et s'il existe une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de classe C^3 vérifiant dans le domaine G les conditions :

$$(1) \quad f_i(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

et y représentant un objet géométrique du type K^1 , alors la fonction $Q(x, \xi)$, à l'aide de laquelle est donnée la règle de transformation des objets $x_1, \dots, x_n$, peut être écrite dans le domaine D sous la forme

$$(2) \quad Q(x, \xi) = A\{\Theta(\xi)L(x) + \Phi(\xi)\},$$

où A, Θ, L et Φ sont fonctions d'une variable.

Démonstration. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des composantes de n objets géométriques du type $K^{2,2}$, de même règle de transformation donnée par la fonction $Q(x, \xi)$, alors toute fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ de classe C^2 vérifiant au point $(x_1, \dots, x_n)$ les conditions (1) et représentant un objet géométrique du type K^1 , satisfait pour toutes les valeurs de ξ dans le voisinage du point $(x_1, \dots, x_n)$ le système d'équations :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n g_i^{ik}(x_1, \dots, x_n) \lambda(x_i, \xi) + g^{ik}(x_1, \dots, x_n) [\lambda_1(x_i, \xi) - \lambda_1(x_k, \xi)] = 0$$

$$(i, k=1, 2, \dots, n),$$

où

$$(4) \quad g^{ik}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{f_k(x_1, \dots, x_n)},$$

$$(5) \quad \lambda(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} a_2(x, \xi, \xi), \quad a(x, \xi, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} q[Q(x, \xi), \xi].$$

En effet, la fonction qui représente un objet géométrique du type K^1 vérifie l'identité

$$f[a(x_1, \xi, \xi), \dots, a(x_n, \xi, \xi)] \equiv b[f(x_1, \dots, x_n), \xi, \xi],$$

la fonction du membre droit

$$b(x, \xi, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} p[P(x, \xi, \xi)]$$

étant différentiable. En différentiant les deux membres de cette identité par rapport à x et x_k on a :

$$(6) \quad a_1(x_i, \xi, \xi) f_i[a(x_1, \xi, \xi), \dots, a(x_n, \xi, \xi)] = b_1[f(x_1, \dots, x_n), \xi, \xi] f_i(x_1, \dots, x_n),$$

$$a_1(x_k, \xi, \xi) f_k[a(x_1, \xi, \xi), \dots, a(x_n, \xi, \xi)] = b_1[f(x_1, \dots, x_n), \xi, \xi] f_k(x_1, \dots, x_n).$$

²⁾ Il suffit de supposer, que la fonction $a(x, \xi, \xi)$ ait les dérivées a_{12} et a_{21} continues.

Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_1

par H. PIDEK (Wrocław)

Dans mon travail¹⁾ j'examinais un problème de l'algèbre des objets géométriques du type K , c'est-à-dire des objets géométriques de la classe zéro à une composante dans l'espace à une dimension X_1 . Ce problème était le suivant : l'expression $f(x_1, \dots, x_n)$ représente-t-elle un objet du type K , si l'on suppose $x_1, x_2, \dots, x_n$ être les composantes de n objets du type K assujettis à la même règle de transformation et f une fonction arbitraire de n variables ?

Je l'ai résolu dans le travail¹⁾ pour les cas $n=1$ et $n=2$. Ici je traite-rai du cas général.

Dans toutes les considérations ultérieures nous désignerons brièvement par $F_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ la dérivée partielle de la fonction $F(u_1, \dots, u_n)$ par rapport à la variable u_i , c'est-à-dire $F_i = \partial F / \partial u_i$. Si F est une fonction inversible d'une variable, le symbole F^{-1} désignera la fonction inverse. Les symboles D et G désigneront respectivement le domaine de points (x, ξ) déterminé par les inégalités :

$$-\infty < \xi < \infty, \quad a \leq x \leq b,$$

et le domaine de points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ déterminé par les inégalités :

$$a \leq x_i \leq b \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

En outre nous désignerons par K^i l'ensemble de tous les objets du type K , dont la règle de transformation est caractérisée par la fonction $a(x, \xi, \xi)$ de classe C^1 par rapport à toutes les variables.

Nous allons démontrer les propositions suivantes :

PROPOSITION 1. Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) désignent les composantes de n objets géométriques du type K^3 assujettis à la même règle de transformation

¹⁾ H. Pidek, Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1952-3), p. 111-128.

