Contribution à la théorie de la formule simpsonienne des quadratures approchées

par S. Gołąb (Kraków) et C. Olech (Kraków)

En nous reportant aux résultats et aux notations du travail précédent[1]), nous nous occuperons maintenant du problème suivant:

Soit $f(x)$ une fonction régulière dans le voisinage du point $x=a$, ayant le développement

$$f(a+h)=f(a)+a_p h^p+a_q h^q+a_r h^r+a_s h^s+g(h), \tag{1}$$

où $a_p, a_q, a_r, a_s \neq 0$, les entiers positifs p,q,r,s satisfont aux inégalités

$$1 \leqslant p<q<r<s \tag{2}$$

et la fonction $g(h)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à s. Θ étant un nombre déterminé choisi à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$, posons

$$P(h)=\int_a^{a+h} f(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\bar{P}(h)=h[\lambda_0 f(a)+\lambda_1 f(a+\Theta h)+\lambda_2 f(a+h)], \tag{4}$$

$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ désignant des coefficients constants indépendants de h (mais qui peuvent dépendre de Θ)

$$R(h)=P(h)-\bar{P}(h). \tag{5}$$

Le premier problème dont nous occuperons est: comment doit-on choisir les coefficients λ_i pour que la fonction $R(h)$ soit un infiniment petit d'un ordre aussi grand que possible par rapport à h?

---

[1]) Voir S. Gołąb, *Contribution à la formule simpsonienne de quadrature approchée*, Ann. Pol. Math., ce volume, p. 166-175.

On a

$$P^{(n)}(h)=f^{(n-1)}(h) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

et

$$\bar{P}^{(n)}(h)=n\{\lambda_1\Theta^{n-1}f^{(n-1)}(a+\Theta h)+\lambda_2 f^{(n-1)}(a+h)\}$$
$$+h\{\lambda_1\Theta^n f^{(n)}(a+\Theta h)+\lambda_2 f^{(n)}(a+h)\} \quad \text{pour} \quad n=2,3,\ldots$$

alors que

$$\bar{P}'(h)=\lambda_0 f(a)+\lambda_1 f(a+\Theta h)+\lambda_2 f(a+h)+h[\Theta\lambda_1 f'(a+\Theta h)+\lambda_2 f'(a+h)].$$

On tire de là

$$P^{(n)}(0)=f^{(n-1)}(a),$$

$$\bar{P}^{(n)}(0)=f^{(n-1)}(a)\,n\{\lambda_1\Theta^{n-1}+\lambda_2\} \quad \text{pour} \quad n=2,3,\ldots, \tag{6}$$

$$\bar{P}'(0)=f(a)[\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2].$$

On a donc

$$R'(0)=f(a)[1-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)],$$

$$R^{(n)}(0)=f^{(n-1)}(a)[1-\lambda_1 n\Theta^{n-1}-\lambda_2 n] \qquad (n=2,3,\ldots). \tag{7}$$

Il s'ensuit du développement (1) que

$$f^{(k)}(a)\neq 0 \quad \text{pour} \quad k=p,q,r,s. \tag{8}$$

Par contre,

$$f^{(i)}(a)=0 \quad \text{pour} \quad 1\leqslant i\leqslant s, \quad i\neq p,q,r,s. \tag{9}$$

Puisque l'ordre de l'infiniment petit $R(h)$ sera maximum quand le nombre de dérivées succesives $R^{(i)}(0)$ égales à zéro sera le plus grand possible, les formules (7), (8) et (9) montrent que l'on doit satisfaire au plus grand nombre possible des relations successives

$$f(a)[1-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)]=0, \tag{10}$$

$$1-(p+1)\,\Theta^p\lambda_1-(p+1)\lambda_2=0, \tag{11}$$

$$1-(q+1)\,\Theta^q\lambda_1-(q+1)\lambda_2=0, \tag{12}$$

$$1-(r+1)\,\Theta^r\lambda_1-(r+1)\lambda_2=0, \tag{13}$$

$$1-(s+1)\,\Theta^s\lambda_1-(s+1)\lambda_2=0. \tag{14}$$

Remarquons que λ_0 ne figure que dans la première équation. Les inconnues λ_1, λ_2 figurent linéairement dans toutes les autres. On voit de (4) que, si $f(a)=0$, la valeur de λ_0 n'influe pas sur $\bar{P}(h)$. Si, par contre, $f(a)\neq 0$, on détermine la valeur de λ_0 par la relation

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1. \tag{15}$$

Les inconnues restantes λ_1 et λ_2 peuvent être calculées univoquement des équations (11) et (12) dont le déterminant W est différent de zéro

$$W=\begin{vmatrix}(p+1)\Theta^p & p+1\\ (q+1)\Theta^q & q+1\end{vmatrix}=(p+1)(q+1)(\Theta^p-\Theta^q)>0. \tag{16}$$

