Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondeés en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, Géométrie et la Théorie des Nombres.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – WARSZAWA 1954

Nakład 885 egz. Podpisano do druku 26.V.1954 r.
Ark. wyd. 13,5, druk. 13 Druk ukończono w czerwcu 1954 r.
Papier druk. sat. kl. III, 100 g, 70×100 Zamówienie nr 509/53
Cena zł 17,55 F-4-19254

Wrocławska Drukarnia Naukowa – Wrocław, ul Świerczewskiego 19.

Une modification du théorème de l'Hôpital liée au problème du prolongement des intégrales des équations différentielles

par T. Ważewski (Kraków)

Le théorème 2 du présent travail a été communiqué sans démonstration, sous une forme un peu différente, dans ma note antérieure [1]. Un théorème sur le prolongement des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires (cf. théorème 3) en est une conséquence immédiate. L'analyse de ma démonstration primitive du théorème 2 m'a conduit à la remarque que ce dernier est, à son tour, la conséquence d'une modification du théorème de l'Hôpital correspondant au symbole $0/0$ (cf. théorème 1). Quelques lemmes sur la localisation des fonctions (lemmes 1 et 4) servent de base à la démonstration du théorème 1. Ils sont, paraît-il, intéressants par eux-mêmes parce qu'ils sont doués de plusieurs applications dans la théorie des équations différentielles. Ils méritent aussi, peut-être, un certain intérêt à cause de leur caractère „épidermique" (cf. [4] et la remarque 1).

Tous les résultats sont énoncés pour les fonctions dont les valeurs appartiennent à l'espace vectoriel de Banach à norme homogène.

Les résultats du présent article sont doués d'une généralisation au cas où les dérivées ordinaires sont remplacées par les dérivées contingentielles ou par les bouts différentielles que j'ai introduits dans mes articles antérieurs [2] et [3] (cf. remarque 3).

§ 1. Notations. Nous désignerons par $F'_+(x)$ et $F'_-(x)$ les dérivées à droite et à gauche de la fonction $F(x)$, dont les valeurs peuvent être réelles ou peuvent appartenir à un espace vectoriel de Banach.

Nous désignerons respectivement par $\overline{D}_+\lambda(x), \underline{D}_+\lambda(x), \overline{D}_-\lambda(x), \underline{D}_-\lambda(x)$ les nombres dérivés supérieur à droite, inférieur à droite, supérieur à gauche et inférieur à gauche de la fonction réelle $\lambda(x)$.

La variable x est considérée comme réelle.

§ 2. 1. Lemme de A. Zygmund[1]**.** *Soit Z un ensemble au plus dénombrable contenu dans un intervalle Θ et $\lambda(x)$ une fonction continue dans Θ. Si $\underline{D}_+\lambda(x)\leqslant 0$ $\big($ou $\underline{D}_-\lambda(x)\leqslant 0\big)$ lorsque $x\epsilon\Theta-Z$ alors $\lambda(x)$ est décroissante au sens large dans Θ. Si $\overline{D}_+\lambda(x)\geqslant 0$ $\big($ou $\underline{D}_-\lambda(x)\geqslant 0\big)$ dans $\Theta-Z$ alors $\lambda(x)$ est croissante au sens large dans Θ.*

LEMME 1. *Soit Z un ensemble au plus dénombrable contenu dans un intervalle Θ; $\lambda(x)$ une fonction continue dans Θ; $\xi\epsilon\Theta$; $\eta(x)$ une fonction continue dans Θ et telle que $\eta(x)>0$ lorsque $x\epsilon\Theta$.*

Si

(1.1) $$\lambda(\xi)\leqslant 0,$$

(1.2) $$\operatorname{sign}(x-\xi)\underline{D}_+\lambda(x)\leqslant 0 \quad \textit{lorsque} \quad x\epsilon\Theta-Z,\ x\neq\xi,\ 0<\lambda(x)<\eta(x)$$

alors

(1.3) $$\lambda(x)\leqslant 0 \quad \textit{lorsque} \quad x\epsilon\Theta.$$

Ce lemme reste vrai lorsqu'on remplace dans (1.2), $\underline{D}_+\lambda(x)$ par $\underline{D}_-\lambda(x)$.