De la supposition (1), on a que $f_k(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. D'autre part en vertu de sa continuité, la fonction sera différente de zéro dans un voisinage du point $(x_1, \dots, x_n)$. Puisque la fonction $a(x, \xi, \bar{\xi})$ est continue et $a(x, \xi, \bar{\xi}) \equiv x$, on a pour les ξ et $\bar{\xi}$ suffisamment voisins entre eux

$$f_k[a(x_1, \xi, \bar{\xi}), \dots, a(x_n, \xi, \bar{\xi})] \neq 0.$$

On peut donc éliminer des équations (6) la fonction b_1 , et, en tenant compte de la définition (4), réécrire le résultat obtenu sous la forme:

$$g^{ik}[a(x_1, \xi, \bar{\xi}), \dots] a_1(x_i, \xi, \bar{\xi}) = g^{ik}(x_1, \dots) a_1(x_k, \xi, \bar{\xi}).$$

Les fonctions g^{ik} étant différentiables, différencions cette relation par rapport à ξ ; on aura:

$$\sum_{i=1}^n g_i^{ik}[a(x_1, \xi, \bar{\xi}), \dots] a_1(x_i, \xi, \bar{\xi}) a_2(x_i, \xi, \bar{\xi}) + g^{ik}[a(x_1, \xi, \bar{\xi}), \dots] a_{12}(x_i, \xi, \bar{\xi}) = g^{ik}(x_1, \dots) a_{12}(x_k, \xi, \bar{\xi}).$$

Posons dans l'identité obtenue $\xi = \bar{\xi}$ en remarquant que la différentiation de l'identité $a(x, \xi, \bar{\xi}) \equiv x$ donne:

$$a_1(x, \xi, \bar{\xi}) = 1.$$

Il suffit de prendre en considération la définition (5) pour arriver aux équations (3); le lemme est ainsi démontré.

Il s'ensuit du lemme, que lorsque la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ satisfait aux suppositions de la proposition, elle vérifie le système d'équations (3) en chaque point du domaine G et pour toutes les valeurs de ξ . Les fonctions qui figurent dans ces équations étant différentiables, on aura en passant aux dérivées par rapport à x_i et en posant ensuite $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$:

$$(7) \quad \lambda(x, \xi) \sum_{i=1}^n g_i^{ik}(x, \dots, x) + \lambda_1(x, \xi) g_i^{ik}(x, \dots, x) + g^{ik}(x, \dots, x) \lambda_{11}(x, \xi) = 0.$$

Supposons, que $\lambda(x, \xi)$ ne soit pas identiquement égale à zéro dans le domaine D ³⁾. Remarquons, que la fonction $g^{ik}(x, \dots, x)$ est constante dans l'intervalle Δ faisant partie du voisinage du point x_0 , pour lequel la fonction $\lambda(x_0, \xi)$ n'est pas nulle pour une certaine valeur ξ_0 . En effet, en posant dans l'équation (3) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, on obtient:

$$\lambda(x, \xi) \sum_{i=1}^n g_i^{ik}(x, \dots, x) = 0,$$

³⁾ Si $\lambda(x, \xi) = 0$, l'objet considéré est un scalaire.

d'où

$$\sum_{i=1}^n g_i^{ik} \equiv 0$$

dans l'intervalle considéré Δ . Puisque

$$\sum_{i=1}^n g_i^{ik}(x, \dots, x) = \frac{d}{dx} g^{ik}(x, \dots, x),$$

on aura

$$(8) \quad g^{ik}(x, \dots, x) \equiv \text{const} = c^{ik} \quad \text{dans } \Delta,$$

et en raison de la supposition (1) et de la définition (4) on devra avoir $c^{ik} \neq 0$; remarquons en outre, que

$$\sum_{i=1}^n g_i^{ik}(x, \dots, x) = \frac{d}{dx} g^{ik}(x, \dots, x).$$

Fixons pour le moment les indices i, k et désignons par $u(x)$ la fonction

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c^{ik}} \int_{x_0}^x g_i^{ik}(x, \dots, x) dx.$$

L'équation (7) prendra alors la forme:

$$u''(x) \lambda(x, \xi) + u'(x) \lambda_1(x, \xi) + \lambda_{11}(x, \xi) = 0.$$

Cette équation est identique à l'équation (3.15) du travail¹⁾, suivant les résultats y obtenus on voit, que notre proposition est démontrée.