On en tire

$$\lambda_1=\frac{q-p}{W},\qquad \lambda_2=\frac{(p+1)\Theta^p-(q+1)\Theta^q}{W}. \tag{17}$$

On a donc la proposition suivante:

Proposition. *Si Θ est un nombre donné d'avance de l'intervalle ouvert $(0,1)$, si les coefficients λ_1,λ_2 sont tirés des formules* (17), *et λ_0, pour $f(a)\neq 0$, satisfait à la relation* (15), *alors $R(h)$ est un infiniment petit d'ordre maximum.*

Remarquons que les coefficients λ_i ne dépendent que des nombres p,q,Θ et ne dépendent pas, par contre, des valeurs des coefficients a_p,a_q.

L'ordre de l'infiniment petit $R(h)$ est pour ce choix des coefficients λ_i au moins égal à $r+1$.

Posons maintenant un autre problème. Etant données p,q,r,s, peut-on choisir Θ de manière à élever encore plus ordre de l'infiniment petit $R(h)$, c'est-à-dire d'arriver à l'annulation de $R^{(r+1)}(0)$.

Puisque $f^{(r)}(a)\neq 0$, on n'aura

$$R^{(r+1)}(0)=0$$

que dans le cas où avec les équations (10), (11), (12) sera également vérifiée la relation (13).

Si l'on considère le système d'équations

$$\begin{aligned}1-(p+1)\Theta^p\lambda_1-(p+1)\lambda_2&=0,\\ 1-(q+1)\Theta^q\lambda_1-(q+1)\lambda_2&=0,\\ 1-(r+1)\Theta^r\lambda_1-(r+1)\lambda_2&=0,\end{aligned} \tag{18}$$

comme système d'équations homogènes aux inconnues $1,\lambda_1,\lambda_2$, on constate que le déterminant Δ des coefficients doit disparaître, c'est-à-dire que

$$\Delta=\begin{vmatrix}(p+1)\Theta^p & p+1 & -1\\ (q+1)\Theta^q & q+1 & -1\\ (r+1)\Theta^r & r+1 & -1\end{vmatrix}=0. \tag{19}$$

En posant

$$\alpha=q-p,\qquad \beta=r-q \tag{20}$$

on peut écrire l'équation (19) sous la forme

$$\Delta(\Theta)=\alpha(r+1)\Theta^{\alpha+\beta}-(\alpha+\beta)(q+1)\Theta^\alpha+\beta(p+1)=0. \tag{21}$$

Remarquons que α et β sont des entiers positifs. L'équation (21) est donc une équation algébrique de degré $(\alpha+\beta)$ (trinôme). Montrons que cette équation a une racine unique Θ_0 comprise à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$.

On a en effet

$$\begin{aligned}\Delta'(\Theta)&=(\alpha+\beta)\alpha(r+1)\Theta^{\alpha+\beta-1}-\alpha(\alpha+\beta)(q+1)\Theta^{\alpha-1}\\ &=\alpha(\alpha+\beta)\Theta^{\alpha-1}[(r+1)\Theta^\beta-(q+1)].\end{aligned}$$

On tire de là

$$\Delta(0)=\beta(p+1)>0,\qquad \Delta(1)=0,\qquad \Delta'(1)=\alpha(\alpha+\beta)\beta>0.$$

Il est évident, que $\Delta(\Theta)<0$ dans le voisinage à gauche du point $\Theta=1$. Il s'ensuit que $\Delta(\Theta)$ s'annule au moins une fois à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$. Si l'on parvient à montrer que la dérivée $\Delta'(\Theta)$ s'annule une fois à l'intérieur de $(0,1)$, on démontrera en même temps que l'équation (21) a exactement une racine dans l'intervalle $(0,1)$. L'équation $\Delta'(\Theta)=0$ envisagée dans l'intervalle cuvert $(0,1)$ est équivalente à l'équation

$$(r+1)\Theta^\beta-(q+1)=0$$

qui n'a qu'une racine réelle $\overline{\Theta}$ s'exprimant par la formule

$$\overline{\Theta}=\sqrt[\beta]{\frac{q+1}{r+1}},$$

où $0<\overline{\Theta}<1$ puisque $q<r$.

On a démontré par la même que l'équation (21) a exactement une racine Θ_0 à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$.

