Sur l'équation intégrale non linéaire de seconde espèce à forte singularité

par W. Pogorzelski (Warszawa)

Nous appelons équation intégrale non linéaire de seconde espèce à forte singularité l'équation de la forme

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^a N(x,y)F[x,y,\varphi(y)]\,dy \tag{1}$$

avec $\varphi(x)$ comme fonction inconnue dans l'intervalle $(0,a)$; le noyau singulier $N(x,y)$ ayant la forme

$$N(x,y)=P(x,y)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)+Q(x,y) \tag{2}$$

et l'intégrale le long du segment réel $(0,a)$ ayant la valeur principale de Cauchy:

$$\int_0^a NF\,dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{x-\varepsilon} NF\,dy+\int_{x+\varepsilon}^a NF\,dy\right]\qquad (0<x<a).$$

Admettons pour les fonctions données $f(x), P(x,y), Q(x,y), F(x,y,u)$ les propriétés suivantes.

1. Les fonctions $f(x), P(x,y), Q(x,y)$ sont déterminées et holomorphes lorsque les points x, y sont situés à l'intérieur d'une bande $\bar{D}$ qui contient en son intérieur une bande D limitée par deux parallèles encadrant l'axe réel Ox. En outre, ces fonctions ont une période réelle a par rapport à la variable x et variable y.

2. La fonction $F(x,y,u)$ est déterminée et holomorphe lorsque les points x,y sont situés à l'intérieur de la bande $\bar{D}$ et le point u dans un domaine contenant en son intérieur le cercle

$$|u|\leqslant R. \tag{3}$$

En outre, supposons qu'elle admette la période a par rapport aux variables x et y.

Soit M la borne supérieure du module de la fonction F:

$$|F(x,y,u)|\leqslant M \tag{4}$$

pour $x\in D, y\in D, |u|\leqslant R$ et m la borne supérieure du module de la fonction $f(x)$ dans D:

$$|f(x)|\leqslant m. \tag{5}$$

On suppose que

$$m<R. \tag{6}$$

Remarquons que l'équation intégrale non linéaire de la forme

$$\int_0^a N(x,y)F[x,y,\varphi(y)]\,dy=f(x)$$

avec le noyau singulier N (que nous appelons équation de *première espèce*) peut être régularisée, c'est-à-dire remplacée par une équation intégrale équivalente sans singularité à l'aide d'une transformation de H. Poincaré[1]).

L'équation (1) de *seconde espèce* ne peut pas être régularisée. Nous la résolvons par l'application directe de la méthode des approximations successives et nous démontrons l'existence d'une solution holomorphe et unique pour des valeurs du paramètre λ suffisamment petites en module.

Soit un rectangle $A_1B_1B_1'A_1'A_1$ à l'intérieur de la bande D, dont les côtés A_1B_1 et $A_1'B_1'$ se trouvent de part et d'autre du segment réel $(0,a)$ et lui sont parallèles. Soit à l'intérieur de ce rectangle deux suites de segments parallèles

$$\begin{gathered}(A_1B_1),\ldots,(A_nB_n),(A_{n+1}B_{n+1}),\ldots\to(AB),\\(A_1'B_1'),\ldots,(A_n'B_n'),(A_{n+1}'B_{n+1}'),\ldots\to(A'B')\end{gathered} \tag{7}$$

situées de part et d'autre du segment $(0,a)$. Elles s'approchent de l'axe Ox ($|OA_{n+1}|<|OA_n|, |OA_{n+1}'|<|OA_n'|$) et tendent respectivement vers les segments (AB) et $(A'B')$ parallèles à l'axe Ox et situés de part et d'autre de cet axe (voir fig. 1, p. 140).

Considérons maintenant une suite de fonctions

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \varphi_{n+1}(x),\ \ldots \tag{8}$$

[1]) Voir [1] et [2].