PROPOSITION 2. Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite dans le domaine D sous la forme (2), les fonctions Φ, Θ sont de classe C^1 , et L de classe C^2 , Φ et Θ étant pas linéairement indépendantes ⁴⁾ alors chaque fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ de classe C^2 représentant un objet géométrique du type K^1 et vérifiant en chaque point $(x_1, \dots, x_n)$ de G les conditions (1) peut être écrite dans le domaine G sous la forme

$$(9) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \Psi \left\{ \sum_{i=1}^n \gamma_i L(x_i) \right\}.$$

Démonstration. Il s'ensuit des suppositions et du lemme, que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ doit vérifier dans le domaine G le système d'équations (3) pour toutes les valeurs de ξ . Pour la fonction $Q(x, \xi)$ de forme (2), on aura, en vertu des suppositions:

⁴⁾ Si les fonctions Θ et Φ sont linéairement dépendantes, la fonction Q peut être écrite sous la forme (17).

$$\lambda(x, \xi) = \frac{L(x)\Theta'(\xi) + \Phi'(\xi)}{L'(x)\Theta(\xi)}, \quad \lambda_1(x, \xi) = \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} - \frac{L''(x)}{L'(x)}\lambda(x, \xi)$$

et les équations (3) prendront la forme:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n g_i^{ik} \frac{L(x_i)}{L'(x_i)} + g^{ik} \left[\frac{L''(x_k)L(x_k)}{L'^2(x_k)} - \frac{L''(x_i)L(x_i)}{L'^2(x_i)} \right] \right\} \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} + \left\{ \sum_{i=1}^n g_i^{ik} \frac{1}{L'(x_i)} + g^{ik} \left[\frac{L''(x_k)}{L'^2(x_k)} - \frac{L''(x_i)}{L'^2(x_i)} \right] \right\} \frac{\Phi'(\xi)}{\Theta(\xi)} = 0.$$

Les fonctions Φ et Θ étant linéairement indépendantes, la fonction g^{ik} doit vérifier les deux équations:

$$(10') \quad \sum_{i=1}^n g_i^{ik} \frac{1}{L'(x_i)} + g^{ik} \left[\frac{L''(x_k)}{L'^2(x_k)} - \frac{L''(x_i)}{L'^2(x_i)} \right] = 0,$$

$$(10'') \quad \sum_{i=1}^n g_i^{ik} \frac{L(x_i)}{L'(x_i)} + g^{ik} \left[\frac{L''(x_k)L(x_k)}{L'^2(x_k)} - \frac{L''(x_i)L(x_i)}{L'^2(x_i)} \right] = 0.$$

Considérons l'équation (10'). Leurs caractéristiques satisfont au système d'équations:

$$L'(x_1)dx_1 = L'(x_2)dx_2 = \dots = L'(x_n)dx_n = \frac{dg^{ik}}{\frac{L''(x_i)}{L'^2(x_i)} - \frac{L''(x_k)}{L'^2(x_k)}}.$$

Les fonctions

$$L(x_1) - L(x_2), \quad L(x_2) - L(x_3), \quad \dots, \quad L(x_{n-1}) - L(x_n), \quad g^{ik} \frac{L'(x_k)}{L'(x_i)}$$

sont les intégrales premières de ce système, donc les surfaces intégrales de l'équation (10') ont la forme:

$$G^{ik} \left\{ L(x_1) - L(x_2), \dots, L(x_{n-1}) - L(x_n), g^{ik} \frac{L'(x_k)}{L'(x_i)} \right\} = 0,$$

d'où on a:

$$(11') \quad g^{ik} = \frac{L'(x_i)}{L'(x_k)} \Gamma^{ik} \{ L(x_1) - L(x_2), \dots, L(x_{n-1}) - L(x_n) \}$$

où Γ^{ik} est une fonction arbitraire de $n-1$ variables.

