Proof of (M-O). Only the sufficiency should be proved.

Suppose that $\omega(x)$, $x(\tau)$, $c(\tau)$ satisfy conditions (1), (2) and (5). Let S be the set of all pairs

$$\Big(x-\sum_{k=1}^{n} t_k\, x(\tau_k), y\Big) \in X\times Y=Z,$$

where

$$y\geqslant \omega(x)-\sum_{k=1}^{n} t_k c(\tau_k),$$

$\tau_1,\dots,\tau_n \in T$, and $t_1,\dots,t_n$ are non-negative real numbers. It follows from (1) and (2) that S is a positive cone viz. the least cone containing all elements $\big(x,\omega(x)\big)$ and $\big(-x(\tau),-c(\tau)\big)$. It follows from (5) that $(0,y)\in S$ implies $y\geqslant 0$. Thus S is proper.

By (B′) there is an additive and homogeneous functional $\xi(x)$ defined on X, such that $\xi(x)\leqslant y$ for $z=(x,y)\in S$. Putting $z=\big(x,\omega(x)\big)$ or $z=\big(-x(\tau), -c(\tau)\big)$ we obtain the inequalities (3) and (4) respectively, q. e. d.

The above proof explains the geometrical sense of (5). The condition (5) is an analytic formulation of the assertion that the positive cone S defined above is proper.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
STATE INSTITUTE OF MATHEMATICS

(Reçu par la Rédaction le 3. 9. 1952)

Sur une formule de Efros

par

L. WŁODARSKI (Łódź).

Introduction. A. M. EFROS[1]) a établi la formule

$$L^{-1}\{v(s)F[q(s)]\}=\int_0^\infty f(\tau)\,L^{-1}\{v(s)\,e^{-\tau q(s)}\}\,d\tau, \tag{1}$$

où F est la transformée de Laplace de f,

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt, \tag{2}$$

et L^{-1} désigne généralement la transformation inverse à celle de Laplace. L'auteur n'a pas précisé les conditions pour f, q et v, dans lesquelles la formule (1) est valable. Or, ces fonctions ne peuvent pas être arbitraires.

Si, par exemple, $q(s)=s$ et $v(s)=1$, l'expression $L^{-1}\{v(s)\,e^{-\tau q(s)}\}$, c'est-à-dire $L^{-1}\{e^{-\tau s}\}$, est dépourvue de sens. En effet, supposons que cette expression soit égale à une fonction $\varphi(t)$. Alors

$$\int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)\,dt=e^{-\tau s}, \tag{3}$$

d'où, en dérivant par rapport à s,

$$-\int_0^\infty e^{-st}\,t\,\varphi(t)\,dt=-\tau e^{-\tau s}. \tag{4}$$

Il vient de (3) et (4)

$$\int_0^\infty e^{-st}(t-\tau)\,\varphi(t)\,dt=0,$$

d'où $\varphi(t)=0$ pour presque tout $t\geqslant 0$, ce qui est en contradiction avec (3).

W. DITKIN et P. KUZNECOV[2]) ont introduit certains restrictions pour les fonctions en question qui rendent la formule

[1]) А. М. Эфрос, *О некоторых применениях операторного исчисления к анализу*, Математический Сборник 42 (1935), p. 699 - 705.

[2]) В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, *Справочник по операционному исчислению*, Москва 1951, p. 62 - 67.

rigoureuse, mais ils ont, en même temps, altéré la formule (1), en introduisant le signe de différentiation d/dt avant l'intégrale du second membre et en modifiant les parties restantes d'une manière convenable.

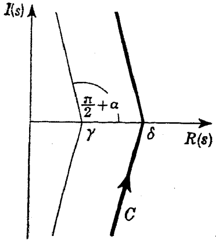

Fig. 1.

Le but de cette note est de donner des conditions suffisantes (§ 2) pour la validité de la formule de Efros dans sa forme originale (1). Cette forme paraît plus commode dans certaines applications.