définies par la relation de récurrence

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\frac{1}{2}\lambda\int_{C_1}N(x,y)F[x,y,\varphi_n(y)]dy \tag{9}$$

$$(C_1=A_{n+1}B_{n+1}+A'_{n+1}B'_{n+1})$$

$\varphi_1(x)$ étant une fonction arbitraire de période a, holomorphe dans la bande D et satisfaisant à la condition

$$|\varphi_1(x)|\leqslant R. \tag{10}$$

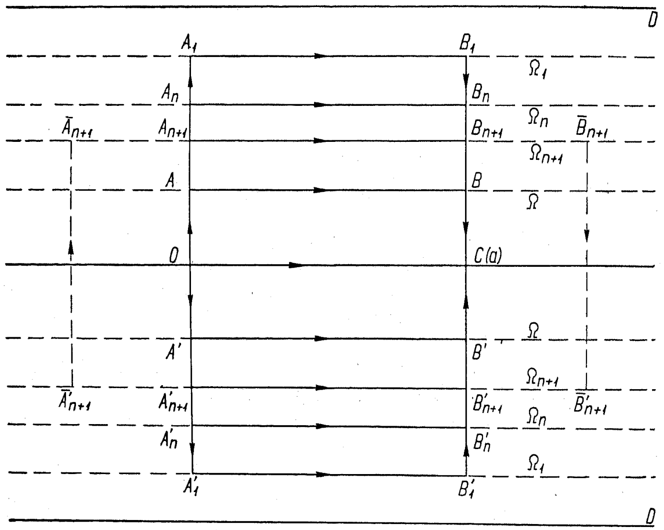

Fig. 1

Supposons que la fonction $\varphi_n(x)$ soit holomorphe dans la bande Ω_n limitée par les deux droites parallèles sur lesquelles sont situés les segments (A_nB_n) et $(A'_nB'_n)$; supposons en outre que cette fonction admette la période a et qu'elle vérifie l'inégalité

$$|\varphi_n(x)|\leqslant R \tag{11}$$

dans la bande Ω_n.

D'après la relation (9), la fonction $\varphi_{n+1}(x)$ sera périodique et holomorphe à l'intérieur d'une bande analogue Ω_{n+1} comprise dans la bande Ω_n.

Cherchons la condition pour laquelle cette fonction satisfera à l'inégalité

$$|\varphi_{n+1}(x)|\leqslant R \tag{12}$$

dans la bande Ω_{n+1}. Remarquons d'abord qu'on a

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\frac{1}{4}\lambda\int_{C_2}N(x,y)F[x,y,\varphi_n(y)]dy \tag{13}$$

$$(C_2=\bar A_{n+1}\bar B_{n+1}+\bar A'_{n+1}\bar B'_{n+1})$$

$(\bar A_{n+1}\bar B_{n+1})$ et $(\bar A'_{n+1}\bar B'_{n+1})$ étant des segments de longueur $2a$, contenant respectivement les segments $(A_{n+1}B_{n+1})$ et $(A'_{n+1}B'_{n+1})$, et tels que les segments $(\bar A_{n+1}\bar A'_{n+1})$ et $(\bar B_{n+1}\bar B'_{n+1})$ soient perpendiculaires à l'axe Ox. Ensuite, en appliquant le théorème de Cauchy au contour fermé $\Gamma=\bar A'_{n+1}\bar A_{n+1}\bar B_{n+1}\bar B'_{n+1}\bar A'_{n+1}$, on a

$$\int_{\Gamma}N(x,y)F[x,y,\psi(y)]dy=4\pi i\frac{a}{\pi}P(x,x)F[x,x,\psi(x)] \tag{14}$$

pour tout point x à l'intérieur de la bande Ω_{n+1}, non situé sur les côtés $\bar A'_{n+1}\bar A_{n+1}$ et $\bar B_{n+1}\bar B'_{n+1}$; ψ est une fonction arbitraire ayant la période a, holomorphe dans Ω_n et satisfaisant à la condition

$$|\psi|\leqslant R.$$

La fonction

$$\int_{\bar A'_{n+1}\bar B'_{n+1}}N(x,y)F[x,y,\psi(y)]dy$$

est évidemment bornée, x étant dans la partie du domaine Ω_{n+1} au dessus de l'axe Ox; de même la fonction

$$\int_{\bar A_{n+1}\bar B_{n+1}}N(x,y)F[x,y,\psi(y)]dy$$

est bornée pour les points du domaine Ω_n au dessous de l'axe Ox. En outre, d'après la périodicité des fonctions N et F, la somme des intégrales le long des segments $(\bar A'_{n+1}\bar A_{n+1})$ et $(\bar B_{n+1}\bar B'_{n+1})$ est nulle.