Remarquons, que l'équation (10'') peut être réécrite sous la forme:

$$\sum_{i=1}^n g_i^{ik} \frac{1}{[\ln L(x_i)]'} + g^{ik} \left[\frac{[\ln L(x_k)]''}{[\ln L(x_k)]'^2} - \frac{[\ln L(x_i)]''}{[\ln L(x_i)]'^2} \right] = 0.$$

De là, on voit que l'équation (10'') est semblable à l'équation (10'), mais qu'au lieu de la fonction $L(x)$ on a la fonction $\ln L(x)$. Il en résulte, que la solution générale de l'équation (10'') est la fonction:

$$g^{ik}(x_1, \dots, x_n) = \frac{L'(x_i)}{L'(x_k)} \cdot \frac{L(x_k)}{L(x_i)} \bar{A}^{ik} \left\{ \ln \frac{L(x_1)}{L(x_2)}, \dots, \ln \frac{L(x_{n-1})}{L(x_n)} \right\}$$

avec la fonction $\bar{A}^{ik}$ arbitraire, ce qui peut être réécrit sous la forme:

$$(11'') \quad g^{ik}(x_1, \dots, x_n) = \frac{L'(x_i)}{L'(x_k)} \bar{A}^{ik} \left\{ \frac{L(x_1)}{L(x_2)}, \dots, \frac{L(x_{n-1})}{L(x_n)} \right\}$$

où $\bar{A}^{ik}$ est fonction arbitraire de $n-1$ variables.

Comparant les formules (11') et (11'') on voit, que les fonctions Γ^{ik} et $\bar{A}^{ik}$ doivent satisfaire, dans le domaine G , à l'identité suivante:

$$(12) \quad \Gamma^{ik} \{ L(x_1) - L(x_2), \dots \} \equiv \bar{A}^{ik} \left\{ \frac{L(x_1)}{L(x_2)}, \dots \right\}.$$

Avec le changement des variables

$$u_i = L(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

le domaine G se transforme en G' . Dans le domaine G' l'identité (12) prend la forme suivante:

$$\Gamma^{ik}(u_1 - u_2, \dots) \equiv \bar{A}^{ik} \left(\frac{u_1}{u_2}, \dots \right).$$

La fonction $\Gamma^{ik}(u_1 - u_2, \dots)$ est constante le long de chaque droite de la famille:

$$(13') \quad u_1 - u_2 = c^{12}, \quad \dots, \quad u_{n-1} - u_n = c^{n-1,n};$$

d'autre part, la fonction $\bar{A}^{ik} \left(\frac{u_1}{u_2}, \dots \right)$ est évidemment constante le long de chaque droite de la famille:

$$(13'') \quad \frac{u_1}{u_2} = a^{12}, \quad \dots, \quad \frac{u_{n-1}}{u_n} = a^{n-1,n}.$$

La fonction constante le long de chaque droite de deux familles (13') et (13'') doit être constante dans tout le domaine considéré, c'est-à-dire:

$$\Gamma^{ik}(u_1 - u_2, \dots) \equiv A^{ik} \left(\frac{u_1}{u_2}, \dots \right) = \text{const} = \gamma^{ik}.$$

La fonction g^{ik} peut être donc écrite sous la forme suivante:

$$g^{ik}(x_1, \dots) = \gamma^{ik} \frac{L'(x_i)}{L'(x_k)}.$$

Revenant à la définition (4), en obtient, pour la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$, le système d'équations:

$$(14) \quad \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_i)} = \gamma^{ik} \frac{f_k(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_k)} \quad (i, k=1, 2, \dots, n).$$

Considérons une équation de ce système, par exemple celle qu'on obtient en fixant $k=1$, $i=2$:

$$\frac{f_2(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_2)} = \gamma^{21} \frac{f_1(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_1)}.$$

Les caractéristiques de cette équation vérifient le système d'équations:

$$\gamma^{21} L'(x_2) dx_2 + L'(x_1) dx_1 = dx_3 = \dots = dx_n = 0,$$

ce qui peut être réécrit sous la forme équivalente:

$$(15) \quad L'(x_1) dx_1 + \gamma^{21} L'(x_2) dx_2 + \dots + \gamma^{n1} L'(x_n) dx_n = dx_3 = \dots = dx_n = 0.$$

Les intégrales premières de ce système sont les fonctions:

$$L(x_1) + \gamma^{21} L(x_2) + \dots + \gamma^{n1} L(x_n), x_3, x_4, \dots, x_n;$$

la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ peut donc être écrite sous la forme:

$$(16) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \Psi \{ L(x_1) + \gamma^{21} L(x_2) + \dots + \gamma^{n1} L(x_n), x_3, \dots, x_n \},$$

où Ψ est une fonction arbitraire de $n-1$ variables.

