2-x_1,$$

on trouve la condition 4 du lemme.

Remarquons maintenant que, d'après (45), on a

$$\sum_{i=1}^{n}N(\varepsilon,e_i)\geqslant N(\varepsilon)$$

et, par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n}\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{N(\varepsilon,e_i)}{N(\varepsilon)}\geqslant\limsup_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{N(\varepsilon,e_i)}{N(\varepsilon)}\geqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n}|e_i|_*\geqslant 1. \tag{58}$$

Il en résulte immédiatement la condition 5 du lemme, car tous les membres de la somme (58) ne peuvent être égaux à zéro.

Il reste donc à démontrer que la fonctionnelle (46) est toujours finie. Pour ce but, on représente chaque point x de l'espace $\mathcal{E}$ sous la forme

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,$$

et on a, en tennant compte de (52) et des conditions 2 et 3,

$$|x|_*\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i e_i|=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\,|e_i|_*\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|<+\infty.$$

Ainsi, la démonstration du lemme fondamental est terminée.

Après ces raisonnements auxiliaires passons à la démonstration essentielle du théorème. On le déduit par induction relativement au nombre n de dimensions de l'espace $\mathcal{E}$.

I'. Supposons d'abord $n=1$. La base (44) se réduit donc au terme e_1 et chaque point x de l'espace $\mathcal{E}$ peut être exprimé sous la forme

$$x=\xi_1 e_1,$$

où ξ_1 est un nombre réel. En même temps, on a, d'après (45), (46),

$$|e_1|_* = 1$$

et, par conséquent, vu la condition 3 du lemme fondamental,

$$|x|_* = |\xi_1|,$$

d'où

(59) $$|x|_* > 0 \quad \text{pour} \quad x \neq \Theta,$$

ce qui montre que la pseudonorme (46) est dans ce cas une norme homogène dans $\mathcal{E}$.

Puisque chaque rotation $V(x)$ de l'espace $\mathcal{E}$ est aussi, d'après la condition 4 du lemme fondamental, une „rotation" de $\mathcal{E}$ relativement à la norme homogène (46), on déduit, à l'aide du théorème de S. Mazur et S. Ulam[6]), que $V(x)$ est une opération linéaire. Le théorème est par cela vérifié dans la première étape.

II'. Supposons maintenant que $n>1$ et que le théorème soit vrai pour chaque espace du type (F) au nombre de dimensions moindre que n. On distinguera deux cas:

A. La pseudonorme (45) satisfait à la condition (59), c'est-à-dire qu'elle est une norme homogène dans $\mathcal{E}$. Alors la démonstration se réduit comme précédemment au théorème de Mazur et Ulam

B. Il existe un système de points linéairement indépendants

(60) $$e_1', e_2', .., e_p' \qquad (p<n),$$

tel que

(60') $$|e_i'|_* = 0 \qquad (i=1,\ldots,p),$$

tandis qu'on a

(60'') $$|x|_* > 0$$

pour chaque point x de l'espace $\mathcal{E}$, indépendant linéairement des points (60). Prenons dans ce cas une base quelconque de $\mathcal{E}$ composée des points (60) et des points

(61) $$e_1'', e_2'', \ldots, e_q'' \qquad (q=n-p)$$

indépendants linéairement des points (60'). Formons ensuite deux sous-espaces $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ aux bases respectivement (60) et (61).

[6]) Voir [1], p. 166.

Il est clair, que chaque point x de $\mathcal{E}$ peut être exprimé d'une façon univoque sous la forme

(62) $$x = x' + x'',$$

où

$$x' \in \mathcal{E}', \qquad x'' \in \mathcal{E}''.$$

En outre, en exprimant chaque point x' de l'espace $\mathcal{E}'$ sous la forme

$$x' = \sum_{i=1}^{p} \xi_i' e_i',$$

où ξ_i' $(i=1,\ldots,p)$ sont des nombres réels, on en déduit, vu les conditions 2 et 3 du lemme fondamental,

$$|x'|_* \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\xi_i' e_i'|_* = \sum_{i=1}^{p} |\xi_i'|\,|e_i'|_*,$$

c'est-à-dire, d'après (60'),

(63) $$|x'|_* = 0.$$

En même temps, chaque point x'' de l'espace $\mathcal{E}''$ étant linéairement indépendant des points (60), on a, d'après (60''),