Démonstration. (1.3) a lieu pour $x=\xi$ $\big($cf. (1.1)$\big)$. Envisageons d'abord le cas

(1.4) $$x>\xi, \quad \operatorname{sign}(x-\xi)=1, \quad x\epsilon\Theta.$$

Supposons que (1.3) n'ait pas lieu pour un $x=x_0$ satisfaisant à (1.4). On aura

$$x_0>\xi, \quad \operatorname{sign}(x_0-\xi)=1, \quad x_0\epsilon\Theta, \quad \lambda(x_0)>0.$$

$\lambda(x)$ étant continue et $\lambda(\xi)\leqslant 0$, il existe un ξ_0 tel que

(1.5) $$\xi\leqslant\xi_0<x_0, \quad \lambda(\xi_0)=0, \quad \lambda(x)>0 \quad \text{pour} \quad \xi_0<x\leqslant x_0.$$

Comme $0=\lambda(\xi_0)<\eta(\xi_0)$ et λ et η sont continues dans Θ, il existe un x_1 tel que

(1.6) $$\xi_0<x_1\leqslant x_0 \quad \text{et} \quad 0<\lambda(x)<\eta(x) \quad \text{pour} \quad \xi_0<x\leqslant x_1.$$

En vertu de (1.2) et (1.4) on aura donc

$$\underline{D}_+\lambda(x)\leqslant 0 \quad \text{lorsque} \quad x\epsilon[\xi_0,x\,]-Z_1$$

où Z_1 désigne l'ensemble au plus dénombrable composé des points ξ_0 et x_1 et de l'ensemble $Z\cdot[\xi_0,x_1]$. En appliquant le lemme de A. Zygmund à l'intervalle $[\xi_0,x_1]$, on conclut que $\lambda(x)$ y est décroissante au sens large et qu'en particulier, $\lambda(\xi_0)\geqslant\lambda(x_1)$. Ceci est impossible, car, en vertu de (1.5) et (1.6) on a $\lambda(\xi_0)=0$, $\lambda(x_1)>0$.

La démonstration de l'inégalité (1.3) pour $x<\xi$ est tout-à-fait analogue.

---

[1] Cf., par exemple, S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Warszawa 1933, p. 173.

LEMME 2. *Soit $h(x)$ une fonction continue et monotone au sens strict dans un intervalle Θ et soit $h(\xi)=0$. Cela posé on a*

(1.7) $$[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,|h(x)|'_+=|h'_+(x)|,$$

(1.8) $$[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,|h(x)|'_-=|h'_-(x)|$$

lorsque

(1.9) $$x\neq\xi, \quad x\epsilon\Theta \ \textit{et} \ h'_+(x) \ \big(\textit{ou} \ h'_-(x)\big) \ \textit{existe}.$$

Démonstration. Si $h(x)$ est croissante on a évidemment pour tous les x satisfaisant à (1.9)

$$|h(x)|=[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,h(x), \qquad h'_+(x)\geqslant 0, \qquad h'_+(x)=|h'_+(x)|$$

et, par suite,

$$|h(x)|'_+=[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,h'_+(x)=[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,|h'_+(x)|.$$

Si $h(x)$ est décroissante, on a, pour les x satisfaisant à (1.9)

$$|h(x)|=-[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,h(x), \qquad 0\geqslant h'_+(x)=-|h'_+(x)|$$

et, par suite,

$$|h(x)|'_+=-[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,h'_+(x)=[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,|h'_+(x)|;$$

(1.7) se trouve ainsi établi. La démonstration de (1.8) est analogue.