Nous commencerons (§ 1), en établissant une formule inverse pour la transformation de Laplace, qui nous sera utile dans la suite. A la fin, nous tenons de comparer formule de Efros avec celles de Ditkin et Kuznecov.

§ 1. Supposons qu'une fonction $G(s)$, holomorphe dans un domaine angulaire $|\arg(s-\gamma)|<\pi/2+\alpha$, où γ est réel et $0<\alpha<\pi/2$, satisfasse dans ce domaine à l'inégalité $|G(s)|<M|s|^{-\beta}$, où $M>0$ et $\beta>0$. Alors l'intégrale

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}G(s)\,ds, \tag{5}$$

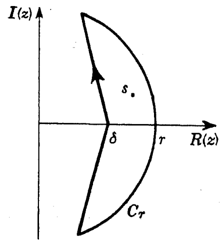

Fig. 2.

prise le long de la ligne $|\arg(s-\delta)|=\pi/2+\alpha$ $(\delta>\gamma)$ est évidemment absolument convergente (Fig. 1).

Nous démontrerons que $G(s)$ *est la transformée de Laplace de* $g(t)$, c'est-à-dire que

$$G(s)=\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt \quad \text{pour} \quad R(s)>\gamma\ ^{3}). \tag{6}$$

Démonstration. Désignons par C_r le contour fermé composé d'une partie de C et d'un arc du cercle $|z|=r$ $(r>\delta)$ situé à droite de C (Fig. 2). Si s se trouve à l'intérieur de ce contour, on a

$$G(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{G(z)}{s-z}\,dz.$$

[3]) $R(s)$ désigne la partie réelle de s.

Si $r\to\infty$, on peut vérifier sans peine que l'intégrale le long de l'arc tend vers zéro. Il s'ensuit que

$$G(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{G(z)}{s-z}\,dz,$$

car la dernière intégrale converge absolument. Si $R(s)>R(z)$, on a

$$\frac{1}{s-z}=\int_0^\infty e^{-st}e^{zt}\,dt,$$

et on peut écrire

$$G(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C G(z)\,dz\int_0^\infty e^{-st}e^{zt}\,dt, \quad \text{où} \quad R(s)>\delta. \tag{7}$$

Or, on a

$$\int_0^\infty |e^{-st}e^{zt}|\,dt=\frac{1}{R(s)-R(z)},$$

ce qui entraîne que l'intégrale (7), entendue comme intégrale double, est absolument convergente. Donc, on peut intervertir dans (7) l'ordre d'intégration, ce qui conduit, en vertu de (5), à la formule (6).

Cette formule a été démontrée pour $R(s)>\delta$, mais elle est encore valable pour $R(s)>\gamma$, car δ peut être choisi arbitrairement proche de γ.

§ 2. Nous allons démontrer maintenant que la formule (1) est valable, en supposant que

1° $\int_0^\infty e^{-\sigma t}|f(t)|\,dt<\infty$ pour un certain $\sigma\geqslant 0$;

2° $q(s)$ est holomorphe dans un domaine angulaire

$$|\arg(s-\gamma)|<\frac{\pi}{2}+\alpha \qquad \left(\gamma>0,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \tag{8}$$

et y satisfait à l'inégalité $R[q(s)]\geqslant\sigma$;

3° $|v(s)|\leqslant M|s|^{-\beta}$ $(M>0,\ \beta>0)$ dans le domaine (8).

Démonstration. On a

$$|v(s)e^{-\tau q(s)}|<M|s|^{-\beta}$$

pour $\tau \geqslant 0$ et s appartenant au domaine (8). Il s'ensuit que

$$L^{-1}\{v(s)\,e^{-\tau q(s)}\} = \frac{1}{2\pi i}\int_C v(s)\,e^{st-\tau q(s)}\,ds \qquad (\tau \geqslant 0), \tag{9}$$

où la courbe C est la même qu'au § 1. En posant (9) dans (1), le second membre de (1) s'écrira comme une intégrale itérée. Or, l'ordre d'intégration peut être changé dans cette intégrale car

$$\int_0^\infty |f(\tau)|\,d\tau\,\frac{1}{2\pi}\left|\int_C |v(s)\,e^{st-\tau q(s)}|\,ds\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-\sigma\tau}|f(\tau)|\,d\tau\,\frac{M}{2\pi}\left|\int_C \frac{e^{tR(s)}}{|s|^\beta}\,ds\right|,$$

ce qui prouve la convergence absolue. Le second membre de (1) est donc égal à l'intégrale itérée

