Articles cités

[1] T. Ważewski, *Sur certains lemmes relatifs au prolongement des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. des Sciences et des Lettres, Série A, 1949, p. 73-74.

[2] — *Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces abstraits. Applications*, ibidem, p. 183-185.

[3] — *Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces de Banach. Application à la généralisation du théorème de l'Hôpital*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 24 (1952-3), p. 132-147.

[4] — *Certaines propositions de caractère „épidermique" relatives aux inégalités différentielles*, ibidem 24 (1952-3), p. 1-12.

Polynômes extrémaux et la représentation conforme des domaines doublement connexes

par F. Leja (Kraków)

1. Notations. Soit D un domaine borné doublement connexe, F_0 la frontière intérieure de D (ne se réduisant pas à un seul point), F_1 la frontière extérieure et

$$F=F_0+F_1.$$

Nous supposerons que F_1 soit en même temps la frontière du domaine non borné situé dans l'ensemble complémentaire à F_1.

Soient A un nombre réel >1, λ un paramètre réel $\geqslant 0$, $\varphi(\zeta)$ la fonction définie sur F par les formules

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases}1 & \text{sur } F_0,\\ A & \text{sur } F_1,\end{cases}$$

et $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points quelconques $\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_n$ situés sur F

(1) $$\zeta^{(n)}=\{\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_n\}.$$

Désignons par $V(\zeta^{(n)})$ le produit

(2) $$V(\zeta^{(n)})=V(\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_n)=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}|\zeta_j-\zeta_k|,$$

par $\omega(z,\zeta)$ la fonction

$$\omega(z,\zeta)=\frac{|z-\zeta|}{[\varphi(z)\varphi(\zeta)]^{\lambda}},$$

et posons

(3) $$V(\lambda,\zeta^{(n)})=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}\omega(\zeta_j,\zeta_k)=\frac{V(\zeta^{(n)})}{[\varphi(\zeta_0)\varphi(\zeta_1)\dots\varphi(\zeta_n)]^{n\lambda}},$$

(4) $$\Delta^{(j)}(\lambda,\zeta^{(n)})=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\omega(\zeta_j,\zeta_k)\qquad (j=0,1,2,\dots,n).$$

Lorsque les points du système (1) parcourent F, le produit (3) varie et atteint un maximum qui sera désigné par $V_n(\lambda,F)$. Soit

(5) $$x^{(n)}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$$

un système de points de F tel qu'on ait pour tout $\zeta^{(n)}\epsilon F$

(6) $$V_n(\lambda,F)=V(\lambda,x^{(n)})\geqslant V(\lambda,\zeta^{(n)}).$$

Nous supposerons que les indices des points (5) soient choisis de manière qu'on ait

(7) $$\Delta^{(0)}(\lambda,x^{(n)})\leqslant\Delta^{(j)}(\lambda,x^{(n)})\qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Chaque système (5) satisfaisant aux conditions (6) et (7) sera dit $n^{\text{ième}}$ *système de points extrémaux* (ou *système extrémal*) de l'ensemble F correspondant à la *fonction frontière* $\varphi(\zeta)$ et au paramètre λ. La position des points (5) dépend de n et de λ. Pour marquer cette dépendance nous désignerons aussi le système extrémal (5) comme il suit

(7') $$x^{(n)}=x^{(n,\lambda)}=\{x_0^{(n,\lambda)},x_1^{(n,\lambda)},\ldots,x_n^{(n,\lambda)}\}.$$

On sait[1]) que la limite

(8) $$\lim_{n\to\infty}[V_n(\lambda,F)]^{2/n(n+1)}=v(\lambda,F)$$

existe. La quantité $v(\lambda,F)$ sera dite *l'écart* de l'ensemble F par rapport à la fonction $\omega(z,\zeta)$. D'autre part, on a aussi

(9) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta^{(0)}(\lambda,x^{(n)})}=v(\lambda,F).$$

Désignons par $v(E)$ le *diamètre transfini* d'un ensemble formé et borné quelconque E. C'est, par définition, la limite

$$v(E)=\lim[V_n(E)]^{2/n(n+1)}\qquad \text{oú}\qquad V_n(E)=\max_{\zeta^{(n)}\epsilon E}V(\zeta^{(n)}).$$

Puisque, d'après (2) et (3), $V(\zeta^{(n)})=V(0,\zeta^{(n)})$, l'écart $v(\lambda,F)$ pour $\lambda=0$ se réduit au diamètre $v(F)$:

$$v(0,F)=v(F).$$

On constate aisément que, quel que soit λ, l'écart $v(\lambda,F)$ satisfait aux inégalités[2])

(10) $$v(F_0)\leqslant v(\lambda,F)\leqslant v(F_1).$$

[1]) Voir [1].

[2]) Car $V_n(F_0)=V_n(\lambda,F_0)\leqslant V_n(\lambda,F)$ et $V_n(\lambda,F)\leqslant V_n(F)$ lorsque $\lambda\geqslant 0$. D'autre part, en vertu du principe de maximum, on a $V_n(F)=V_n(F_1)$.