LEMME 3. *Soit x une variable réelle et $\Phi(x)$ une fonction dont les valeurs appartiennent à un espace vectoriel de Banach à norme homogene. Si au point x la dérivée $\Phi'_+(x)$ ou $\Phi'_-(x)$ existe, on a respectivement*

$$\big|\overline{D}_+|\Phi(x)|\big|\leqslant|\Phi'_+(x)|, \qquad \big|\underline{D}_+|\Phi(x)|\big|\leqslant|\Phi'_+(x)|,$$
$$\big|\overline{D}_-|\Phi(x)|\big|\leqslant|\Phi'_-(x)|, \qquad \big|\underline{D}_-|\Phi(x)|\big|\leqslant|\Phi'_-(x)|.$$

Ce lemme résulte immédiatement de l'inégalité

$$\left|\frac{|\Phi(x+h)|-|\Phi(x)|}{h}\right|\leqslant\left|\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}\right|$$

lorsqu'on choisit pour h une suite convenable de valeurs $h_n\neq 0$, $h_n\to 0$.

LEMME 4. Prémisses. *Z est un ensemble au plus dénombrable appartenant à un intervalle Θ, $\Phi(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions continues dans Θ et ayant les dérivées finies $\Phi'_+(x)$ et $g'_+(x)$ $\big($ou $\Phi'_-(x)$ et $g'_-(x)\big)$ dans $\Theta-Z$; $g(x)$ est une fonction réelle monotone dans Θ et les valeurs de $\Phi(x)$ appartiennent à un espace de Banach à norme homogène; $\delta>0$ est un nombre fixe et $\xi\epsilon\Theta$.*

On a

$$(1.10)\qquad |\Phi'_+(x)|\leqslant|g'_+(x)| \qquad (ou\ |\Phi'_-(x)|\leqslant|g'_-(x)|)$$

lorsque

$$(1.11)\qquad x\neq\xi,\qquad x\in\Theta-Z,\qquad 0<|\Phi(x)-\Phi(\xi)|-|g(x)-g(\xi)|<\eta(x)$$

où $\eta(x)$ est une fonction continue et positive dans Θ.

Thèse.

$$(1.12)\qquad |\Phi(x)-\Phi(\xi)|\leqslant|g(x)-g(\xi)| \quad pour \quad x\in\Theta.$$

Démonstration. Posons

$$(1.13)\qquad \lambda(x)=|\Phi(x)-\Phi(\xi)|-|g(x)-g(\xi)|.$$

La fonction $h(x)=g(x)-g(\xi)$ est monotone et continue dans Θ et $h(\xi)=0$. On a donc, en vertu du lemme 2,

$$(1.14)\qquad |g(x)-g(\xi)|'_+=[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,|g'_+(x)| \quad \text{lorsque} \quad x\neq\xi,\ x\in\Theta-Z.$$

Afin d'établir (1.12) il suffit de prouver que

$$(1.15)\qquad \lambda(x)\leqslant 0 \quad \text{lorsque} \quad x\in\Theta.$$

Appliquons à cet effet le lemme 1.

On a

$$\lambda(\xi)=0.$$

Admettons que

$$(1.16)\qquad x\neq\xi,\qquad x\in\Theta-Z,\qquad 0<\lambda(x)<\eta(x).$$

On établira (1.15) lorsqu'on aura prouvé que

$$(1.17)\qquad [\operatorname{sign}(x-\xi)]\,\underline{D}_+\lambda(x)\leqslant 0.$$

Or (1.16) implique (1.11) et, par suite, aussi (1.10).

On a donc

$$(1.18)\qquad |\Phi'_+(x)|\leqslant|g'_+(x)|.$$

De (1.13) et (1.14) il résulte que

$$\underline{D}_+\lambda(x)=\underline{D}_+|\Phi(x)-\Phi(\xi)|-[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,|g'_+(x)|$$

et, par suite,

$$[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,\underline{D}_+\lambda(x)=[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,\underline{D}_+|\Phi(x)-\Phi(\xi)|-|g'_+(x)|.$$

Mais, en vertu du lemme 3, on a

$$\big|[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,\underline{D}_+|\Phi(x)-\Phi(\xi)|\big|=\big|\underline{D}_+|\Phi(x)-\Phi(\xi)|\big|\leqslant|\Phi'_+(x)|.$$

Des deux relations précédentes on obtient

$$[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,\underline{D}_+\lambda(x)\leqslant|\Phi'_+(x)|-|g'_+(x)|.$$

En appliquant (1.18), on en déduit (1.17), ce qui termine la démonstration de l'inégalité (1.15).