Considérons maintenant celle des équations (14) qui correspond aux indices $k=1$, $i>2$. En profitant de la formule (16) on a:

$$\Psi_1 \{ L(x_1) + \dots, x_3, \dots, x_n \} \gamma^{i1} + \Psi_{i-1} \{ L(x_1) + \dots, x_3, \dots, x_n \} \frac{1}{L'(x_i)}$$

$$= \Psi_1 \{ L(x_1) + \dots, x_3, \dots, x_n \} \gamma^{i1}$$

d'où suit:

$$\Psi_{i-1} \{ L(x_1) + \dots, x_3, \dots, x_n \} \equiv 0 \quad \text{pour } i=3, 4, \dots, n.$$

Puisque les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont indépendantes, il résulte de l'identité dernière que $\Psi_k(u_1, \dots, u_{n-1}) = 0$ pour $k=2, 3, \dots, n$, et, par suite, la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ est de la forme (9). La proposition est ainsi démontrée.

PROPOSITION 3. Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite dans le domaine D sous la forme

$$(17) \quad Q(x, \xi) = A \{ L(x) + \Phi(\xi) \},$$

si en plus la fonction Φ est de classe C^1 , et L de classe C^2 , la fonction Φ n'étant pas identiquement constante⁵⁾, alors toute fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ de classe C^2 représentant un objet géométrique du type K^1 et vérifiant dans le domaine G les conditions (1) et les conditions:

$$(18') \quad \sum_{i=1}^n \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_i)} \neq 0$$

ou

$$(18'') \quad \sum_{i=1}^n \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_n)} \equiv 0$$

peut être écrite dans le domaine G sous la forme:

$$(19) \quad f(x_1, \dots, x_i) = \Psi \left\{ \sum_{i=1}^n \gamma_i L(x_i) + \chi [L(x_1) - L(x_2), L(x_2) - L(x_3), \dots, L(x_{n-1}) - L(x_n)] \right\}.$$

Démonstration. Les suppositions de régularité étant satisfaites il s'ensuit du lemme que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ doit satisfaire au système d'équations (3) dans tout le domaine G et pour tous les ξ . Pour la fonction $Q(x, \xi)$ donnée par la formule (17), on a:

$$\lambda(x, \xi) = \frac{\Phi'(\xi)}{L'(x)}, \quad \lambda_1(x, \xi) = -\frac{\Phi'(\xi) L''(x)}{L'^2(x)}$$

et le système (3) prend la forme:

$$\Phi'(\xi) \left\{ \sum_{i=1}^n g_i^{ik} \frac{1}{L'(x_i)} + g^{ik} \left[\frac{L''(x_k)}{L'^2(x_k)} - \frac{L''(x_i)}{L'^2(x_i)} \right] \right\} = 0.$$

Ce système est vérifié pour tous les ξ . Puisque $\Phi'(\xi) \neq 0$ en vertu de la supposition, les fonctions g^{ik} doivent vérifier les équations:

$$\sum_{i=1}^n g_i^{ik} \frac{1}{L'(x_i)} + g^{ik} \left[\frac{L''(x_k)}{L'^2(x_k)} - \frac{L''(x_i)}{L'^2(x_i)} \right] = 0.$$

⁵⁾ Si la fonction Φ est constante, l'objet géométrique est un scalaire.