Formons les polynômes de Lagrange correspondant au système (1)

$$L^{(j)}(z;\zeta^{(n)})=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n}\frac{z-\zeta_k}{\zeta_j-\zeta_k}\qquad (j=0,1,2,\ldots,n),$$

et posons

$$\Phi^{(j)}(z;\lambda,\zeta^{(n)})=L^{(j)}(z;\zeta^{(n)})[\varphi(\zeta_j)]^{n\lambda}\qquad (j=0,1,2,\ldots,n).$$

Les polynômes

(11) $$\Phi^{(j)}(z;\lambda,x^{(n)})=L^{(j)}(z;x^{(n)})[\varphi(x_j)]^{n\lambda}\qquad (j=0,1,2,\ldots,n),$$

correspondant au système extrémal (5), seront dits *polynômes extrémaux* de F; ils satisfont en chaque point z de F à l'inégalité

(12) $$|\Phi^{(j)}(z;\lambda,x^{(n)})|\leqslant[\varphi(z)]^{n\lambda}\qquad (j=0,1,2,\ldots,n),$$

ce qu'on peut déduire de l'hypothèse (6)[3]). Nous désignérons par $F_n(z,\lambda)$ la somme

(13) $$F_n(z,\lambda)=\sum_{j=0}^{n}|\Phi^{(j)}(z;\lambda,x^{(n)})|,$$

et par $\Phi_n(z,\lambda)$ la borne inférieure suivante:

(14) $$\Phi_n(z,\lambda)=\inf_{\zeta^{(n)}\epsilon F}\{\max_{(j)}|\Phi^{(j)}(z;\lambda,\zeta^{(n)})|\}.$$

Les points extrémaux (7'), pour $n=1,2,\ldots$, forment une suite triangulaire $\{x_j^{(n,\lambda)}\}$. Désignons par F^λ l'ensemble des points d'accumulation de cette suite, et par D^λ le plus grand domaine (connexe) de frontière F^λ contenant D. Les parties de F^λ situées sur F_0 et F_1 seront désignées respectivement par F_0^λ et F_1^λ, donc

$$F^\lambda=F_0^\lambda+F_1^\lambda,\qquad F^\lambda\subset F.$$

On verra plus loin que, si $\lambda>0$, on a toujours $F_0^\lambda=F_0$. Mais, l'ensemble F_1^λ peut être vide ou plus petit que F_1. Si $F_1^\lambda\neq F_1$, le domaine D^λ s'étend à l'infini et, si $F_1^\lambda=F_1$, on a $D^\lambda=D$.

Remarquons que

$$v(F_0)\leqslant v(F^\lambda)\leqslant v(F_1),$$

car, étant $F_0\subset F^\lambda\subset F_0+F_1$, on a $v(F_0)\leqslant v(F^\lambda)\leqslant v(F_0+F_1)$ et il est évident que $v(F_0+F_1)=v(F_1)$. D'autre part, on a toujours

$$v(F^\lambda)<v(F_1)\qquad\text{lorsque}\qquad F_1^\lambda\neq F_1.$$

[3]) D'après (6), on a $V(\lambda,\zeta^{(n)})\leqslant V(\lambda,x^{(n)})$ lorsque $\zeta^{(n)}=\{x_0,\ldots,x_{j-1},z,x_{j+1},\ldots,x_n\}$. Il suffit d'appliquer la formule (3).

2. Une fonction limite. J'ai démontré ailleurs [2] que, quel que soit λ, les suites $\{\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}\}$ et $\{\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)}\}$ convergent dans le plan entier vers la même limite $\Phi(z,\lambda)$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)}=\Phi(z,\lambda);$$

$\Phi(z,\lambda)$ est continue dans le plan entier et satisfait aux inégalités: $\Phi(z,\lambda)\geqslant 1$ partout et

$$\Phi(z,\lambda)\begin{cases}\leqslant\varphi(z)^\lambda & \text{sur } F,\\ =\varphi(z)^\lambda & \text{sur } F^\lambda.\end{cases}$$

De plus, en dehors de F^λ, existe la limite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\Phi^{(0)}(z;\lambda,x^{(n)})}\right|=\Phi(z,\lambda),$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage de tout point z non situé sur F^λ. La fonction $\log\Phi(z,\lambda)$ est, par suite, harmonique en dehors de F^λ et a un pôle simple à l'infini.

Ceci posé, soient $z=a$ un point fixe quelconque du domaine D et $\varphi_n(z,\lambda)$ la fonction analytique définie dans D^λ par la formule

$$\varphi_n(z,\lambda)=e^{i\Theta_n}\sqrt[n]{\Phi^{(0)}(z;\lambda,x^{(n)})}\qquad(n=1,2,\ldots),\tag{15}$$

où la détermination du radical et le nombre réel Θ_n sont tels qu'on ait

$$\varphi_n(a,\lambda)>0\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Des résultats précédents, suit immédiatement le

THÉORÈME I. *La suite* (15) *converge dans* D^λ *vers une fonction analytique* $\varphi(z,\lambda)$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z,\lambda)=\varphi(z,\lambda)\tag{16}$$

de module continu dans $D^\lambda+F^\lambda$ *satisfaisant dans* $D+F$ *aux inégalités*

$$1\leqslant|\varphi(z,\lambda)|\leqslant A^\lambda.$$

La fonction $\varphi(z,\lambda)$ peut être uniforme ou multiforme dans D, ce qui dépend de la répartition des points extrémaux (5) entre les frontières F_0 et F_1; mais son module est uniforme et on a $|\varphi(z,\lambda)|=\Phi(z,\lambda)$. Je dis que:

1. *Lorsque* $\lambda>0$, *l'ensemble* F_0^λ *est identique à* F_0 *et on a* $|\varphi(z,\lambda)|>1$ *à l'intérieur de* D^λ.

En effet, la fonction $\varphi(z,\lambda)$ est holomorphe dans un voisinage de chaque point de F_0 n'appartenant pas à F_0^λ. Si un point ζ de F_0 n'appartenait pas à F_0^λ, $\varphi(z,\lambda)$ atteindrait en ce point le minimum 1 de sa valeur absolue sans être constante, car, si F_1^λ n'est pas vide, on a $|\varphi(z,\lambda)|=A^\lambda>1$ sur F_1^λ, et, si F_1^λ est vide, le domaine D^λ s'étend à l'infini et $|\varphi(z,\lambda)|\to\infty$ lorsque $z\to\infty$. Par suite, $F_0^\lambda=F_0$ et on a $|\varphi(z,\lambda)|>1$ dans D^λ.

