$k=3$ gesetzt wird, dann kann y bloss ± 1, ± 2 oder ± 4 sein; die zugehörigen x-Werte sind $2,3,5$; $0,1,3$; $-2,3,-5$; $0,-1,-3$. Nach Ausschliessung der trivialen Ausnahmen bleiben die Werte

(a) $y=\pm 2, \quad x=\pm 3;$

(b) $y=\pm 4, \quad x=\pm 3;$

(c) $y=\pm 4, \quad x=\pm 5.$

Die Gruppierung (a) und (b) ist unmöglich mod 3, die Gruppierung (c) mod 5.

(5) ist aber auch mit $k=y$ oder $y\pm 1$ unmöglich, denn dann wären beide Seiten teilerfremd. Es sei nun

$$k\leqslant y-2, \qquad k+1\leqslant y-1. \tag{6}$$

Aus (5′) folgt, dass y ein Teiler des absoluten Gliedes sein muss, was durch (6) ausgeschlossen ist, denn y kann kein Teiler einer Zahl $\leqslant y-1$ sein.

Zum Schluss will ich noch einen Satz über die Gleichung (I) mitteilen.

Satz 3. *Die diophantische Gleichung* (n *Primzahl*)

$$x^2-1=y^n \tag{II}$$

ist — von den trivialen Lösungen $0,-1$; $1,0$; $3,2$ *abgesehen — für jeden Exponenten* $n<25\,000$ *unmöglich.*

Beweis. In meiner unter[1]) zitierten (spanischen) Arbeit habe ich bewiesen, dass das Bestehen der Gleichung (II) (n Primzahl)

$$2^{n-1}\equiv 1 \pmod{n^2} \tag{7}$$

nach sich zieht. D. H. Lehmer[4]) hat aber jüngst gezeigt, dass die Kongruenz (7) ausser den bekannten Lösungen $n=1093$ und $n=3511$ unter 25000 keine anderen hat. In meinen zitierten Arbeiten habe ich jedoch den Satz auch für diese Werte bewiesen, so, dass er also im vollen angegebenen Umfange gilt.

Zitate

[1] V. A. Lebesgue, *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation* $x^m=y^2+1$, Nouv. Ann. de Math. 9 (1850), p. 178-181.

[2] T. Nagell, *Analyse indéterminée de degré supérieur*, Mémorial des Sciences Mathématiques 39 (1929), p. 58.

[3] — *Sur une équation diophantienne à deux indéterminées*, Det kongelige Norsk Videnskabers Selskab Forhandlinger VII, 38 (1934), p. 136-139.

[4] — Norsk. Mat. Tidskr. 1 (1919).

[5] S. Selberg, ebenda, 14 (1932), p. 79-80.

[6] N. G. W. H. Beeger, *On even numbers m dividing* 2^m-2, Amer. Math. Monthly 58 (1951), p. 553-555.

[4]) Siehe N. Beeger [6].

Über den letzten Fermatschen Satz in relativ-zyklischen Zahlkörpern

von P. Dénes (Budapest)

Fermat hat seine berühmte Behauptung *die Gleichung*

$$x^n+y^n=z^n$$

$n>2$, *sei in ganzen, nicht verschwindenden Zahlen* x,y,z *unlösbar*, nur für rationale Zahlen ausgesprochen. Die Zerlegung der linken Seite der Gleichung in Faktoren führt ins Gebiet der Kreiskörper, und die Behandlung des Problemes erfolgte seit den Kummerschen Arbeiten fast ausschliesslich in Kreiskörpern. Natürlich sind unendlich viele algebraische Zahlkörper vorhanden, in welchen die Fermatsche Gleichung lösbar ist; z. B. im Körper $k(\sqrt[n]{2})$ gilt die Lösung $1,\ 1, \sqrt[n]{2}$. Aber auch in solchen Zahlkörpern ist folgende Frage von grossem Interesse: gibt es nur singuläre Lösungen, oder existieren auch unendlich viele Lösungsstellen.

Unter den wenigen Arbeiten, die das Fermatsche Problem in Nicht-Kreiskörpern untersuchen, seien die Arbeiten von Fueter [1], der die Unlösbarkeit der Gleichung $x^3+y^3=z^3$ in gewissen quadratischen Zahlkörpern zeigte, und die von Burnside [2], der unendlich viele quadratische Zahlkörper aufzeigte in welchen $x^3+y^3=z^3$ lösbar ist, erwähnt.

In der vorliegenden Arbeit werden wir das Problem in einer Serie von relativ-zyklischen Zahlkörpern untersuchen.