Remarque 1. Caractère „épidermique" des lemmes 1 et 4.

PROPOSITION 1. *Soit $\lambda(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 1$ (intervalle Θ) pour laquelle*

$$(1.19)\qquad \lambda(0)\leqslant 0.$$

Supposons, pour éviter les complications, que la dérivée $\lambda'(x)$ existe partout dans Θ et que l'inégalité forte

$$(1.20)\qquad \lambda'(x)<0$$

ait lieu lorsque

$$(1.21)\qquad \lambda(x)=0,\qquad 0\leqslant x<1.$$

On a alors

$$(1.22)\qquad \lambda(x)\leqslant 0 \quad lorsque \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Cette proposition est bien facile à démontrer.

L'hypothèse englobant les relations (1.20) et (1.21) exprime que $\lambda(x)$ a la *propriété* P suivante:

La dérivée $\lambda'(x)$ est *négative* en tout point x en lequel la courbe $y=\lambda(x)$ traverse la droite

$$(1.23)\qquad y=0.$$

La ligne $y=0$ „munie" de la propriété P constitue donc une *barrière* qui empêche la courbe $y=\lambda(x)$ vérifiant l'inégalité (1.19) de pénétrer dans la partie du plan située au dessus de la droite (1.23). On peut exprimer ce fait en disant que la proposition 1 à un caractère linéaire.

Remarquons que la proposition 1 diffère du lemme 1 par ce que l'inégalité (1.20) est forte tandis que l'inégalité $[\operatorname{sign}(x-\xi)]\,\underline{D}_+\lambda(x)\leqslant 0$ intervenant dans le lemme 1 (cf. (1.2)) est faible.

Remplaçons, dans la proposition 1, l'inégalité forte (1.20) par *l'inégalité faible*

$$(1.24)\qquad \lambda'(x)\leqslant 0 \quad \text{lorsque} \quad \lambda(x)=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Un exemple facile à construire montre que l'inégalité (1.22) n'a pas forcement lieu. La ligne $y=0$ „munie" de la propriété (1.24) ne représente plus de *barrière infranchissable* pour la ligne $y=\lambda(x)$.

On a cependant la suivante proposition constituant un cas particulier du lemme 1.

PROPOSITION 2. *Soit $\lambda(x)$ une fonction continue pour laquelle $\lambda(0)\leqslant 0$ et*

$$(1.25)\qquad \lambda'(x)\leqslant 0$$

lorsque

$$(1.26)\qquad 0\leqslant x<1,\qquad 0<\lambda(x)<\eta(x)$$

où $\eta(x)>0$ est une fonction continue dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 1$.

Cela posé on a

$$\lambda(x)\leqslant 0 \quad \textit{lorsque} \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Considérons la partie E du plan (x,y) définie par les inégalités

$$0\leqslant x\leqslant 1, \qquad 0<y<\eta(x) \qquad (\text{ensemble } E).$$

Cet ensemble constitue une sorte de *couche* reposant sur la droite $y=0$ et n'ayant aucun point commun avec cette droite. $\eta(x)$ représente l'épaisseur de la couche E et cette épaisseur varie avec x. L'hypothèse englobant les relations (1.25) et (1.26) exprime que la suivante propriété Q a lieu: on a $\lambda'(x)\leqslant 0$ pour les points de la ligne $y=\lambda(x)$ qui sont situés dans la *couche* E (et non pas sur la *ligne* $y=0$). La proposition 2 n'a donc pas un caractère linéaire comme la proposition 1. C'est maintenant la *couche* E „munie" de la propriété Q, qui constitue une barrière ne permettant pas à la ligne $y=\lambda(x)$ de pénétrer au dessus de la droite $y=0$.