Remarquons que, si $\lambda=0$, la fonction $\omega(z,\zeta)$ se réduit à la distance $|z-\zeta|$ et tous les points extrémaux sont situés sur F_1. La fonction $\log\Phi(z,\lambda)$ se réduit alors, dans le domaine D, à 0, et, dans le domaine extérieur à F_1, à la fonction de Green de ce domaine et de pôle $z=\infty$[4]).

Nous supposerons dans la suite que

$$\lambda>0.$$

Désignons par $\nu=\nu(\lambda,n)$ le nombre de ceux des points extrémaux (5) qui sont situés sur F_1, et soit $|z|<R$ un cercle contenant la frontière $F=F_0+F_1$ en son intérieur.

Nous allons démontrer que:

2. *Pour toute valeur de* λ, *la limite*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu(\lambda,n)}{n}=a(\lambda)=a\tag{17}$$

existe. Lorsque $F_1^\lambda\neq F_1$, *la fonction* $\varphi(z,\lambda)$ *a un pôle simple à l'infini et dans le domaine* $R<|z|<\infty$ *le développement de la forme*

$$\varphi(z,\lambda)=\frac{1}{u}z+c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots,\tag{18}$$

où les coefficients $u,c_0,c_1,\ldots$ *dépendent de* λ *et le module de* u *s'exprime par la formule*

$$|u|=v(\lambda,F)A^{\lambda a}.\tag{19}$$

Démonstration. D'après (15), on a

$$\frac{\varphi_n(z,\lambda)}{z}=\frac{1}{u_n}\sqrt[n]{\left(1-\frac{x_1}{z}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n}{z}\right)}\qquad(n=1,2,\ldots),\tag{20}$$

où

$$|u_n|=\sqrt[n]{|(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)|}\,\varphi(x_0)^{-\lambda}.$$

Puisque

$$\Delta^{(0)}(\lambda,x^{(n)})=\frac{|(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)|}{\varphi(x_0)^{n\lambda}[\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)]^\lambda}$$

et que

$$\prod_{k=0}^{n}\varphi(x_k)=A^\nu,$$

on a

$$|u_n|=\sqrt[n]{\Delta^{(0)}(\lambda,x^{(n)})}\,A^{\nu\lambda/n}\varphi(x_0)^{-\lambda/n}\qquad(n=1,2,\ldots).\tag{21}$$

[4]) Voir [3].

La suite (20) est uniformément bornée dans le domaine $|z|>R$, car dans ce domaine on a $|1-x_k/z|<2$ pour $k=1,2,\ldots,n$ et les termes $|u_n|$ surpassent en vertu de (9) un nombre positif. D'autre part la suite (20) converge dans D^λ, donc la convergence est uniforme. Par suite, les termes u_n tendent vers une limite finie $u\neq 0$, et on a le developpement (18). L'existence de la limite (17) et la formule (19) résultent de (9) et de la formule (21).

Lorsque $F_1^\lambda=F_1$, il suffit de supposer que le point $z=a$ soit choisi dans le domaine infini limité par F_1 pour que la limite (16) existe dans ce domaine. La proposition précédente reste vraie dans cette hypothèse.

Désignons par Δ_i, $i=0$ ou 1, le domaine simplement connexe de frontière F_i, contenant le point $z=\infty$, et soit

$$w=g_i(z) \qquad (i=0,1),$$

la fonction anylytique effectuant la transformation conforme de Δ_i en le cercle $|w|>1$ de manière que les points $z=\infty$ et $w=\infty$ se correspondent.

Lorsque $\nu=\nu(\lambda,n)=0$ pour $n=1,2,\ldots$, on a $\alpha(\lambda)=0$ et les fonctions (15) sont uniformes dans Δ_0. La fonction limite (16) est alors uniforme et univalente dans Δ_0, et on a identiquement[5])

$$\varphi(z,\lambda)=e^{i\varphi}g_0(z) \qquad (\varphi \text{ réel}).$$

Si $\nu>0$ les fonctions (15) sont multiformes dans D. Néanmoins, les fonctions

$$[\varphi_n(z,\lambda)]^{n/(n-\nu)}, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

sont uniformes, car, lorsque z décrit dans D un contour entourant une seule fois dans le sens direct la frontière F_0, la fonction $\varphi_n(z,\lambda)$ se multiplie par $\exp\big(2\pi i(n-\nu)/n\big)$. Par suite, la fonction

$$\text{(22)} \qquad \psi(z,\lambda)=[\varphi(z,\lambda)]^{1/(1-\alpha(\lambda))}$$

est uniforme et univalente dans D.

Le but principal de ce travail est de démontrer que, lorsque $\lambda\to 0$, la fonction (22) tend dans D vers une limite $\psi(z)$, et que $w=\psi(z)$ effectue la représentation conforme du domaine D sur une couronne circulaire $1<|w|<R$.

3. Propriétés de l'écart et de la fonction $\alpha(\lambda)$. On sait que

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{g_i(z)}{z}\right|=\frac{1}{v(F_i)} \qquad (i=0,1).$$

[5]) Voir [4].