Ces équations sont identiques avec le système (10'); les fonctions g^{ik} sont donc données par les formules (11'). Revenant à la définition (4) on obtient pour la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ le système d'équations suivantes:

$$(20) \quad \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_i)} = \frac{f_k(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_k)} \Gamma^{ik} \{L(x_1) - L(x_2), \dots\} \quad (i, k=1, 2, \dots, n).$$

Considérons les $n-1$ équations de ce système qui s'obtiennent en fixant $k=n$. Avec la désignation $\Gamma^i \stackrel{\text{dt}}{=} \Gamma^{in}$ ces équations prennent la forme:

$$(21) \quad \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_i)} = \Gamma^i \{L(x_1) - L(x_2), \dots\} \frac{f_n(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_n)} \quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

Afin de résoudre ce système faisons le changement des variables:

$$u_i = L(x_i) - L(x_{i+1}) \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad u_n = L(x_n),$$

après quoi la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ se transformera en $F(u_1, \dots, u_n)$, les fonctions f et F étant jointes par l'identité:

$$(22) \quad F[L(x_1) - L(x_2), \dots, L(x_{n-1}) - L(x_n), L(x_n)] \equiv f(x_1, \dots, x_n).$$

En profitant de cette identité on calcule facilement:

$$\frac{f_1(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_1)} = F_1(u_1, \dots, u_n),$$

$$\frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{L'(x_i)} = F_i(u_1, \dots, u_n) - F_{i-1}(u_1, \dots, u_n) \quad (i=2, 3, \dots, n).$$

Avec ces formules le système (21) prendra la forme:

$$F_1(u_1, \dots, u_n) = \Gamma^1(u_1, \dots, u_{n-1}) [F_n(u_1, \dots, u_n) - F_{n-1}(u_1, \dots, u_n)],$$

$$F_i(u_1, \dots, u_n) = F_{i-1}(u_1, \dots, u_n)$$

$$+ \Gamma^i(u_1, \dots, u_{n-1}) [F_n(u_1, \dots, u_n) - F_{n-1}(u_1, \dots, u_n)] \quad (i=2, 3, \dots, n-1).$$

Ce système peut être réécrit facilement sous la forme équivalente suivante:

$$(23) \quad \begin{aligned} F_1 &= \Gamma^1(F_n - F_{n-1}), \\ F_2 &= (\Gamma^1 + \Gamma^2)(F_n - F_{n-1}), \\ &\dots \dots \dots \\ F_{n-1} &= (\Gamma^1 + \Gamma^2 + \dots + \Gamma^{n-1})(F_n - F_{n-1}). \end{aligned}$$

Puisque de la formule (21) on a:

$$1 + \sum_{i=1}^n \Gamma^i = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{L'(x_i)} \cdot \frac{L'(x_n)}{f_n},$$

il résulte de la condition (18) que $1 + \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma^i \neq 0$ ou $1 + \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma^i \equiv 0$ dans le domaine G . Considérons d'abord le cas (18'). De la dernière équation du système, (23) on obtient alors:

$$F_{n-1} = F_n \frac{\Gamma^1 + \dots + \Gamma^{n-1}}{1 + \Gamma^1 + \dots + \Gamma^{n-1}}$$

et le système peut être réécrit sous la forme:

$$(24) \quad \begin{aligned} F_1 &= F_n \frac{\Gamma^1}{1 + \Gamma^1 + \dots + \Gamma^{n-1}}, \\ &\dots \dots \dots \\ F_{n-1} &= F_n \frac{\Gamma^1 + \dots + \Gamma^{n-1}}{1 + \Gamma^1 + \dots + \Gamma^{n-1}}. \end{aligned}$$

En introduisant la désignation

$$\chi^i \stackrel{\text{dt}}{=} \frac{\Gamma^1 + \dots + \Gamma^i}{1 + \Gamma^1 + \dots + \Gamma^{n-1}} \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

le système (24) prend la forme suivante:

$$(25) \quad F_i = F_n \cdot \chi^i \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

où les fonctions χ^i sont différentiables. Considérons, dans quelles conditions ce système est résoluble. En fixant les indices i et k prenons les équations

$$(26) \quad F_k = F_n \chi^k, \quad F_i = F_n \chi^i$$

et différencions la première par rapport à la variable u_i , la deuxième par rapport à u_k :

$$(27) \quad F_{ki} = F_{ni} \chi^k + F_n \chi_{ki}^k, \quad F_{ik} = F_{nk} \chi^i + F_n \chi_{ik}^i.$$