Soit n un nombre naturel fixe arbitrairement grand. La proposition 2 reste évidemment vraie lorsqu'on on remplace $\eta(x)$ par $\eta(x)/n$. La couche E se trouve alors remplacée par la couche E_n

$$0\leqslant x\leqslant 1, \qquad 0<y<\frac{\eta(x)}{n} \qquad (\text{ensemble } E_n).$$

L'épaisseur $\eta(x)/n$ de cette couche tend vers zéro lorsque $n\to\infty$. Elle peut devenir arbitrairement petite lorsqu'on choisit n suffisamment grand.

Il convient donc mieux d'appeler E_n non pas couche mais „épiderme" (épiderme supérieure de la ligne $y=0$). En appelant épiderme aussi la couche primitive E on souligne que son épaisseur $\eta(x)>0$ peut être arbitrairement petite (infiniment petite suivant une terminologie courante).

C'est donc un épiderme arbitrairement mince, pour lequel a lieu la propriété Q, qui constitue une barrière ne permettant pas à la ligne $y=\lambda(x)$ de pénétrer au dessus de la droite $y=0$.

L'ensemble

$$x\,\epsilon\,\Theta-Z, \qquad x\neq\xi, \qquad 0<y<\eta(x),$$

correspondant à la relation (1.2) du lemme 1, constitue un „épiderme" jouant un rôle analogue. C'est en ce sens que les lemmes 1 et 4 ont le même caractère épidermique que la proposition 2 et n'ont pas de caractère linéaire comme la proposition 1.

§ 2. THÉORÈME 1. Prémisses. *$F(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle ouvert*

$$\Delta=(a,b),$$

où $a<b$ ou bien $a>b$; b est soit un nombre fini, soit $b=+\infty$ ou enfin $b=-\infty$. Les valeurs de $F(x)$ appartiennent à un espace vectoriel de Banach à norme homogène. La fonction réelle $g(x)$ est continue et monotone au sens strict dans Δ. L'ensemble Z est au plus dénombrable et appartient à Δ.

Les dérivées droites $F'_+(x)$, $g'_+(x)$ existent dans $\Delta-Z$ et

$$g'_+(x)\neq 0 \quad \textit{dans} \quad \Delta-Z \tag{2.1}$$

(ou $g'_-(x)\neq 0$ dans $\Delta-Z$),

$$\lim_{x\to b} g(x)=0, \tag{2.2}$$

$$\liminf_{x\to b}|F(x)|=0. \tag{2.3}$$

Pour toute suite $\{x_n\}$ telle que

$$x_n\,\epsilon\,\Delta-Z, \qquad x_n\to b, \qquad F(x_n)\to 0. \tag{2.4}$$

On a

$$\lim\frac{F'_+(x_n)}{g'_+(x_n)}=k, \tag{2.5}$$

où k désigne un élément de l'espace de Banach[2]).

Thèse.

$$\lim_{x\to b}\frac{F(x)}{g(x)}=k, \qquad \lim_{x\to b}F(x)=0, \tag{2.6}$$

$$\lim_{x\to b}\frac{F'_+(x)}{g'_+(x)}=k \quad \textit{lorsque } x \textit{ varie dans } \Delta-Z. \tag{2.7}$$

Un théorème analogue a lieu lorsqu'on remplace les dérivées à droite par les dérivées à gauche.

Démonstration. I. Il suffit de prouver le théorème au cas où

$$k=0. \tag{2.8}$$

En effet, introduisons la fonction auxiliaire

$$\Phi(x)=F(x)-kg(x).$$

Si les prémisses du théorème sont vérifiées pour $F(x), g(x)$ et k elles le sont évidemment aussi lorsqu'on remplace F, g, k par $\Phi, g, 0$.