Posons

$$\text{(23)} \qquad m=\min_{z\in F_1}|g_0(z)|\leqslant\max_{z\in F_1}|g_0(z)|=M,$$

et désignons par C_0 et C_1 les courbes définies par les équations

$$C_0\{|g_0(z)|=m\}, \qquad C_1\{|g_0(z)|=M\}.$$

Il est évident que $m>1$. Les diamètres transfinis $v(C_0)$ et $v(C_1)$ s'expriment par les formules

$$v(C_0)=mv(F_0), \qquad v(C_1)=Mv(F_0),$$

et on a l'inégalité

$$\text{(24)} \qquad mv(F_0)\leqslant v(F_1)\leqslant Mv(F_0).$$

Je dis que:

1. *Lorsque $M<A^\lambda$, l'ensemble F_1^λ est vide, et, par suite, $\alpha(\lambda)=0$; mais, lorsque $A^\lambda<m$, on a toujours $\alpha(\lambda)>0$.*

Démonstration. Soit $F_1^\lambda\neq F_1$. La fonction

$$r(z)=\log|\varphi(z,\lambda)|-\log|g_0(z)|$$

est harmonique dans le domaine D^λ, le point $z=\infty$ y compris, et continue dans $D^\lambda+F^\lambda$. A l'infini, on a

$$\text{(25)} \qquad r(\infty)=\log\frac{1}{v(\lambda,F)A^{\lambda a}}-\log\frac{1}{v(F_0)}\leqslant 0,$$

car $v(\lambda,F)\geqslant v(F_0)$ et $A^{\lambda a}\geqslant 1$.

Supposons que $M<A^\lambda$. Si F_1^λ n'était pas vide, on aurait $r(z)>0$ sur F_1^λ, car $|\varphi(z,\lambda)|=A^\lambda>M\geqslant|g_0(z)|$ sur F_1^λ, et $r(z)=0$ sur F_0^λ, ce qui est impossible lorsque $F_1^\lambda\neq F_1$ en vertu de (25). Lorsque $F_1^\lambda=F_1$, la fonction $r(z)$ est harmonique dans le domaine Δ_1, continue dans Δ_1+F_1, et on peut appliquer le même raisonnement à ce domaine.

Supposons maintenant que $A^\lambda<m$. Posons $n=\mu+\nu$, et soient $x_0,x_1,\ldots,x_\mu$ les points extrémaux (5) qui sont situés sur F_0; le nombre de points $x_{\mu+1},\ldots,x_n$ situés sur F_1 est donc égal à ν, où $\nu\geqslant 0$. Désignons par K la plus grande distance entre un point de F_0 et un point de F_1. D'après (3),

$$\text{(25')} \qquad V(\lambda,x^{(n)})=V(x^{(n)})A^{-\lambda\nu n}$$

et, d'après (2),

$$V(x^{(n)})=V(x_0,\ldots,x_\mu)\,V(x_{\mu+1},\ldots,x_n)I,$$

où

$$I=\prod_{j=0}^{\mu}|(x_j-x_{\mu+1})\ldots(x_j-x_n)|\leqslant K^{(\mu+1)\nu},$$

donc

$$V(\lambda,x^{(n)})\leqslant V_\mu(F_0)\,V_{\nu-1}(F_1)K^{(\mu+1)\nu}A^{-\lambda\nu n}.$$

En désignant par $v_n(E)$ la quantité

$$v_n(E)=[V_n(E)]^{2/n(n+1)},$$

on obtient

$$[V(\lambda,x^{(n)})]^{2/n(n+1)}\leqslant v_\mu(F_0)^{\mu(\mu+1)/n(n+1)}v_{\nu-1}(F_1)^{\nu(\nu-1)/n(n-1)}K^{2\nu(\mu+1)/n(n+1)}A^{-2\lambda\nu/(n+1)},$$

d'où l'on tire, lorsque $n\to\infty$,

$$v(\lambda,F)\leqslant v(F_0)^{(1-a)^2}v(F_1)^{a^2}K^{2a(1-a)}A^{-2\lambda a}.$$

Si l'on avait $a=a(\lambda)=0$, on déduirait de l'inégalité précédente $v(\lambda,F)\leqslant v(F_0)$, et, comme $v(\lambda,F)\geqslant v(F_0)$, il en suivrait $v(\lambda,F)=v(F_0)$. Par suite, d'après (25), on aurait $r(\infty)=0$, ce qui est impossible d'après le principe de minimum, car $r(z)=0$ sur F_0 et $r(z)\leqslant\log A^\lambda-\log m<0$ sur F_1^λ. On doit donc avoir $a(\lambda)>0$.

2. *Les fonctions $v(\lambda,F)$ et $a(\lambda)$ de λ sont monotônes; lorsque $0<\lambda<\lambda'$ on a*

(26) $$v(\lambda,F)\geqslant V(\lambda',F),$$

et

(27) $$a(\lambda)\geqslant a(\lambda').$$

Démonstration. Soient $x^{(n,\lambda)}$ et $x^{(n,\lambda')}$ deux systèmes extrémaux correspondant respectivement à λ et λ'. Posons, comme plus haut,

$$\nu=\nu(\lambda,n),\qquad \nu'=\nu(\lambda',n),\qquad a=a(\lambda),\qquad a'=a(\lambda').$$

D'après (3), on a

$$V(\lambda,x^{(n,\lambda)})=\frac{V(x^{(n,\lambda)})}{A^{\lambda\nu n}}\geqslant\frac{V(x^{(n,\lambda')})}{A^{\lambda\nu' n}}>\frac{V(x^{(n,\lambda')})}{A^{\lambda'\nu' n}}=V(\lambda',x^{(n,\lambda')})$$

donc

$$[V(\lambda,x^{(n,\lambda)})]^{2/n(n+1)}>[V(\lambda',x^{(n,\lambda')})]^{2/n(n+1)},$$

d'où l'on déduit l'inégalité (26).

D'autre part, étant

$$V(\lambda',x^{(n,\lambda')})=\frac{V(x^{(n,\lambda')})}{A^{\lambda'\nu' n}}\geqslant\frac{V(x^{(n,\lambda)})}{A^{\lambda'\nu n}},$$

on trouve

$$\frac{1}{A^{(\lambda'\nu'+\lambda\nu)n}}\geqslant\frac{1}{A^{(\lambda'\nu+\lambda\nu')n}},$$

ce qui donne $(\lambda'-\lambda)(\nu-\nu')\geqslant 0$ et, par suite, $a\geqslant a'$.