En différenciant les équations (24) par rapport à u_n (n'oubliant pas, que les fonctions χ^i ne dépendent pas de la variable u_n) on obtient:

$$F_{ni} = F_{nn} \chi^i, \quad F_{nk} = F_{nn} \chi^k.$$

En tenant compte de ces relations il s'ensuit des équations (27) que $F_n \chi_i^k = F_n \chi_k^i$; puisque, en vertu de nos suppositions, $F_n \neq 0$, on a

$$(28) \quad \chi_i^k = \chi_k^i.$$

Ces relations montrent qu'il existe une fonction $\chi(u_1, \dots, u_{n-1})$ telle que

$$\chi_i(u_1, \dots, u_{n-1}) = \chi^i(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

En profitant de ces relations, considérons la première des équations (25):

$$F_1 = F_n \chi_1.$$

Les caractéristiques de cette équation vérifient le système

$$\chi_1 du_1 + du_n = 0, \quad du_2 = du_3 = \dots = du_{n-1} = 0.$$

L'intégrale générale peut être écrite sous la forme:

$$F(u_1, \dots, u_n) = \Psi\{u_n + \chi(u_1, \dots, u_{n-1}), u_2, \dots, u_{n-1}\},$$

où Ψ est une fonction arbitraire de $n-1$ variables. En revenant aux équations (25) on obtient, en tenant compte de (28):

$$\begin{aligned} \Psi_1\{u_n + \chi, u_2, \dots, u_{n-1}\} \chi_i + \Psi_i\{u_n + \chi, u_2, \dots, u_{n-1}\} \\ = \chi_i \Psi_1\{u_n + \chi, u_2, \dots, u_{n-1}\} \quad (i=2, 3, \dots, n-1), \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\Psi_i\{u_n + \chi, u_2, \dots, u_{n-1}\} \equiv 0 \quad (i=2, 3, \dots, n-1),$$

et ensuite:

$$\Psi_i\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \equiv 0 \quad (i=2, 3, \dots, n-1)$$

puisque les variables u_i sont indépendantes. La solution générale du système (25) est donc de la forme:

$$F(u_1, \dots, u_n) = \Psi\{u_n + \chi(u_1, \dots, u_n)\}$$

où Ψ est une fonction arbitraire d'une variable. En tenant compte de (22) on voit, que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ peut être écrite comme suit:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Psi\{L(x_n) + \chi[L(x_1) - L(x_2), \dots]\}.$$

Cette formule montre, que la fonction f est de la forme (19) avec $\gamma_n = 1$ et $\gamma_i = 0$ ($i \neq n$).

Si (18"), il résulte de la dernière équation du système (23) que $F_n \equiv 0$. On a alors:

$$F(u_1, \dots, u_n) = \chi(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

En profitant de la formule (22) on obtient

$$f(x_1, \dots, x_n) = \chi\{L(x_1) - L(x_2), \dots\}$$

ce qui montre, que la fonction f est de la forme (19) avec $\gamma_i = 0$. La proposition est ainsi démontrée.

PROPOSITION 4. I. Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite dans le domaine D sous la forme (2), alors toute fonction de la forme (9) avec la fonction Ψ inversible représente un objet géométrique du type K , dont la règle de transformation est donnée par la fonction:

$$(29) \quad P(x, \xi) = \Pi\left\{\Theta(\xi) \Psi^{-1}(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Phi(\xi)\right\};$$

II. Si la fonction $Q(x, \xi)$ peut être écrite dans le domaine D sous la forme (17), alors toute fonction de la forme (19) avec la fonction Ψ inversible, représente un objet géométrique du type K , dont la règle de transformation est donnée par la fonction:

$$(30) \quad P(x, \xi) = \Pi\left\{\Psi^{-1}(x) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Phi(\xi)\right\}.$$

Démonstration. I. Supposons $Q(x, \xi)$ être de la forme (2). On a alors:

$$q(\zeta, \xi) = L^{-1}\left\{\frac{A^{-1}(\zeta) - \Phi(\xi)}{\Theta(\xi)}\right\}.$$