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}\,v(s)\,ds\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-\tau q(s)}\,d\tau,$$

ou bien, en vertu de (2), à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}\,v(s)\,F[q(s)]\,ds.$$

Pour avoir la formule (1), il suffit de remarquer, en vertu du § 1, que l'on a, dans le domaine (8),

$$|v(s)\,F[q(s)]| \leqslant M_1|s|^{-\beta}, \qquad \text{où} \quad M_1 = M\int_0^\infty e^{-\tau\sigma}|f(\tau)|\,d\tau.$$

§ 3. DITKIN et KUZNECOV ont donné la formule suivante:

$$C^{-1}\{u(s)\,F^*[q(s)]\} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty f(\tau)\,C^{-1}\left\{\frac{u(s)\,q(s)}{s}\,e^{-\tau q(s)}\right\}d\tau, \tag{10}$$

où F^* est la transformée de Carson de f,

$$F^*(s) = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt,$$

et C^{-1} désigne généralemant la transformation inverse à celle de Carson. Les conditions adoptées par les auteurs pour f, q et u sont les suivantes:

1° $\int_0^\infty e^{-\sigma t}|f(t)|\,dt < \infty$ pour un certain $\sigma \geqslant 0$;

2° $q(s)$ est holomorphe dans un demi-plan $|\arg(s-\sigma)| < \frac{\pi}{2}$ et y satisfait aux inégalités

$$R[q(s)] \geqslant \sigma \qquad \text{et} \qquad |q(s)| \leqslant M s^{1/2-\beta} \qquad (\beta > 0);$$

3° $u(s)$ est bornée dans le demi-plan considéré;

4° il existe $C^{-1}\{F^*[q(s)]\}$.

En posant $v(s) = u(s)\,q(s)/s$ et introduisant la notation propre à la transformation de Laplace, la formule (10) devient

$$L^{-1}\{v(s)\,F[q(s)]\} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty f(\tau)\,L^{-1}\left\{\frac{v(s)}{s}\,e^{-\tau q(s)}\right\}d\tau; \tag{11}$$

les conditions 1° et 2° ne changent pas ici, cependant la condition 3° est à remplacer par

3°° $|v(s)| \leqslant M|s|^{-1/2-\beta}$.

On voit que l'égalité (1) implique l'égalité (11). En effet, la fonction $v(s)$ satisfaisant à la condition 3° (§ 2), il en est de même du quotient $v(s)/s$; en même temps on a évidemment

$$\frac{d}{dt}L^{-1}\left\{\frac{v(s)}{s}\,F[q(s)]\right\} = L^{-1}\{v(s)\,F[q(s)]\},$$

ce qui donne le résultat demandé.

Posont en particulier dans (1) $v(s) = 1/s^\beta$ $(\beta > 0)$ et $q(s) = s^\theta$ $(0 < \theta < 1)$. Nous obtenons dans ce cas la formule

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\beta}F(s^\theta)\right\} = \int_0^\infty f(\tau)\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\beta}\,e^{-\tau s^\theta}\right\}d\tau. \tag{12}$$

Une formule analogue peut être déduite aussi de la formule (11) de Ditkin et Kuznecov mais seulement pour $\beta > 1/2$ et $0 < \theta < 1/2$.

Enfin nous remarquons que la condition 3° pour $v(s)$ (§ 2) ne peut plus être améliorée en remplaçant β par 0, ce que l'exemple donné au commencement de cette Note met en évidence.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 10. 6. 1952)