On en conclut, d'après (14), qu'il existe une constante positive k, indépendante de F et de n, telle que l'inégalité

$$\left|\int_{C_2}N(x,y)F[x,y,\psi(y)]dy\right|<kM \tag{15}$$

$$(C_2=\bar A_{n+1}\bar B_{n+1}+\bar A'_{n+1}\bar B'_{n+1})$$

soit satisfaite pour tous les points x à l'intérieur du rectangle

$$A_{n+1}B_{n+1}B'_{n+1}A'_{n+1}A_{n+1},$$

donc aussi à l'intérieur du domaine Ω_{n+1} pour toute fonction ψ holomorphe dans la bande Ω_n, satisfaisant à la condition $|\psi| \leqslant R$ dans ce domaine et admettant en outre la période a. Il en résulte, d'après la relation (13) et sous la supposition (11), que la fonction $\varphi_{n+1}(x)$ vérifie dans le domaine ouvert Ω_{n+1} l'inégalité $|\varphi_{n+1}| \leqslant R$ si le paramètre λ est suffisamment petit, notamment si l'on a

$$|\lambda| \leqslant \frac{4(R-m)}{kM}. \tag{16}$$

On en conclut, en supposant (10) et (16), que la suite de fonctions holomorphes (8) est définie pour toute valeur n et que toute fonction $\varphi_n(x)$ est holomorphe et périodique dans la bande correspondante Ω_n.

On sait que la valeur principale de l'intégrale singulière le long du segment $(0, a)$ est égale à la moyenne arithmétique des intégrales le long des arcs qui embrassent le segment $(0, a)$, donc

$$\int_0^a N(x,y)F[x,y,\varphi_n(y)]\,dy = \frac{1}{2}\Big[\int_{OA_{n+1}B_{n+1}a} NF\,dy + \int_{OA'_{n+1}B'_{n+1}a} NF\,dy\Big].$$

Il en résulte, d'après la périodicité des fonctions f, N, F, que les fonctions holomorphes (8) prennent au point x du segment $(0, a)$ des valeurs qui vérifient les relations

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^a N(x,y)F[x,y,\varphi_n(y)]\,dy, \tag{17}$$

l'intégrale ayant la valeur principale de Cauchy.

Nous allons étudier maintenant la convergence de la suite (8). Considérons la différence entre les termes consécutifs:

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = \frac{1}{2}\lambda \int_{C_1} N(x,y)\{F[x,y,\varphi_n(y)] - F[x,y,\varphi_{n-1}(y)]\}\,dy, \tag{18}$$

$$C_1 = A_{n+1}B_{n+1}A'_{n+1}B'_{n+1}.$$

Si b_n désigne la borne supérieure du module de la différence $\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)$ dans le domaine ouvert Ω_n, et $\varkappa$ la borne supérieure du module de la dérivée $F'_u(x,y,u)$ dans le domaine

$$x \epsilon D, \quad y \epsilon D, \quad |u| \leqslant R,$$

on a

$$|F[x,y,\varphi_n(y)] - F[x,y,\varphi_{n-1}(y)]| \leqslant \varkappa b_n.$$

On peut donc écrire, pour l'intégrale (18), une inégalité analogue à l'inégalité (15) et on aura

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{4}|\lambda| k\varkappa b_n \tag{19}$$

à l'intérieur du domaine Ω_{n+1}. En vertu de l'inégalité $|\varphi_2 - \varphi_1| < 2R$, on conclut que les différences des fonctions de la suite (8) vérifient pour toute valeur n l'inégalité

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| < \Big(\frac{1}{4}|\lambda| k\varkappa\Big)^n 2R \tag{20}$$

dans le domaine ouvert Ω_{n+1}. Il en résulte que la suite $\{\varphi_n(x)\}$ de fonctions holomorphes dans le domaine Ω converge uniformément vers une fonction holomorphe $\varphi(x)$ dans le domaine Ω limité par deux droites parallèles sur lesquelles sont situés les segments limites (AB) et $(A'B')$:

$$\varphi(x) = \lim \varphi_n(x),$$

si le paramètre λ vérifie les inégalités

$$|\lambda| \leqslant \frac{4(R-m)}{kM}, \qquad |\lambda| < \frac{4}{k\varkappa}. \tag{21}$$

Nous allons démontrer que la solution holomorphe obtenue est unique. Supposons qu'il y ait deux solution holomorphes φ et ψ, on aurait dans la bande Ω

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{2}\lambda \int_{AB+A'B'} N(x,y)F[x,y,\varphi(y)]\,dy,$$

$$\psi(x) = f(x) + \frac{1}{2}\lambda \int_{AB+A'B'} N(x,y)F[x,y,\psi(y)]\,dy,$$

d'où l'inégalité

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant \Big|\frac{1}{4}\lambda k\varkappa\Big| \quad \text{borne} \quad \sup|\varphi - \psi|.$$