(64) $$|x''|_* > 0 \quad \text{pour} \quad x'' \neq \Theta,$$

ce qui revient à ce que la pseudonorme (45) est une norme homogène dans l'espace $\mathcal{E}''$. On tire enfin, de (63) et de la condition 2 du lemme fondamental,

(65) $$|x''|_* = |x''|_* - |x'|_* \leqslant |x'+x''|_* \leqslant |x''| + |x'|_* = |x''|_*,$$

c'est-à-dire, d'après (62),

(66) $$|x|_* = |x''|_*$$

pour chaque point x exprimé sous la forme (62).

Soit maintenant $V(x)$ une rotation quelconque de $\mathcal{E}$. D'après ce qui précède, elle peut être aussi exprimée sous la forme

(67) $$V(x) = V'(x) + V''(x),$$

où

(68) $$V'(x) \in \mathcal{E}', \qquad V''(x) \in \mathcal{E}''$$

sont des opérations univoques de la variable x, définies dans $\mathcal{E}$.

En appliquant les notations (62) et (67), représentons la rotation $V(x)$ sous la forme

$$V(x)=V'(x'')+[V'(x'+x'')-V'(x'')]+V''(x'+x''), \tag{69}$$

et considérons les trois membres de l'expression (69).

Je dis, que les deux derniers de ces membres dépendent d'une manière additive uniquement de la partie x' resp. x'' de la variable x, tandis que le premier terme est une fonction additive de la partie x''.

En effet, l'opération $V(x)$ étant une rotation de $\mathcal{E}$, on déduit de (67), (66) et de la condition 4 du lemme fondamental

$$\begin{aligned}|V(x_2'+x_2'')-V(x_1'+x_1'')|_*&=|V''(x_2'+x_2'')-V''(x_1'+x_2'')|_* \\ &=|(x_2'+x_2'')-(x_1'+x_1'')|_*=|x_2''-x_1''|_*\end{aligned} \tag{70}$$

pour tous les points

$$x_k'\in\mathcal{E}',\qquad x_k''\in\mathcal{E}''\qquad (k=1,2).$$

En particulier, en posant dans (70)

$$x_2'=x',\qquad x_2''=x'',\qquad x_1'=\Theta,\qquad x_1''=x'',$$

il vient

$$|V''(x'+x'')-V''(x'')|_*=0,$$

c'est-à-dire, d'après (64),

$$V''(x'+x'')=V''(x'') \tag{71}$$

pour tous les points

$$x'\in\mathcal{E}',\qquad x''\in\mathcal{E}'',$$

et, en posant

$$x_1'=\Theta,\qquad x_2'=\Theta,$$

on trouve

$$|V''(x_2'')-V''(x_1'')|_*=|x_2''-x_1''|_*. \tag{71'}$$

La relation (71) montre, que le dernier membre de (69) ne dépend que de la partie x'' de la variable x. En même temps, il résulte de (71′) et de l'égalité évidente $V''(\Theta)=\Theta$, que l'opération définie dans l'espace $\mathcal{E}''$ par

$$\overline{\overline{V}}(x'')=V''(x''),\qquad \text{où}\quad x''\in\mathcal{E}'', \tag{72}$$

est une rotation de $\mathcal{E}''$ relativement à la norme (46).

Le nombre de dimensions de $\mathcal{E}''$ étant moindre que n, on en déduit, d'après la supposition donnée au commencement de II′, que l'opération (72), resp. le dernier membre de l'expression (69), est une opération additive dans $\mathcal{E}''$, resp. $\mathcal{E}$.