Remarquons que cette racine Θ_0 peut être calculée dans certains cas par une voie algébrique. Ainsi, par exemple, si $\beta=\alpha$, c'est-à-dire si

$$q=p+\alpha,\qquad r=q+\beta=q+\alpha=p+2\alpha,$$

l'équation (21) aura la forme

$$\alpha(2\alpha+p+1)\Theta^{2\alpha}-2\alpha(\alpha+p+1)\Theta^\alpha+\alpha(p+1)=0,$$

ce qui conduit à une équation de degré 2 en Θ^α qui a la solution

$$\Theta_0^\alpha=\frac{p+1}{p+1+2\alpha},$$

d'où

$$\Theta_0 = \sqrt[a]{\frac{p+1}{p+1+2a}}.$$

Dans le cas où $\beta=2a$, l'équation algébrique (21) se réduit à une équation de troisième degré dont une des racines est égale à 1 et dont la solution en Θ_0 s'exprimera algébriquement par la formule

$$\Theta_0 = \sqrt[a]{\frac{-3a-p-1+\sqrt{9a^2+30a(p+1)+9(p+1)^2}}{2(3a+p+1)}}.$$

De même, pour $\beta=3a$, on obtient pour Θ_0^a une équation de degré 4 qui se réduit (après division par Θ_0^a-1) à une équation de degré 3 à laquelle est applicable la formule de Cardano. On obtiendra ainsi Θ_0 sous une forme algébrique des variables a et p.

Pareillement le cas $a=2\beta$ et les autres conduisent à une solution algébrique pour Θ_0.

On peut montrer que la seule et unique racine Θ_0 de l'équation (21) dans l'intervalle (0,1) vérifie l'inégalité

$$\Theta_0 \geqslant \frac{1}{2},$$

le signe d'égalité ne pouvant avoir lieu que dans le cas où $p=1$, $q=2$, $r=3$ (méthode pareille à celle qui se trouve dans le travail).

D'autre part, le nombre Θ_0 doit satisfaire à l'inégalité

$$\Theta_0 < \bar{\Theta} = \sqrt[r-q]{\frac{q+1}{r+1}}.$$

En choisissant $\Theta=\Theta_0$, on aura

$$R^{(r+1)}(a)=0 \tag{22}$$

et, par conséquent, $R(h)$ sera pour ce choix de Θ un infiniment petit d'ordre $(r+2)$ au moins.

Des relations (8) et (9) résulte qu'il sera un infiniment petit d'ordre au moins égal à $(s+1)$.

Nous allons maintenant montrer que l'ordre de petitesse de $R(h)$ est exactement égale à $(s+1)$.

Nous allons nous servir de la méthode de réduction a l'absurde et nous supposerons que cet ordre est au moins égal à $(s+2)$, c'est-à-dire que

$$R^{(s+1)}(0)=0. \tag{23}$$

Puisque

$$R^{(s+1)}(0)=f^{(s)}(a)[1-\lambda_1\Theta_s(s+1)-\lambda_2(s+1)]$$

et $f^{(s)}(a)\neq 0$, le système d'équations (10)-(14) devrait être satisfait pour

$\Theta=\Theta_0$. En particulier le système d'équations (11), (12) et (14) devrait être satisfait, d'où découlerait la relation

$$\begin{vmatrix} (p+1)\Theta^p & p+1 & -1 \\ (q+1)\Theta^q & q+1 & -1 \\ (s+1)\Theta^s & s+1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

c'est-à-dire, en désignant

$$\gamma = s-q, \tag{25}$$

l'équation

$$a(s+1)\,\Theta^{a+\gamma}-(a+\gamma)(q+1)\,\Theta^a+\gamma(p+1)=0. \tag{26}$$

Il en résulterait que les équations (21) et (26) devraient avoir la même racine Θ_0. Nous allons montrer que c'est impossible. Une démonstration directe de ce fait par une voie algébrique ne semble pas facile. Nous le montrerons en employant une méthode détournée, un peu artificielle. L'efficacité de la méthode choisie réside dans ce que les coefficients (entiers) des équations (21) et (26) dépendent également des exposants des puissances de ces équations. Afin de ne pas interrompre le cours de la démonstration, nous allons prouver auparavent la proposition auxiliaire suivante:

L'équation transcendante

$$a^x = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \tag{27}$$

où $a>0$ et $a\neq 1$, $\gamma\neq 0$, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, peut avoir au plus trois racines réelles différentes.

Remarque. L'équation du type (27) *peut* avoir 3 racines différentes. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer l'équation

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{4-x}{2x+4}$$

qui a trois racines: 0,1,2.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Il est évident que chaque racine de l'équation (27) vérifie l'équation

$$a^x(\gamma x+\delta)-(\alpha x+\beta)=0. \tag{28}$$

Si donc on parvient à montrer que l'équation (28) peut avoir au plus 3 racines, la proposition auxiliaire sera par là même démontrée. Désignons par $F(x)$ le premier membre de l'équation (28). On a

$$F''(x)=a^x\{\gamma(\ln a)^2x+2\gamma\ln a+\delta(\ln a)^2\}.$$

On voit de là que l'équation $F''(x)=0$ peut avoir au plus une racine. Il s'ensuit que l'équation $F(x)=0$, où la fonction $F(x)$ est déterminée pour tous les x, ne peut avoir plus que trois racines réelles différentes.