Mais on a admis $|\lambda k\varkappa/4| < 1$, donc $\varphi = \psi$ dans la bande Ω et la solution holomorphe est unique. De la même façon on pourra résoudre l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_C \frac{1}{x-y} F[x,y,\varphi(y)]\,dy; \tag{22}$$

l'intégrale prise le long du contour fermé C ayant la tangente continue, x et y étant situés sur C. On suppose que les fonctions $f(x), P(x,y)$,

$F(x,y,u)$ soient déterminées et holomorphes si les points x,y sont situés dans une bande D qui contient le contour C, et si le point u est situé dans le cercle

$$|u| \leqslant R.$$

Considérons dans la bande D: 1° une suite de contours $\{A_n\}$ enfermant C, qui tend vers le contour A et telle que le contour A_{n-1} enferme le contour A_n; 2° une suite de contours $\{B_n\}$ qui tend vers le contour B, et telle que B_{n+1} enferme B_n en admettant que le domaine entre B et C soit situé dans la bande D (fig. 2).

On considère d'une façon analogue la suite de fonctions déterminées par la relation de récurrence

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \frac{1}{2}\lambda \int\limits_{A_n+B_n} \frac{1}{x-y} F[x,y,\varphi_n(y)]\,dy, \tag{23}$$

$\varphi_n(x)$ étant holomorphe dans le domaine Ω_n entre contours A_n et B_n. Comme précédemment, on démontrera que, pour $|\lambda|$ suffisamment petit, la suite $\{\varphi_n(x)\}$ converge vers une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans une bande Ω limitée par les contours A et B et que cette fonction satisfait à l'équation intégrale donnée (22) aux points du contour C.

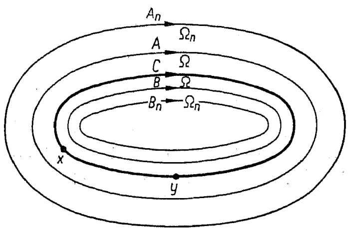

Fig. 2

Le résultat obtenu peut être généralisé pour un système de contours fermés C_ν n'ayant de points communs et pour le système d'équations intégrales de la forme

$$\varphi_\nu(x) = f_\nu(x) + \lambda \int\limits_{C_\nu} \frac{1}{x-y} F_\nu[x,y,\varphi_1(y),\varphi_2(y),\ldots,\varphi_n(y)]\,dy \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

à fonctions inconnues $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$.

L'équation semi-linéaire

Soit une équation intégrale de la forme

$$\varphi(x) - \mu \int\limits_{C_\nu} \frac{K(x,y)}{x-y}\varphi(y)\,dy = f(x) + \lambda \int\limits_{C} \frac{F[x,y,\varphi(y)]}{x-y}\,dy, \tag{24}$$

x, y étant deux points d'une courbe fermée C. Les fonctions données $K(x,y), f(x), F(x,y,u)$ sont holomorphes si les points x, y sont situés dans une bande D qui contient la courbe fermée C, et le point u est situé dans le cercle $|u| \leqslant R$.

L'équation (24) est de la forme étudiée précédemment, d'où il résulte qu'elle admet une solution φ pour des valeurs suffisamment petites des modules $|\lambda|$ et $|\mu|$. Le membre à gauche de l'équation (24) étant linéaire, nous montrerons qu'il est possible de déterminer une solution sous une hypothèse plus générale concernant le paramètre μ. Nous allons transformer l'équation (24) en une équation équivalente dont la partie linéaire sera régulière. Considérons à cet effet un opérateur singulier de Fredholm

$$\widehat{K}_\mu \psi = \psi(x) + \mu \int\limits_{C} \frac{K(x,y)}{x-y}\psi(y)\,dy, \tag{25}$$

et supposons que l'équation itérée[2])

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{-\mu}(\widehat{K}_\mu \psi) &= \psi(x) - \mu^2 \int\limits_{C} \frac{K(x,z)}{x-z}\left[\int\limits_{C} \frac{K(z,y)}{z-y}\psi(y)\,dy\right]dz \\ &= [1+\pi^2\mu^2 K^2(x,x)]\,\psi(x) - \mu^2 \int\limits_{C} K_*(x,y)\psi(y)\,dy = 0\end{aligned} \tag{26}$$

n'admet d'autre solution holomorphe que la solution $\psi=0$. Alors de même l'équation

$$\widehat{K}_\mu \psi = 0$$

n'admet d'autre solution holomorphe que $\psi=0$. Le noyau régulier $K_*(x,y)$ de l'équation (26) est une fonction holomorphe si les points x et y sont situés dans une bande D' qui fait partie de la bande D et contient la courbe C; cette fonction K_* prend sur la courbe C les mêmes valeurs que l'intégrale impropre:

$$K_*(x,y) = \int\limits_{C} \frac{K(x,z)K(z,y)}{(x-z)(z-y)}\,dz \qquad (x \in C,\ y \in C,\ x \neq y). \tag{27}$$