Considérons maintenant le second membre de l'expression (69). En revenant à l'ancienne norme dans $\mathcal{E}$ on a, vu (71), les égalités

$$\begin{aligned}&\|V(x_2'+x'')-V(x_1'+x'')\| \\ &=\|[V'(x_2'+x'')-V'(x'')]-[V'(x_1'+x'')-V'(x'')]\|=\|x_2'-x_1'\|\end{aligned} \tag{73}$$

pour tous les points

$$x_k'\in\mathcal{E}',\qquad x''\in\mathcal{E}''\qquad (k=1,2). \tag{73'}$$

On voit par là que, le point x'' étant fixe pour le moment, l'opération définie dans l'espace $\mathcal{E}'$ par la formule

$$\overline{V}(x')=V'(x'+x'')-V'(x''),\qquad \text{où}\quad x'\in\mathcal{E}', \tag{74}$$

qui dépend du paramètre x'', est une rotation de $\mathcal{E}'$ relativement à la norme ancienne et, par conséquent, vu la supposition citée de II′, cette opération (74) est additive donc linéaire dans $\mathcal{E}'$. On peut montrer qu'elle ne dépend pas de x''.

En effet, l'opération $V(x)$ étant une rotation de l'espace $\mathcal{E}$, on trouve, d'après (66), (68), (69), (71) et ce qui précède,

$$\begin{aligned}&\|V(\tau x'+x_2'')-V(\tau x'+x_1'')\|=\|[V'(\tau x'+x_2'')-V'(x_2'')] \\ &\qquad -[V'(\tau x'+x_1'')-V'(x_1'')]+[V'(x_2'')-V'(x_1'')]+[V''(x_2'')-V''(x_1'')]\| \\ &=\|\tau\{[V'(x'+x_2'')-V'(x_2'')]-[V'(x'+x_1'')-V'(x_1'')]\}+[V'(x_2'')-V'(x_1'')] \\ &\qquad +[V''(x_2'')-V''(x_1'')]\|=\|(\tau x'+x_2'')-(\tau x'+x_1'')\|=\|x_2''-x_1''\|,\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}&\|\tau\{[V'(x'+x_2'')-V'(x_2'')]+[V'(x'+x_1'')-V'(x_1'')]\}\| \\ &\leqslant\|x_2''-x_1''\|+\|[V'(x_2'')-V'(x_1'')]+[V''(x_2'')-V''(x_1'')]\|\end{aligned} \tag{74'}$$

pour tout nombre réel τ et tous les points

$$x'\in\mathcal{E}',\qquad x_k''\in\mathcal{E}''\qquad (k=1,2). \tag{74''}$$

On en déduit, d'après les remarques du § 0 que, pour les points

(74″) dont la distance est suffisamment petite[7]), le coefficient du nombre τ dans le premier terme de (74′) doit être égal à Θ. Un raisonnement très facile montre qu'il est aussi égal à Θ pour tous les points (74″) et, par suite, l'opération (74) est indépendante du paramètre x'', c. q. f. d.

Nous étudierons le premier membre de l'expression (69).

Considérons l'opération définie dans l'espace $\mathcal{E}''$ par la formule

$$V^*(x'')=V'(x''), \quad \text{où} \quad x''\in\mathcal{E}'', \tag{75}$$

et exprimons l'opération $V(x)$, vu (62), (69), (72), (74), (75) sous la forme

$$V(x)=V^*(x'')+\bar{V}(x')+\dot{V}(x''). \tag{76}$$

Par un calcul facile on trouve l'opération inverse

$$V^{-1}(x)=-\bar{V}^{-1}\{V^*[\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')]\}+\bar{V}^{-1}(x')+\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')\ {}^{8}). \tag{77}$$

Considérons ensuite, en appliquant (62), l'opération composée

$$\begin{aligned}\hat{V}(x)&=V^{-1}[V(x+y'')-V(y'')]\\&=x+\bar{V}^{-1}[V^*(x''+y'')-V^*(x'')-V^*(y'')],\end{aligned} \tag{78}$$

où $x\in\mathcal{E}$ et y'' est un paramètre arbitraire appartenant à l'espace $\mathcal{E}''$, et formons les opérations iterées

$$\hat{V}^j(x)=x+j\bar{V}^{-1}[V^*(x''+y'')-V^*(x'')-V^*(y'')] \qquad (j=1,2,\ldots). \tag{79}$$

Les opérations (79) étant évidemment des rotations de l'espace $\mathcal{E}$ relativement à la norme ancienne, on a, par conséquent, les égalités

$$\|\hat{V}^j(x_2'')-\hat{V}^j(x_1'')\|=\|x_2''-x_1''\| \qquad (j=1,2,\ldots)$$

[7]) Il suffit choisir x_1'',x_2'' de telle façon que l'expression du côté droit de (74′) soit mondre que η_E.