Si, d'autre part, la thèse du théorème est vérifiée lorsqu'on remplace F, g, k par $\Phi, g, 0$ elle l'est aussi pour F, g, k.

Nous nous bornerons donc au cas où (2.8) a lieu.

II. Soit $1>\varepsilon>0$. En vertu de (2.3) et de l'hypothèse que (2.4) implique (2.5), il existe un c et un δ tels que

$$c\neq b, \qquad c\,\epsilon\,\Delta, \qquad 0<\delta<\varepsilon$$

et que

$$\left|\frac{F'_+(x)}{g'_+(x)}\right|\leqslant\varepsilon \tag{2.9}$$

lorsque

$$x\,\epsilon\,(c,b), \qquad x\,\epsilon\,\Delta-Z, \qquad |F(x)|\leqslant\delta. \tag{2.10}$$

---

[2]) La relation (2.5) peut être écrite sous la forme

$$\lim_{\substack{F(x)\to 0\\ x\to b}}\frac{F'_+(x)}{g'_+(x)}=k.$$

En vertu de (2.2) on peut choisir c de manière que l'on ait, en outre,

$$|g(x)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{lorsque} \quad x \in (c,b). \tag{2.11}$$

En vertu de (2.3), il existe une suite $\{\xi_n\}$ telle que

$$\xi_n \in (c,b), \quad \xi_n \to b, \quad F(\xi_n) \to 0. \tag{2.12}$$

On aura donc à partir d'un indice N

$$\xi_n \in (c,b), \quad |g(\xi_n)| < \frac{\delta}{4}, \quad |F(\xi_n)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{lorsque} \quad n \geqslant N. \tag{2.13}$$

Nous prouverons que

$$|F(x) - F(\xi_n)| \leqslant |\varepsilon g(x) - \varepsilon g(\xi_n)| \quad \text{lorsque} \quad x \in (c,b), \quad n \geqslant N. \tag{2.14}$$

Soit $n \geqslant N$. Comme la fonction $h(x) = \varepsilon g(x)$ est monotone il suffit à cet effet de prouver que (cf. lemme 4)

$$|F'_+(x)| \leqslant |\varepsilon g'_+(x)| \tag{2.15}$$

lorsque

$$x \in \varDelta - Z, \quad x \in (c,b), \quad 0 < |F(x) - F(\xi_n)| - |g(x) - g(\xi_n)| < \frac{\delta}{4}. \tag{2.16}$$

(La fonction $\eta(x)$ du lemme 4 a la forme: $\eta(x) = \delta/4 > 0$). Admettons que (2.16) ait lieu. On en obtient

$$|F(x)| \leqslant |F(\xi_n)| + |g(x)| + |g(\xi_n)| + \frac{\delta}{4}$$

et, par suite, en vertu de (2.13), (2.11), (2.12) on aura

$$|F(x)| \leqslant \delta.$$

Ceci rapproché de (2.16) exprime que (2.10) a lieu, d'où il résulte que l'inégalité (2.9) a lieu.

Nous avons ainsi prouvé que (2.15) a lieu pour les points x satisfaisant à (2.16). La relation (2.14) se trouve ainsi établie.

En passant à la limite $n \to \infty$, on obtient en vertu de (2.14), (2.12) et (2.2),

$$|F(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)| \quad \text{lorsque} \quad x \in (c,b). \tag{2.17}$$

La fonction $g(x)$ étant monotone au sens *strict* dans $\varDelta$, on a, en vertu de (2.2),

$$g(x) \neq 0 \quad \text{lorsque} \quad x \in (c,b).$$

Il s'ensuit donc de (2.17) que

$$\left|\frac{F(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{lorsque} \quad x \in (c,b),$$

ce qui prouve que

$$\lim_{x \to b} \frac{F(x)}{g(x)} = 0.$$

Cette relation rapprochée de (2.2) donne

$$\lim_{x \to b} F(x) = 0. \tag{2.18}$$

Les relations (2.6) se trouvent ainsi établies pour $k = 0$.