Appliquons maintenant l'opération (25) aux deux membres de l'équation (24). On peut affirmer alors, que toute solution de l'équation (24) satisfait à l'équation

$$\widehat{K}_\mu(\widehat{K}_{-\mu}\varphi) = \widehat{K}_\mu\left\{f(x) + \lambda \int\limits_{C} \frac{F[x,y,\varphi(y)]}{x-y}\,dy\right\},$$

²) Nous avons appliqué la transformation de Poincaré-Bertrand:

$$\int\limits_{C} \frac{K(x,z)}{x-z}\left[\int\limits_{C} \frac{K(z,y)}{z-y}\psi(y)\,dy\right]dz = -\pi^2 K^2(x,x)\psi(x) + \int\limits_{C}\left[\int\limits_{C} \frac{K(x,z)\,K(z,y)}{(x-z)(z-y)}\,dz\right]\psi(y)\,dy.$$

donc à l'équation intégrale

$$[1+\pi^2\mu^2 K^2(x,x)]\varphi(x)-\mu^2\int_C K_*(x,y)\varphi(y)\,dy$$

(28) $$=f(x)+\mu\int_C \frac{K(x,y)}{x-y}f(y)\,dy+\lambda\int_C \frac{F(x,y)\varphi(y)}{x-y}\,dy$$

$$+\lambda\mu\int_C \frac{K(x,z)}{x-z}\left[\int_C \frac{F[z,y,\varphi(y)]}{z-y}\,dy\right]dz.$$

Réciproquement toute solution de l'équation (28) satisfait à l'équation (24), l'équation $\hat{K}_\mu\psi=0$ n'admettant d'autre solution holomorphe que $\psi=0$. L'équation (28) est donc équivalente à l'équation (24).

En appliquant encore la transformation de Poincaré-Bertrand à la dernière intégrale (28), on arrive à l'équation intégrale équivalente

$$[1+\pi^2\mu^2K^2(x,x)]\varphi(x)-\mu^2\int_C K_*(x,y)\varphi(y)\,dy$$

(29) $$=f_1(x)-\pi^2\lambda\mu K(x,x)F[x,x,\varphi(x)]+\lambda\mu\int_C \Phi[x,y,\varphi(y)]\,dy$$

$$+\lambda\int_C \frac{F[x,y,\varphi(y)]}{x-y}\,dy,$$

où $\Phi(x,y,u)$ est une fonction holomorphe dans la bande D et dans le cercle $|u|\leqslant R$, et qui prend sur la courbe C les mêmes valeurs que l'intégrale impropre

(30) $$\Phi(x,y,u)=\int_C \frac{K(x,z)F(z,y,u)}{(x-z)(z-y)}\,dz;$$

en outre, on a désigné par $f_1(x)$ la fonction holomorphe dans D qui prend sur C les valeurs

(31) $$f_1(x)=f(x)+\mu\int_C \frac{K(x,y)}{x-y}f(y)\,dy.$$

Or il a été supposé que l'équation homogène (26) n'ait qu'une solution $\psi=0$, donc en admettant que

$$1+\pi^2\mu^2K^2(x,x)\neq 0,$$

on peut affirmer que l'équation

(32) $$\varphi(x)-\mu^2\int_C \frac{K_*(x,y)}{1+\pi^2\mu^2K^2(x,x)}\varphi(y)\,dy=\Psi(x)$$

est équivalente à l'équation

$$\varphi(x)=\Psi(x)+\mu^2\int_C \mathfrak{N}(x,z)\,\Psi(z)\,dz,$$

$\mathfrak{N}(x,y)$ étant le noyau résolvant du noyau

(33) $$\frac{K_*(x,y)}{1+\pi^2\mu^2K^2(x,x)}.$$

On en conclut que l'équation semi-linéaire (29) est équivalente à l'équation

$$\varphi(x)=\frac{f_1(x)-\pi^2\lambda\mu K(x,x)F[x,x,\varphi(x)]}{1+\pi^2\mu^2K^2(x,x)}+\mu^2\int_C \frac{\mathfrak{N}(x,z)f_1(z)\,dz}{1+\pi^2\mu^2K^2(x,x)}$$