[8]) En admettant (62) et en posant $V^{-1}(x'+x'')=y'+y''$, où $y'\in\mathcal{E}'$, $y''\in\mathcal{E}''$, nous avons, en tenant compte de ce qui précède,

$$x'+x''=V(y'+y'')=V^*(y'')+\bar{V}(y')+\bar{\bar{V}}(y'')$$

et par conséquent $\bar{\bar{V}}(y'')=x''$, $y''=\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')$, d'où ensuite

$$\bar{V}(y')=x'-V^*[\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')], \qquad y'=\bar{V}^{-1}(x')-\bar{V}^{-1}\{V^*[\bar{\bar{V}}^{-1}(x'')]\},$$

ce qui donne immédiatement la formule (77).

pour tous les points

$$x_k''\in\mathcal{E}'' \qquad (k=1,2).$$

On en déduit, comme dans le cas des formules (74′), que le coefficient du nombre j dans le second terme de (79) est identiquement égal à Θ, donc la fonction (75) est une opération additive.

Somme toute, tous les trois membres du côté droit de l'expression (76) étant additifs, l'opération $V(x)$ est aussi additive, donc linéaire.

Ainsi le théorème est aussi vérifié pour le cas B de la seconde étape, et la démonstration par induction est terminée.

§ 2. Complémentaires.

S. Mazur a démontré que le théorème de ce travail est équivalent au suivant:

Théorème II. *Étant donné un groupe G composé des transformations homéomorphes d'un espace quelconque $\mathcal{E}$ du type (F) à un nombre arbitraire fini de dimensions en lui-même, tel que*

(A) *le groupe G contient toutes les translations de l'espace $\mathcal{E}$,*

(B) *le sous-groupe G_0, composé de toutes les transformations de G qui ont Θ comme point fixe, est compact*[9]),

toutes les transformations du groupe G_0 sont linéaires.

Chaque espace du type (F) à n dimensions étant évidemment isomorphe avec l'espace euclidien à n dimensions, on peut remplacer dans ce théorème, sans en restreindre la généralité, l'espace donné $\mathcal{E}$ par l'espace euclidien.

Voici la démonstration de l'équivalence des deux théorèmes, donnée par S. Mazur.

I. Admettons le théorème I. Soit $\mathcal{E}$ un espace quelconque du type (F) à n dimensions. Considérons deux groupes G et G_0 des transformations homéomorphes de $\mathcal{E}$ en lui-même, satisfaisant aux conditions (A) et (B) du théorème II. Posons pour chaque x de $\mathcal{E}$,

$$\|x\|^*=\sup_{V(x)\in G_0}\|V(x)\|. \tag{80}$$

[9]) C'est-à-dire que chaque suite infinie des transformations du groupe G_0 contient une suite partielle tendant uniformément, relativement à la norme, vers une transformation de G_0 dans chaque ensemble compact de points de l'espace $\mathcal{E}$.

Nous étudierons ici quelques propriétés de la fonctionnelle (80). On voit d'abord que

$$\|x_1+x_2\|^* \leqslant \|x_1\|^* + \|x_2\|^*$$

pour tous les points x_1, x_2 de $\mathcal{E}$.

En efffet, en introduisant, pour chaque transformation $V(x)$ du groupe G_0, la transformation auxiliaire

$$V_1(x) = V(x+x_1) - V(x_1), \tag{81}$$

il vient de (B), que $V_1(x)$ appartient au groupe G_0 et que

$$\|V(x_1+x_2)\| \leqslant \|V_1(x_2)\| + \|V(x_1)\| \leqslant \|x_1\|^* + \|x_2\|^*,$$

d'où résulte immédiatement la relation demandée.