3. *Quel que soit $\lambda>0$, on a*

(28) $$\frac{v(F_1)}{A^{\lambda(1+a)}}\leqslant v(\lambda,F)\leqslant\frac{v(F_1)}{A^{2\lambda a}}\qquad où\quad a=a(\lambda).$$

Démonstration. La fonction

$$R(z)=\log|\varphi(z,\lambda)|-\log|g_1(z)|$$

est harmonique dans le domaine Δ_1, le point $z=\infty$ y compris, et continue dans Δ_1+F_1. Sur F_1, in a $R(z)\leqslant\log A^\lambda$ et, à l'infini,

$$R(\infty)=\log\frac{1}{v(\lambda,F)A^{\lambda a}}-\log\frac{1}{v(F_1)}\leqslant\log A^\lambda,$$

donc

$$\frac{v(F_1)}{A^{\lambda(1+a)}}\leqslant v(\lambda,F)\ ^{6}).$$

Considérons maintenant la formule (25′), et remarquons que

$$V(x^{(n)})\leqslant\max_{\zeta^{(n)}\epsilon F_1}V(\zeta^{(n)})=V_n(F_1),$$

donc

$$[V(\lambda,x^{(n)})]^{2/n(n+1)}\leqslant[V(F_1)]^{2/n(n+1)}A^{-2\lambda\nu/(n+1)}.$$

Lorsque $n\to\infty$, on en déduit $v(\lambda,F)\leqslant v(F_1)A^{-2\lambda a}$, c. q. f. d.

Soit p un nombre naturel quelconque $\leqslant n$. Posons $q=n-p$ et soit

(29) $$\eta^{(n)}=\{\eta_0,\dots,\eta_p,\eta_{p+1},\dots,\eta_n\}$$

un système de points situés sur $F=F_0+F_1$, dont $\eta_0,\dots,\eta_p$ sont situés sur F_0 et $\eta_{p+1},\dots,\eta_n$ sur F_1. Nous dirons que ce système est *régulier* sur F (ou que la distribution de ces points sur F est régulière) si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$V(\eta_0,\dots,\eta_p)=\max_{\zeta^{(p)}\epsilon F_0}V(\zeta^{(p)})=V_p(F_0),$$

$$V(\eta_{p+1},\dots,\eta_n)=\max_{\zeta^{(q-1)}\epsilon F_1}V(\zeta^{(q-1)})=V_{q-1}(F_1).$$

Dans les cas $q=0$ et 1, posons par hypothèse $V(\eta_{p+1},\dots,\eta_n)=V_{q-1}(F_1)=1$. On sait[7]) que les suites

$$v_p(F_0)=[V_p(F_0)]^{2/p(p+1)},\qquad v_{q-1}(F_1)=[V_{q-1}(F_1)]^{2/q(q-1)},\qquad(p,q=2,3,\dots),$$

[6]) Cette inégalité devient égalité lorsque $|\varphi(z,\lambda)|=A^\lambda$ en tout point de F_1.

[7]) Voir [4].

convergent respectivement vers $v(F_0)$ et $v(F_1)$ et que la suite de fonctions

$$(30)\qquad I_q(z)=\sqrt[q]{|(z-\eta_{p+1})\dots(z-\eta_n)|}$$

converge uniformément vers $v(F_1)$ dans le voisinage de chaque point z du domaine borné de frontière F_1.

Ceci posé, désignons par N et r les quantités

$$(31)\qquad N=\frac{v(F_1)}{v(F_0)},\qquad r=\frac{\log A}{\log N}.$$

D'après (24), on a $m\leqslant N\leqslant M$. Nous allons prouver que:

4. *Lorsque* $\lambda<1/r$, *l'écart satisfait à l'inégalité*

$$(32)\qquad \frac{v(F_1)}{A^{2\lambda-\lambda^2 r}}\leqslant v(\lambda,F).$$

Démonstration. Soit (29) un système régulier de F. Supposons que le nombre $q=n-p$ varie avec n de manière que le rapport q/n tende vers une limite β et, par suite, $p/n\to 1-\beta$. D'après la formule (3), on a

$$V(\lambda,\eta^{(n)})=V(\eta^{(n)})A^{-\lambda qn},$$

et, d'après (2),

$$V(\eta^{(n)})=V(\eta_0,\dots,\eta_p)\,V(\eta_{p+1},\dots,\eta_n)\prod_{j=0}^{p}|(\eta_j-\eta_{p+1})\dots(\eta_j-\eta_n)|,$$

donc

$$V(\eta^{(n)})=V_p(F_0)\,V_{q-1}(F_1)\,I_{pq}^{q(p+1)},$$

où l'on a posé

$$I_{pq}=\sqrt[p+1]{I_q(\eta_0)\dots I_q(\eta_p)}.$$

Puisque $V(\lambda,x^{(n)})\geqslant V(\lambda,\eta^{(n)})$, on trouve

$$[V(\lambda,x^{(n)})]^{2/n(n+1)}\geqslant v_p(F_0)^{p(p+1)/n(n+1)}v_{q-1}(F_1)^{q(q-1)/n(n+1)}\,I_{pq}^{2q(p+1)/n(n+1)}A^{-2\lambda q/(n+1)}.$$

En faisant tendre n vers l'infini de manière que $q/n\to\beta$ et $p/n\to 1-\beta$ on en déduit l'inégalité[8])

$$v(\lambda,F)\geqslant v(F_0)^{(1-\beta)^2}v(F_1)^{\beta^2}v(F_1)^{2\beta(1-\beta)}A^{-2\lambda\beta},$$

et, comme $\beta^2+2\beta(1-\beta)=1-(1-\beta)^2$, on a

$$v(\lambda,F)\geqslant\frac{v(F_1)}{N^{(1-\beta)^2}A^{2\lambda\beta}}.$$

[8]) D'après ce qui précède $I_{pq}\to v(F_1)$ lorsque $n\to\infty$.