(34)

$$+\frac{\lambda}{1+\pi^2\mu^2K^2(x,x)}\int_C \frac{F[x,y,\varphi(y)]}{x-y}\,dy+\lambda\int_C \Phi_1[x,y,\varphi(y)]\,dy,$$

où l'on a désigné (y sur C)

$$\Phi_1(x,y,u)=\frac{\mu\Phi[x,y,u]}{1+\pi^2\mu^2K^2(x,x)}+\pi^2\mu^3\frac{\mathfrak{N}(x,y)K(y,y)F(y,y,u)}{1+\pi^2\mu^2K^2(y,y)}$$

(35)

$$+\mu^3\int_C \frac{\mathfrak{N}(x,z)\Phi(z,y,u)}{1+\pi^2\mu^2K^2(z,z)}\,dz+\mu^2\int_C \frac{\mathfrak{N}(x,z)F(z,y,u)}{(z-y)[1+\pi^2\mu^2K^2(z,z)]}\,dz.$$

$\Phi_1(x,y,u)$ est donc une fonction holomorphe connue de trois variables dans la bande D' et dans le cercle $|u|\leqslant R$.

On peut appliquer à l'équation intégrale singulière (34) la méthode de résolution exposée ultérieurement. Pour ce but, écrivons l'équation (34) sous la forme

$$\varphi(x)=\hat{\Omega}(x,\varphi),$$

$\hat{\Omega}$ étant l'opérateur fonctionnel défini par l'expression (34), et considérons une suite de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ déterminée par la relation de récurrence

$$\varphi_{n+1}(x)=\hat{\Omega}(x,\varphi_n).$$

On démontrera l'existence de la solution unique $\varphi(x)$ holomorphe dans D' si le module du paramètre λ est suffisamment petit. Cette fonction sera aussi la solution unique de l'équation proposée (24).

Articles cités

[1] W. Pogorzelski, *Sur l'équation intégro-différentielle non linéaire à singularité polaire*, Ann. Soc. Pol. Math. 24 (1951), p. 75-87.

[2] J. Wolska, *Sur les équations intégrales et intégro-différentielles à singularité polaire*, Prace Mat. Fiz. 48 (1952), p. 27-44.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Systèmes d'inégalités différentielles aux derivées partielles du premier ordre, et leurs applications

par J. Szarski (Kraków)

Le but de cette note est de généraliser, pour les systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre de la forme

$$(1.1)\qquad \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} < f_\nu^\mu\left(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right)$$

$$(\mu=1,2,\dots,m,\quad \nu=1,2,\dots,k),$$

certains théorèmes que nous avons obtenus antérieurement [1] pour le cas particulier $k=1$.

Au § 1 nous rappelons ces théorèmes ainsi que certaines conséquences qui en résultent. Le § 2 comprend des théorèmes sur les inégalités de la forme (1.1) et le § 3 les applications de ces théorèmes au problème d'unicité et à celui d'évaluation de la différence entre deux solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Au § 4 nous démontrons un théorème sur la monotonie, par rapport aux valeurs initiales, de la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Le théorème 2.1 et le théorème 4.1 ont été communiqués, sous une forme moins générale, au Congrès des Mathématiciens Polonais en 1948 [3].

§ 1. Nous commençons par rappeler, sous une forme un peu modifiée, un théorème démontré dans le travail cité plus haut[1]).

Théorème 1.1. *Supposons que les fonctions*

$$f^\mu(x,y_1,\dots,y_n,u_1,\dots,u_m,q_1,\dots,q_n)\qquad(\mu=1,2,\dots,m),$$

soient définies respectivement dans des domaines Δ_μ de l'espace à $2n+m+1$ dimensions, dont les projections sur le plan $x,y_1,\dots,y_n$ recouvrent l'ensemble

$$(1.2)\qquad \mathring{x}\leqslant x<\mathring{x}+a,\quad a_i+N(x-\mathring{x})\leqslant y_i\leqslant b_i-N(x-\mathring{x})\quad(i=1,2,\dots,n)$$

où $N>0$, $a_i<b_i$, $0<a<(b_i-a_i)/2N$.

[1]) Cf. [1], théorème 3 bis, p. 25.