On voit ensuite que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0 \text{ entraîne } \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^* = 0 \tag{82}$$

pour chaque suite $\{x_n\}$ de points de l'espace $\mathcal{E}$.

Pour le démontrer, remarquons que, pour chaque nombre positif ε, il existe un nombre positif δ tel que $\|x\| < \delta$ entraîne $\|V(x)\| < \varepsilon$, pour chaque point x de l'espace $\mathcal{E}$ et chaque transformation $V(x)$ du groupe G_0.

En effet, en supposant le contraire, il existerait une suite $\{\bar{x}_n\}$ de points de l'espace $\mathcal{E}$, et une suite $\{\bar{V}_n(x)\}$ de transformations du groupe G_0, telles que $\bar{x}_n \to \Theta$, tandis que $\bar{V}_n(\bar{x}_n)$ non $\to \Theta$; le groupe G_0 étant compact, on peut aussi supposer que la suite $\{\bar{V}_n(x)\}$ converge uniformément dans chaque ensemble compact de points de l'espace $\mathcal{E}$ vers une transformation $\bar{V}_0(x)$ du groupe G_0; en prenant en particulier, l'ensemble compact, composé de points de la suite $\{\bar{x}_n\}$ et de point Θ, on en déduit la relation $\bar{V}_n(\bar{x}_n) \to \bar{V}_0(\Theta) = \Theta$[10]) contraire à la précédente. Cette remarque donne facilement la relation (82).

D'après les propriétés citées ci-dessus et d'autres évidentes, on voit que la fonctionnelle $\|x\|^*$ représente une norme dans $\mathcal{E}$.

Remplaçons maintenant la norme ancienne dans $\mathcal{E}$ par cette norme nouvelle. Il suit de là un espace nouveau $\mathcal{E}^*$ du type (F), et il est facile de vérifier qu'il est isomorphe avec l'espace précédent $\mathcal{E}$.

[10]) Voir [5], p. 108-109.

Les transformations des groupes cités peuvent être aussi considérées comme transformations biunivoques de l'espace $\mathcal{E}^*$ en lui-même et nous démontrerons que chaque transformation du groupe G_0 est une rotation de $\mathcal{E}^*$.

En effet, étant donnée une transformation quelconque $V_0(x)$ du groupe G_0, on a, pour tous les points x_1, x_2 de $\mathcal{E}$ resp. $\mathcal{E}^*$ et pour chaque autre transformation $V(x)$ du groupe G_0,

$$\|V[V_0(x_2) - V_0(x_1)]\| = \|V[V_{01}(x_2-x_1)]\| \leqslant \|x_2-x_1\|^*, \tag{83}$$

et, par conséquent,

$$\|V_0(x_2) - V_0(x_1)\|^* \leqslant \|x_2-x_1\|^*, \tag{83'}$$

où $V_{01}(x)$ désigne dans (83) la rotation auxiliaire correspondant à $V_0(x)$, analogue à celle de (81); en remplaçant, dans (83'), $V_0(x), x_1, x_2$ respectivement par $V_0^{-1}(x), V_0(x_1), V_0(x_2)$, on a l'inégalité inverse

$$\|x_2-x_1\|^* \leqslant \|V_0(x_2) - V_0(x_1)\|^*,$$

ce qui montre, avec ce qui précède, que la transformation $V_0(x)$ est une rotation de $\mathcal{E}^*$.

Toutes les transformations du groupe G_0 étant des rotations de l'espace $\mathcal{E}^*$, on trouve qu'elles sont, vu la supposition du commencement, additives donc linéaires, ce qui implique le théorème II.

II. Admettons le théorème II. Considérons les groupes G et G_0 composés respectivement de toutes les transformations isométriques d'un espace donné $\mathcal{E}$ du type (F) à n dimension en lui-même et de toutes les rotations de cet espace.

Nous démontrerons que les groupes décrits satisfont aux conditions (A) et (B) du théorème II.

La première condition étant évidente, passons à la seconde. On voit d'abord que toutes les transformations du groupe G sont uniformément continues dans l'espace $\mathcal{E}$, vu l'égalité

$$\|U(x_2) - U(x_1)\| = \|x_2-x_1\|, \tag{84}$$

qui a lieu pour tous les points x_1, x_2 de $\mathcal{E}$ et pour chaque transformation $U(x)$ du groupe G.