Le second membre de cette inégalité varie avec β, où $0\leqslant\beta\leqslant 1$, et, si $\lambda<1/r$, il atteint son maximum pour

$$\beta=1-\lambda r.$$

Ce maximum est égal à $v(F_1)A^{\lambda^2 r-2\lambda}$, donc l'inégalité (32) est démontrée.

On conclut de la dernière démonstration que, si chaque système extrémal (5) est régulier, la relation (32) se réduit à l'égalité et que $\alpha(\lambda)=1-\lambda r$ si $\lambda r<1$, donc

$$(33)\qquad \frac{\lambda}{1-\alpha(\lambda)}=\frac{\log N}{\log A}\qquad\text{si}\quad \lambda<\frac{\log N}{\log A}.$$

Dans le cas, où

$$m=M=N,$$

c'est-à-dire lorsque la frontière F_1 est identique à la courbe $|g_0(z)|=m$, tous les systèmes extrémaux sont réguliers, donc $F_1^\lambda=F_1$, et on a sur F_1

$$|\varphi(z,\lambda)|^{1/(1-\alpha(\lambda))}=A^{\lambda/(1-\alpha(\lambda))}=N=|g_0(z)|,$$

ce qui conduit à la conclusion que les fonctions $\varphi(z,\lambda)^{1/(1-\alpha(\lambda))}$ et $g_0(z)$ ne diffèrent que par un facteur constant de module 1.

Considérons le cas général, où $m\leqslant M$ et $m\leqslant N\leqslant M$. D'après (28) et (32), on a

$$\frac{v(F_1)}{A^{2\lambda-\lambda^2 r}}\leqslant\frac{v(F_1)}{A^{2\lambda\alpha}}\qquad\text{si}\quad\lambda\leqslant\frac{1}{r},$$

donc $2\alpha\leqslant 2-\lambda r$ et, par suite,

$$(34)\qquad \frac{\lambda}{1-\alpha(\lambda)}\leqslant 2\frac{\log N}{\log A}\qquad\text{si}\quad \lambda\leqslant\frac{\log N}{\log A}.$$

Nous allons encore démontrer les inégalités

$$(35)\qquad \frac{\log m}{\log A}\leqslant\frac{\lambda}{1-\alpha(\lambda)}\leqslant\frac{\log M}{\log A}\qquad\textit{si}\quad \lambda<\frac{\log m}{\log A}.$$

Démonstration. Considérons les courbes

$$C_0\{|g_0(z)|=m\}\qquad\text{et}\qquad C_1\{|g_0(z)|=M\};$$

désignons par D_i, $i=0$ et 1, le domaine doublement connexe de frontière F_0+C_i, et par $\varphi_i(\zeta)$ et $\omega_i(z,\zeta)$ les fonctions définies sur la frontière F_0+C_i de D_i par les formules

$$\varphi_i(\zeta)=\begin{cases}1 & \text{sur } F_0,\\ A & \text{sur } C_i,\end{cases}\qquad \omega_i(z,\zeta)=\frac{|z-\zeta|}{[\varphi_i(z)\varphi_i(\zeta)]^\lambda}.$$

Soit $y^{(n)}=\{y_0,y_1,\dots,y_n\}$ un système extrémal de l'ensemble F_0+C_i correspondant à $\varphi_i(\zeta)$, et $\nu_i=\nu_i(\lambda,n)$ le nombre de points du système $y^{(n)}$ qui sont situés sur C_i. Comme dans la formule (14), la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_i(\lambda,n)}{n}=a_i(\lambda)=a_i \qquad (i=0,1)$$

existe.

Le continu F_0 est la frontière intérieure commune des trois domaines D_0,D,D_1, et on a $D_0\subset D\subset D_1$, d'où l'on conclut que $\nu_0(\lambda,n)\leqslant\nu(\lambda,n)\leqslant\nu_1(\lambda,n)$; par suite,

$$a_0(\lambda)\leqslant a(\lambda)\leqslant a_1(\lambda).$$

Chaque système extrémal $y^{(n)}$ de l'ensemble F_0+C_i est régulier, donc, d'après la formule (33),

$$a_0(\lambda)=1-\lambda\frac{\log A}{\log m}\quad \text{si}\quad \lambda<\frac{\log m}{\log A},$$

$$a_1(\lambda)=1-\lambda\frac{\log A}{\log M}\quad \text{si}\quad \lambda<\frac{\log M}{\log A}.$$

Par suite, si $\lambda<\log m/\log A$, on a

$$1-\lambda\frac{\log A}{\log m}\leqslant a(\lambda)\leqslant 1-\lambda\frac{\log A}{\log M},$$

d'où résultent les inégalités (35).

4. Représentation conforme du domaine *D*. On sait que la fonction $\Phi(z,\lambda)$ est continue dans le plan entier et tend vers l'infini lorsque $z\to\infty$. Je dis que:

1. *Quel que soit z, on a*

$$\Phi(z,\lambda)^{1/\lambda}\geqslant\Phi(z,\lambda')^{1/\lambda'} \quad \textit{si}\quad 0<\lambda<\lambda'. \tag{36}$$