Ecrivons maintenant la relation

$$\alpha(r+1)\,\Theta_0^{\alpha+\beta}-(\alpha+\beta)(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}+\beta(p+1)=0 \tag{29}$$

sous la forme suivante (en remplaçant β par x)

$$\alpha(x+q+1)\,\Theta_0^{\alpha+x}-(\alpha+x)(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}+x(p+1)=0. \tag{30}$$

Désignons par $\Phi(x)$ le premier membre de cette équation et considérons α,p,q,Θ comme des *constantes fixées*, x comme une *variable réelle*. Dans ce cas la relation (29) peut être récrite sous la forme

$$\Phi(\beta)=0.$$

Par contre, comme il est facile de le voir, la relation

$$\alpha(s+1)\,\Theta_0^{\alpha+\gamma}-(\alpha+\gamma)(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}+\gamma(p+1)=0 \tag{31}$$

s'écrira brièvement

$$\Phi(\gamma)=0.$$

Remarquons que l'on a

$$\Phi(0)=\alpha(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}-\alpha(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}=0$$

et que

$$\Phi(-\alpha)=\alpha(q+1-\alpha)-\alpha(p+1)=\alpha(p+1)-\alpha(p+1)=0.$$

Il s'ensuit de là que l'équation

$$\Phi(x)=0$$

a au moins 4 racines différentes $-\alpha,0,\beta,\gamma$ puisque $\gamma=s-q>r-q=\beta$ à cause de l'inégalité $r<s$.

Or l'équation (30) peut être récrite sous la forme équivalente

$$\Theta_0^{x}=\frac{\lambda x+\mu}{\nu x+\varrho}, \tag{32}$$

où l'on a posé pour abréger

$$\begin{aligned}\lambda&=(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}-(p+1),\\ \mu&=\alpha(q+1)\,\Theta_0^{\alpha},\\ \nu&=\alpha\,\Theta_0^{\alpha},\\ \varrho&=\alpha(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}\end{aligned} \tag{33}$$

(l'équivalence résulte de ce que la valeur $x_0=-q-1$ qui annule le dénominateur de la fonction homographique du deuxième membre de (32) n'annule pas son nominateur puisque

$$\lambda x_0+\mu=\alpha(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}-(q+1)[-(p+1)+(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}]$$
$$=(q+1)[\alpha\Theta_0^{\alpha}+(p+1)-(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}]=(p+1)(q+1)(1-\Theta_0^{\alpha})>0).$$

On a ici

$$\gamma>0,\qquad \lambda\varrho-\mu\nu=\alpha(q+1)^2\,\Theta_0^{2\alpha}-\alpha(p+1)(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}-\alpha^2(q+1)\,\Theta_0^{2\alpha}$$
$$=\alpha(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}[(q+1-\alpha)\,\Theta_0^{\alpha}-(p+1)]=\alpha(q+1)\,\Theta_0^{\alpha}(p+1)[\Theta_0^{\alpha}-1]<0.$$

En appliquant la proposition auxiliare, on arrive à la conclusion que l'équation (32) peut avoir au plus trois racines réelles tandis qu'elle a 4 racines différentes!

On voit que la supposition faite sur le nombre Θ_0 (qu'il vérifie également l'équation (26)) a conduit à une contradiction. Par là même il a été démontré que l'ordre de l'infiniment petit $R(h)$ est égal exactement à $(s+1)$. La proposition suivante reste prouvée:

Proposition. *Si l'on pose $\Theta=\Theta_0$, où Θ_0 est l'unique racine de l'équation* (21), *située à l'intérieur de* $(0,1)$ *et si l'on admet que $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ aient leurs valeurs déterminées par les relations* (15) *et* (17), *alors $R(h)$ est un infiniment petit d'ordre maximum égale à* $(s+1)$.

Si l'on considère p,q,r,s comme fixés, la valeur de Θ_0 qui vérifie l'équation (21) sera une certaine fonction des variables p,q,r:

$$\Theta_0=A(p,q,r)$$

qui par leur nature même sont des entiers positifs. Il s'ensuit que l'ensemble de toutes les valeurs Θ_0, est dénombrable. Si donc l'on se donne d'avance une valeur Θ, à l'intérieur de $(0,1)$, $R(h)$ sera généralement un infiniment petit d'ordre $(r+1)$ et ne sera „qu'exceptionnellement" un infiniment petit d'ordre $(s+1)$.

On peut en outre montrer que $\lim\sup A(p,q,r)=1$.