On peut montrer ensuite que, pour chaque suite $\{V_n(x)\}$ de transformations du groupe G_0 et pour chaque point x_0 de l'espace $\mathcal{E}$, il existe une suite partielle de la suite donnée convergente en le point x_0.

En effet, on peut choisir un nombre naturel suffisamment grand L tel que le point x_0/L appartienne à la sphère compacte décrite au § 0; on a dans ce cas

$$V_n(x_0)=\sum_{s=1}^{L} y_n^{(s)}, \tag{85}$$

où

$$y_n^{(s)}=V_n\left(\frac{s}{L}x_0\right)-V_n\left(\frac{s-1}{L}x_0\right) \quad (s=1,\ldots,L;n=1,2,\ldots), \tag{85'}$$

en même temps que

$$\|y_n^{(s)}\|=\left\|\frac{x_0}{L}\right\|\leqslant\eta_E; \tag{85''}$$

les points (85') appartenant, d'aprés (85''), à la sphère compacte, il existe une suite croissante d'indices $\{n_k\}$ telle que toutes les suites

$$\{y_{n_k}^{(s)}\} \qquad (s=1,\ldots,L)$$

soient convergentes; il en résulte immédiatement, vu (85), qu'alors la suite partielle de transformations $\{V_{n_k}(x)\}$ est aussi convergente en x_0.

On peut montrer enfin que, pour chaque suite $\{V_n(x)\}$ de transformations du groupe G_0, tendant uniformément vers une opération $V_0(x)$ dans chaque ensemble compact de $\mathcal{E}$, la limite $V_0(x_0)$ de cette suite appartient aussi au groupe G_0.

En effet, on a d'une part, d'après (84),

$$\|V_n(x_2)-V_n(x_1)\|=\|x_2-x_1\|,$$

et, par suite,

$$\lim_{n\to\infty}\|V_n(x_2)-V_n(x_1)\|=\|V_0(x_2)-V_0(x_1)\|=\|x_2-x_1\|$$

pour tous les points x_1,x_2 de $\mathcal{E}$, ce qui montre que la transformation $V_0(x)$ est isométrique. D'autre part, étant donné un point quelconque y_0 de $\mathcal{E}$, on tire de ce qui précède, que la suite de points $\{x_n\}$, définis par les égalités

$$x_n=V_n^{-1}(y_0) \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{86}$$

contient une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ tendant vers un point x_0 de $\mathcal{E}$.

Il en résulte immédiatement, en tenant compte de (86) et de la convergence uniforme de la suite $\{V_n(x)\}$ dans les ensembles compacts de $\mathcal{E}$, que

$$y_0=\lim_{k\to\infty}V_{n_k}(x_{n_k})=V_0(x_0)\ ^{11)},$$

ce qui montre que l'opération $V_0(x)$ transforme $\mathcal{E}$ tout entier en lui-même.

En somme cette opération est une rotation de l'espace $\mathcal{E}$, c. q. f. d.

A l'aide des propriétés mentionnées du groupe G on déduit, en appliquant la méthode bien connue, la seconde condition demandée.

Les transformations du groupe G satisfaisant aux deux conditions précédentes, on en déduit, d'après la supposition I, que chaque transformation du groupe G est linéaire, c'est-à-dire qu'on a le théorème I dans un cas particulier, ce qui équivaut, comme il l'a été démontré, au cas général de ce théorème.

Bibliographie.

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, Studia Mathematica 10 (1948), p. 184-208.

[3] N. Aronszajn, *Caractérisation métrique de l'espace de Hilbert, des espaces vectoriels et de certains groupes métriques*, Comptes Rendus 201 (1935), p. 811-813.

[4] M. Eidelheit et S. Mazur, *Eine Bemerkung über Räume vom Typus (F)*, Studia Mathematica 7 (1937), p. 159-161.

[5] K. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Wrocław 1948.

11) Voir [5], p. 108-109.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 15. 2. 1952)