Démonstration. Posons

$$\Phi(z,\lambda')^{1/\lambda'}=K,$$

et soit z un point tel qu'on ait $K\geqslant A$, ce qui a lieu sur $F_1^{\lambda'}$ et dans le voisinage du point $z=\infty$. Considérons un système extrémal $x^{(n,\lambda)}=\{x_0,\dots,x_\mu,x_{\mu+1},\dots,x_n\}$ correspondant à λ; soient $x_0,\dots,x_\mu$ les points de ce système situés sur F_0 et $x_{\mu+1},\dots,x_n$ les points situés sur F_1. D'après (14), on a

$$\Phi_n(z,\lambda')\leqslant\sum_{j=0}^{n}|\Phi^{(j)}(z;\lambda',x^{(n,\lambda)})|=A_n+B_nA^{n\lambda'},$$

où l'on a posé

$$A_n=\sum_{j=0}^{\mu}|L^{(j)}(z;x^{(n,\lambda)})|,\qquad B_n=\sum_{j=\mu+1}^{n}|L^{(j)}(z;x^{(n,\lambda)})|,$$

donc

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n+B_nA^{n\lambda'}}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda')}=\Phi(z,\lambda')=K^{\lambda'}.$$

Il s'ensuit qu'au moins une des inégalités

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}\geqslant K^{\lambda'},\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{B_n}\geqslant\left(\frac{K}{A}\right)^{\lambda'}$$

est satisfaite, donc, étant $K\geqslant A>1$, on a soit

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}\geqslant K^{\lambda}\quad \text{soit}\quad \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{B_n}\geqslant\left(\frac{K}{A}\right)^{\lambda}. \tag{37}$$

Remarquons maintenant que $F_n(z,\lambda)=A_n+B_nA^{n\lambda}$ et que, $\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}\to\Phi(z,\lambda)$, donc, d'après (37),

$$\Phi(z,\lambda)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n+B_nA^{n\lambda}}\geqslant K^{\lambda}$$

et, par suite,

$$\Phi(z,\lambda)^{1/\lambda}\geqslant K=\Phi(z,\lambda')^{1/\lambda'}.$$

L'inégalité (36) a donc lieu sur $F_1^{\lambda'}$ et dans le voisinage du point $z=\infty$. Elle a lieu aussi sur F_0 et sur F_1^{λ}, car sur F_0 on a $\Phi(z,\lambda)=\Phi(z,\lambda')=1$, et sur F_1^{λ}

$$\Phi(z,\lambda)^{1/\lambda}=A\geqslant\Phi(z,\lambda')^{1/\lambda'}.$$

Par suite, l'inégalité (36) a lieu partout, car les fonctions $\log\Phi(z,\lambda)^{1/\lambda}$ et $\log\Phi(z,\lambda')^{1/\lambda'}$ sont harmoniques en dehors de l'ensemble $F_0+F_1^{\lambda}+F_1^{\lambda'}+$ le point ∞, c. q. f. d.

2. *Lorsque $\lambda\to 0$, l'ensemble F_1^{λ} tend vers F_1.*

En effet, désignons par $S^{\lambda\varepsilon}$ la somme des cercles $|z-\zeta|\leqslant\varepsilon$ de centre ζ, où ζ parcourt l'ensemble F^{λ}, et posons $F^{\lambda\varepsilon}=FS^{\lambda\varepsilon}$. Lorsque n est suffisamment grand, tous les points extrémaux $x_0,x_1,\dots,x_n$ correspondant à λ sont situés dans $F^{\lambda\varepsilon}$, donc

$$V(x^{(n)})\leqslant\max_{\zeta^{(n)}\epsilon F^{\lambda\varepsilon}}V(\zeta^{(n)})=V_n(F^{\lambda\varepsilon}),$$

et, par suite, d'après (25'),

$$V(\lambda,x^{(n)})\leqslant V_n(F^{\lambda\varepsilon})A^{-\lambda\varepsilon n},$$

d'où l'on déduit $v(\lambda, F) \leqslant v(F^{\lambda\varepsilon}) A^{-2\lambda\alpha}$. Mais, $v(F^{\lambda\varepsilon}) \to v(F^{\lambda})$ lorsque $\varepsilon \to 0$, donc $v(\lambda, F) \leqslant v(F^{\lambda}) A^{-2\lambda\alpha}$. En tenant compte de (28), on trouve

$$\frac{v(F_1)}{A^{\lambda(1+\alpha)}} \leqslant \frac{v(F^{\lambda})}{A^{2\lambda\alpha}},$$

et, comme $v(F^{\lambda}) \leqslant v(F_1)$, on a

$$\frac{v(F_1)}{A^{\lambda(1-\alpha)}} \leqslant v(F^{\lambda}) \leqslant v(F_1),$$

donc $v(F^{\lambda}) \to v(F_1)$ lorsque $\lambda \to 0$. Mais, on a vu dans § 1 que, si $F_1^{\lambda} \neq F_1$, on a $v(F^{\lambda}) < v(F_1)$, donc $F_1^{\lambda} \to F_1$ lorsque $\lambda \to 0$.

Il suit du théorème I que lorsque $\lambda \to 0$, le module de $\varphi(z, \lambda)$ tend dans le domaine D uniformément vers 1. Néanmoins, lorsque λ décroît, la puissance

$$|\varphi(z, \lambda)|^{1/\lambda} \qquad (z \in D),$$

ne décroit pas et reste plus grande que 1 et plus petite que A. On a vu plus haut (§ 2) que les fonctions de la famille

$$\psi(z, \lambda) = [\varphi(z, \lambda)]^{(1/1-\alpha(\lambda))} \qquad (0 < \lambda < \infty) \tag{38}$$

sont analytiques uniformes et univalentes dans D. Nous allons démontrer le

Théorème II. *Dans le domaine D la limite*

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi[(z, \lambda)]^{1/(1-\alpha(\lambda))} = \psi(z) \tag{39}$$

existe, la convergence étant uniforme dans D. La fonction $w = \psi(z)$ effectue la représentation conforme de ce domaine sur une couronne circulaire

$$1 < |w| < R \tag{40}$$

dont le module R satisfait aux inégalités

$$m \leqslant R \leqslant \min(M, N^2), \qquad \text{où} \quad N = \frac{v(F_1)}{v(F_0)}. \tag{41}$$

Démonstration. La famille (38) est normale dans D, car

$$1 \leqslant |\psi(z, \lambda)| \leqslant A^{\lambda/(1-\alpha(\lambda))}$$

et, d'après (35),

$$m \leqslant A^{\lambda/(1-\alpha(\lambda))} \leqslant M. \tag{42}$$

Posons

$$\sigma(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - \alpha(\lambda)},$$

et soit $\{\lambda_n\}$ une suite de valeurs de λ tendant vers zéro et telle que la suite $\{\psi(z, \lambda_n)\}$ soit convergente dans D. Désignons par $\psi(z)$ la limite

$$\lim_{n \to \infty} \psi(z, \lambda_n) = \psi(z), \tag{43}$$

et soit R une limite partielle de la suite numérique $\{A^{\sigma(\lambda_n)}\}$.