Afin de prouver (2.7) supposons $x_n \in \varDelta - Z$, $x_n \to b$. De (2.18) il résulte que $F(x_n) \to 0$. Les relations (2.4) ont lieu et, par suite, la relation (2.5) a lieu d'où il resulte que (2.7) (avec $k = 0$) a lieu, ce qui termine la démonstration.

§ 3. Théorème 2. Prémisses. *b est un nombre fini, a est un nombre fini ou infini ($a < b$ ou $a > b$). Z est un sous-ensemble au plus dénombrable de l'intervalle ouvert (a,b). $\Psi(x)$ est une fonction continue dans (a,b) et les valeurs de $\Psi(x)$ appartiennent à un espace vectoriel de Banach à norme homogène. La dérivée $\Psi'_+(x)$ (ou $\Psi'_-(x)$) existe dans $\varDelta - Z$. On a*

$$\liminf_{x \to b} |\Psi(x) - P| = 0$$

et, pour toute suite $\{x_n\}$, telle que

$$x_n \in (a,b) - Z, \quad x_n \to b, \quad \Psi(x_n) \to P,$$

on a

$$\Psi'_+(x_n) \to k$$

ou bien, pour toute suite de cette sorte, on a

$$\Psi'_-(x_n) \to k.$$

Thèse.

$$\lim_{x \to b} \frac{\Psi(x) - P}{x - b} = k, \qquad \lim_{x \to b} \Psi(x) = P, \tag{3.1}$$

$$\lim_{x \to b} \Psi'_+(x) = k \quad \textit{lorsque } x \textit{ varie dans } \varDelta - Z,$$

ou bien

$$\lim_{x \to b} \Psi'_-(x) = k \quad \textit{lorsque } x \textit{ varie dans } \varDelta - Z.$$

Si l'on complète la définition de Ψ au point $x=b$ en posant $\Psi(b)=P$, on obtient une fonction continue au point P pour laquelle

$$\Psi'(b)=k. \tag{3.2}$$

Démonstration. Les fonctions $F(x)=\Psi(x)-P$, $g(x)=x-b$ vérifient les prémisses du théorème 1. La thèse du théorème 1 coïncide avec la thèse du présent théorème.

Remarque 2. Le théorème 2 est une conséquence du théorème 1, dont la démonstration était assez compliquée.

On voit facilement que la méthode de démonstration du théorème 1 appliquée directement au théorème 2 en donne une démonstration plus rapide. Ceci provient de ce que la fonction $g(x)$ prend alors la forme particulière $g(x)=x-b$, et que pour cette raison le lemme 2 et 4 n'intervient pas dans la démonstration.

§ 4. Application du théorème 2 au problème du prolongement des intégrales des équations différentielles ordinaires.

THÉORÈME 3. *Considérons l'équation différentielle*

$$\frac{dY}{dx}=G(x,Y) \tag{4.1}$$

où x est réel et y désigne un point variable dans un espace vectoriel de Banach à norme homogène.

Supposons que

1° $G(x,Y)$ soit continue au point $x=b, y=P$,

2° $\Psi(x)$ soit l'intégrale de cette équation déterminée dans l'intervalle ouvert (a,b) (a fini ou non, $a<b$ ou $a>b$),

3° l'intégrale $Y=\Psi(x)$ se condense sur le point (b,P) lorsque $x\to b$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{\xi_n\}$ telle que

$$\xi_n\epsilon(a,b),\qquad \xi_n\to b,\qquad \Psi(\xi_n)\to P. \tag{4.2}$$

Cela posé on a

$$\lim_{x\to b}\Psi(x)=P \tag{4.3}$$

et en complétant la définition de $\Psi(x)$ pour $x=b$ au moyen de l'égalité

$$\Psi(b)=P, \tag{4.4}$$

on aura

$$\Psi'(b)=G(b,\Psi(b)). \tag{4.5}$$

Ceci exprime que la fonction $\Psi(x)$ se laisse prolonger de l'intervalle ouvert (a,b) à l'intervalle $(a,b]$ fermé du côté de b de façon qu'elle constitue une intégrale de (4.1) dans $(a,b]$.