Pour que la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ soit un objet du type K , il faut et il suffit qu'il existe une fonction $P_0(x, \xi)$ qui soit constante le long des courbes:

$$(31) \quad x = f\{q[c_1, \xi], \dots, q[c_n, \xi]\},$$

(les équations (1.3) du travail¹⁾). Pour la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ de la forme (9) l'équation (31) prend la forme:

$$x = \left\{\Psi \sum \gamma_i \frac{A^{-1}(c_i) - \Phi(\xi)}{\Theta(\xi)}\right\} = \left\{\frac{c - \Phi(\xi) \sum \gamma_i}{\Theta(\xi)}\right\},$$

où $c \stackrel{\text{def}}{=} \sum \gamma_i A^{-1}(c_i)$, ce qui peut être réécrit sous la forme:

$$c = \Psi^{-1}(x) \Theta(\xi) + \Phi(\xi) \sum \gamma_i.$$

La fonction $P_0(x, \xi) = \Theta(\xi) \Psi^{-1}(x) - \Phi(\xi) \sum \gamma_i$ est évidemment constante le long des courbes considérées; il en résulte, que les fonctions (9) représentent des objets du type K et que les fonctions (29) donnent leur règle de transformation.

II. Supposons $Q(x, \xi)$ être de la forme (17). On a alors:

$$q(\zeta, \xi) = L^{-1} \{A^{-1}(\zeta) - \Phi(\xi)\}.$$

Pour les fonctions de la forme (19) l'équation (31) prend la forme:

$$x = \left\{ \sum \gamma_i [A^{-1}(c_i) - \Phi(\xi)] + \chi [A^{-1}(c_1) - A^{-1}(c_2), \dots] \right\} = \Psi[c - \Phi(\xi) \sum \gamma_i]$$

où $c \stackrel{\text{df}}{=} \sum \gamma_i A^{-1}(c_i) + \chi [A^{-1}(c_1) - A^{-1}(c_2), \dots]$, ce qui peut être récrit comme suit:

$$c = \Psi^{-1}(x) + \Phi(\xi) \sum \gamma_i.$$

La fonction $P_0(x, \xi) = \Psi^{-1}(x) + \Phi(\xi) \sum \gamma_i$ est évidemment constante le long des courbes considérées. Les fonctions (19) représentent donc des objets du type K et les fonctions (30) donnent leur règle de transformation, c. q. f. d.

Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_m

par H. PIDEK (Wrocław)

Dans mes travaux [1] et [2] j'énonçai quelques théorèmes concernant l'algèbre des objets géométriques de la classe zéro à une composante dans l'espace à une dimension X_1 . Ici je considère les objets géométriques de la classe zéro à une composante dans l'espace à m dimensions X_m . L'ensemble de ces objets sera désigné brièvement par K .

Si nous désignons par $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ et $(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m)$ les coordonnées du point courant de l'espace X_m dans deux systèmes de coordonnées quelconques B et $\bar{B}$, alors, comme il suit du travail de S. Gołąb [3], on a entre les composantes x et $\bar{x}$ d'un objet donné du type K la relation de transformation:

$$(1) \quad x = q[Q(x, \xi_1, \dots, \xi_m), \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m]$$

où $Q(x, \xi_1, \dots, \xi_m)$ est une fonction arbitraire ayant les propriétés suivantes:

(a) $Q(x, \xi_1, \dots, \xi_m)$ est déterminée pour $-\infty < \xi_i < \infty$ ($i=1, 2, \dots, m$) et pour les x d'un intervalle (a, b) (fini ou infini) caractérisant le champ de variation de la composante de l'objet;

(b) $Q(x, \xi_1, \dots, \xi_m)$ doit être inversible par rapport à la variable x , la fonction $q(\zeta, \xi_1, \dots, \xi_m)$ étant son inverse.

Introduisons la fonction $a(x, \xi, \dots, \bar{\xi}_1, \dots)$:

$$(2) \quad a(x, \xi_1, \dots, \xi_m, \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m) \stackrel{\text{df}}{=} q[Q(x, \xi_1, \dots, \xi_m), \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m].$$

Nous désignerons par K^i l'ensemble des objets du type K , dont la règle de transformation est caractérisée par la fonction $a(x, \xi_1, \dots, \bar{\xi}_1, \dots)$ de classe C^i . En outre nous désignerons par D et G les domaines suivants:

D — le domaine de points $(x, \xi_1, \dots, \xi_m)$ déterminé par les inégalités:

$$-\infty < \xi_i < \infty, \quad a \leq x \leq b \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

G — le domaine de points $(x_1, \dots, x_n)$ déterminé par les inégalités:

$$a \leq x_i \leq b \quad (i=1, 2, \dots, n).$$