D'après le lemme précédent l'ensemble $F_1^{\lambda_n}$ tend vers F_1, donc le module de $\psi(z)$ est égal à 1 sur F_0 et à R sur F_1. Les fonctions $\psi(z, \lambda_n)$ sont univalentes dans D et la convergence (43) est uniforme, donc la fonction $\psi(z)$ et univalente dans D et effectue la représentation conforme de ce domaine sur la couronne circulaire (40).

Il suit immédiatement de ce résultat que la suite $\{A^{\sigma(\lambda_n)}\}$ ne peut pas avoir deux limites partielles différentes, car il n'existe pas de transformation conforme de deux couronnes $1 < |w| < R$ et $1 < |w| < R_1$ l'une sur l'autre lorsque $R \neq R_1$. Pareillement, la famille (38) ne peut pas avoir deux fonctions limites différentes lorsque $\lambda \to 0$, donc il existe une seule limite (39).

D'après (42), le nombre R est contenu dans l'intervalle $m \leqslant R \leqslant M$, et, d'après (34), on a

$$A^{\lambda/(1-\alpha(\lambda))} \leqslant N^2,$$

donc $R \leqslant N^2$, c. q. f. d.

5. Remarques. 1. On a vu que, pour chaque $\lambda > 0$ fixe, la fonction

$$w = \psi(z, \lambda) = [\varphi(z, \lambda)]^{1/(1-\alpha(\lambda))}$$

est uniforme et univalente dans le domaine D et que son module reste continu sur la frontière de D et y satisfait aux égalités

$$\psi(z, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad F_0, \\ A^{\lambda/(1-\alpha(\lambda))} & \text{sur} \quad F_1^{\lambda}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que, si $F_1^{\lambda} = F_1$ pour une valeur $\lambda_0 > 0$ de λ, la fonction

$$w = \psi(z, \lambda_0)$$

effectue la représentation conforme de D sur la couronne circulaire

$$1 < |w| < R, \qquad \text{où} \quad R = A^{\lambda_0/(1-\alpha(\lambda_0))},$$

et le passage à la limite (39) est superflu.

Il est probable qu'on ait $F_1^\lambda = F_1$ lorsque λ satisfait à la condition

$$A^\lambda < m = \min_{z \in F_1} |g_0(z)|,$$

mais je n'ai pas réussi à le démontrer.

2. Il est probable que dans l'évaluation (41) du module R le nombre N^2 puisse être remplacé par N.

3. La méthode exposée dans ce travail peut être étendue à la construction de la fonction effectuant la représentation conforme du domaine donné D sur les domaines doublement connexes plus généraux que la couronne circulaire. A cet effet, on doit remplacer la fonction frontière $\varphi(\zeta)$ par une autre convenablement choisie.

Articles cités

[1] F. Leja, *Une généralisation de l'écart et du diamètre transfini d'un ensemble*, Ann. Soc. Pol. Math. 22 (1950), p. 35-42.

[2] — *Sur une famille de fonctions analytiques*, ibidem 25 (1952), p. 1-16.

[3] — *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, ibidem 12 (1933), p. 57-71.

[4] — *Sur une suite de polynômes et la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle*, ibidem 14 (1935), p. 116-134.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Haantjes and Alt curvatures in abstract metric spaces

by A. Pliś (Kraków)

Haantjes has shown that in metric spaces of the Fréchet's type the curve may have a Haantjes curvature without having an Alt curvature, and all the more without having a Menger curvature[1]). In Haantjes' example his curvature equals 2 (while the Alt upper curvature is finite). It is known, that in certain spaces (*e. g.* Euclidean, eliptical) every curve for which Haantjes curvature equals zero in every point, is geodesic. In this note we exemplify *the curve for every point p of which the Haantjes curvature is equal to zero and which in no point has an Alt curvature.* (The Alt upper curvature for that curve is equal $+\infty$.) Hence it does not possess a Menger curvature.

1. Let us consider a segment $[0, 1/2]$. The distance of two points of this segment is expressed by

$$\varrho(p_1, p_2) = |\tau_1 - \tau_2|,$$

where τ_i is a Cartesian coordinate of point p_i.

Now let us introduce for this segment a new metric

$$\varrho^*(p_1, p_2) = f(|\tau_1 - \tau_2|) \tag{1}$$

which fulfils Fréchet's axioms $\big(\varrho^*(p,p) = 0,\ \varrho^*(p,q) = \varrho^*(q,p) > 0$ for $p \neq q$, and $\varrho^*(p,q) + \varrho^*(q,r) \geqslant \varrho^*(p,r)\big)$ and by which the segment $[0, 1/2]$ becomes arc L in a certain non Euclidean space.

Owing to some properties of the function $f(u)$ the arc L has a Haantjes curvature equal to zero at every point and does not have an Alt curvature.

2. In order to define the function $f(u)$, we introduce the following notations

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

$$b_n = \frac{a_n - a_n^4}{1 - a_{n+1}^3}. \tag{3}$$

1) Compare [1] and [2].