Démonstration. On a

$$\Psi'(x)=G(x,\Psi(x))\quad\text{lorsque}\quad x\epsilon(a,b). \tag{4.6}$$

Supposons que

$$x_n\epsilon(a,b),\qquad x_n\to b,\qquad \Psi(x_n)\to P.$$

La fonction $G(x,Y)$ étant continue au point (b,P) il résulte de (4.6) que

$$\Psi'(x_n)\to G(b,P).$$

En posant

$$k=G(b,P),$$

on voit que $\Psi(x)$ vérifie les prémisses du théorème 2. Les relations (3.1) et (3.2) conduisent immédiatement aux relations (4.3) et (4.5).

Remarque 3. Les lemmes 1-4 et les théorèmes 1 et 2 se laissent généraliser en remplaçant la dérivée $F'_+(x)$ par la dérivée contingentielle

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^*_+$$

ou par une notion plus générale de bout différentiel

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^{**}_+.$$

On peut aussi remplacer le quotient $F'_+(x)/g'_+(x)$ par la dérivée contingentielle généralisée

$$\left(\frac{dF(x)}{dg(x)}\right)^*_+ \tag{4.7}$$

ou par celle du bout différentiel généralisé

$$\left(\frac{dF(x)}{dg(x)}\right)^{**}_+. \tag{4.8}$$

J'ai introduit les notions (4.7) et (4.8) dans mes articles antérieurs [2] et [3].

La lecture de [3] conduit facilement aux énoncés des lemmes et des théorèmes du présent travail, généralisés dans ce sens.

Je me dispense d'entrer dans les détails relatifs à cette généralisation.

Articles cités

[1] T. Ważewski, *Sur certains lemmes relatifs au prolongement des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. des Sciences et des Lettres, Série A, 1949, p. 73 - 74.

[2] — *Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces abstraits. Applications*, ibidem, p. 183 - 185.

[3] — *Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces de Banach. Application à la généralisation du théorème de l'Hôpital*, Annales de la Soc. Polon. de Math. 24 (1952 - 3), p. 132 - 147.

[4] — *Certaines propositions de caractère „épidermique" relatives aux inégalités différentielles*, ibidem 24 (1952 - 3), p. 1 - 12.

Polynômes extrémaux et la représentation conforme des domaines doublement connexes

par F. Leja (Kraków)

1. Notations. Soit D un domaine borné doublement connexe, F_0 la frontière intérieure de D (ne se réduisant pas à un seul point), F_1 la frontière extérieure et

$$F = F_0 + F_1.$$

Nous supposerons que F_1 soit en même temps la frontière du domaine non borné situé dans l'ensemble complémentaire à F_1.

Soient A un nombre réel >1, λ un paramètre réel $\geqslant 0$, $\varphi(\zeta)$ la fonction définie sur F par les formules

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{sur } F_0, \\ A & \text{sur } F_1, \end{cases}$$

et $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ situés sur F

(1) $$\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}.$$

Désignons par $V(\zeta^{(n)})$ le produit

(2) $$V(\zeta^{(n)}) = V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} |\zeta_j - \zeta_k|,$$

par $\omega(z, \zeta)$ la fonction

$$\omega(z, \zeta) = \frac{|z - \zeta|}{[\varphi(z)\varphi(\zeta)]^{\lambda}},$$

et posons

(3) $$V(\lambda, \zeta^{(n)}) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \omega(\zeta_j, \zeta_k) = \frac{V(\zeta^{(n)})}{[\varphi(\zeta_0)\varphi(\zeta_1) \ldots \varphi(\zeta_n)]^{n\lambda}},$$

(4) $$\Delta^{(j)}(\lambda, \zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \omega(\zeta_j, \zeta_k) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$