Diese Zahlkörper-Serie wird auf Grund einer früheren Arbeit [3] folgendermassen erzeugt: l bezeichne eine reguläre Primzahl, $\zeta=e^{2\pi i/l}$, k_0 den Zahlkörper der l^{ten} Einheitswurzel, $\lambda=1-\zeta$, $\mathfrak{l}=(\lambda)$, und E_0 sei eine Einheit in k_0, die nicht die l^{te} Potenz einer Einheit aus k_0 ist. Wir bilden den Kummerschen Körper $k_1=k(\sqrt[l]{E_0},\zeta)$. Es sei ferner E_1 eine Einheit aus k_1, welche nicht die l^{te} Potenz einer Einheit aus k_1 ist; durch Adjunktion der l^{ten} Wurzel der Einheit E_1 zum Körper k_1 erhält man den Körper $k_2=k(\sqrt[l]{E_1},k_1)$. Man kann in dieser Weise fortfahren, und das allgemeine Glied dieser Serie ist $k_i=k(\sqrt[l]{E_{i-1}},k_{i-1})$, wobei E_{i-1} eine Einheit des Körpers k_{i-1} bezeichnet, die nicht die l^{te} Potenz einer Einheit in k_{i-1} ist.

In der oben zitierten Arbeit [3] wurde gezeigt, dass der Körper k_i das einzige ambige Primideal $\mathfrak{L}_i$ besitzt, für welches

$$\mathfrak{L}_i^{l^i(l-1)} = l$$

gilt; $\mathfrak{L}_i$ ist also in k_i ein Primideal vom ersten absoluten Grade. Ferner ist $\mathfrak{L}_i$ ein Hauptideal in k_i. Die $l^{i\text{-te}}$ Potenz von $\mathfrak{L}_i$ ist nämlich wegen

$$\mathfrak{L}_i^{l^i} = \mathfrak{l}$$

ein Hauptideal in k_i. Andererseits ist die Klassenzahl von k_i prim zu l [3]; daher ist $\mathfrak{L}_i$ selbst ein Hauptideal in k_i.

Wir können den im untenstehenden Satz formulierten Fall der Fermatschen Vermutung im Körper k_i beweisen:

Satz. *n sei eine natürliche Zahl, A_1, A_2, A_3 zu $\mathfrak{L}_i$ prime Zahlen, H eine Einheit des Körpers k_i. Die Gleichung*

$$A_1^l + A_2^l = H\lambda^{nl} A_3^l \tag{1}$$

ist unmöglich.

Beweis. Die Gleichung (1) zerfällt in l Faktoren:

$$A + \zeta^j A_2 = \mathfrak{L}_i^{m_j} \mathfrak{D} \mathfrak{J}_j^l \qquad (j = 0, 1, \ldots, l-1), \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Idealteiler der Zahlen A_1, A_2 und $\mathfrak{J}_0, \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_{l-1}$ gewisse zu $\mathfrak{L}_i$ prime Ideale des Körpers k_i sind. Der Unterschied der linken Seiten zweier Gleichungen (2) ist höchstens durch das Ideal $\mathfrak{l}\mathfrak{D}$ teilbar; daher können höchstens $l-1$ unter den l Gleichungen (2) — z. B. diejenigen, die zu den Indizes $j = 1, 2, \ldots, l-1$ gehören — durch die $l^{i\text{-te}}$ Potenz von $\mathfrak{L}_i$ teilbar sein. Es ist also

$$m_j \leqslant l^i \qquad (j = 1, 2, \ldots, l-1)$$

und

$$m_0 = nl^{i+1} - \sum_{j=1}^{l-1} m_j,$$

woraus

$$m_0 \geqslant l^i \tag{3}$$

folgt. Die Zahl $A_1 + A_2$, wie auch der Unterschied zwischen dieser Zahl und den Zahlen $A_1 + \zeta^j A_2$ $(j = 1, 2, \ldots, l-1)$ sind durch l teilbar; daher ist

$$m_j = l^i \qquad (j = 1, 2, \ldots, l-1).$$

Das Gleichheitszeichen in (3) gilt nur für $n = 1$. Wir zeigen zunächst, dass jedoch $n > 1$ sein muss. Wäre nämlich $n = 1$, so müssten nach Obigen die Inkogruenzen

$$\frac{A_1 + \zeta^j A_2}{\lambda} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}_i} \qquad (j = 0, 1, \ldots, l-1) \tag{4}$$

bestehen. Da $\mathfrak{L}_i$ ein Primideal vom ersten absoluten Grade ist, ist jede Zahl aus k_i mit einer rationalen ganzen Zahl nach $\mathfrak{L}_i$ kongruent:

$$\frac{A_1 + A_2}{\lambda} \equiv c \pmod{\mathfrak{L}_i}, \tag{5}$$

wobei c eine rationale ganze und (4) zufolge (für $j = 0$) eine zu l prime Zahl ist. (4) kann ferner folgenderweise umgeformt werden:

$$\frac{A_1 + A_2}{\lambda} - A_2 \frac{1 - \zeta^j}{\lambda} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}^i} \qquad (j = 0, 1, \ldots, l-1),$$

woraus wegen (5) und

$$\frac{1 - \zeta^j}{\lambda} = 1 + \zeta + \ldots + \zeta^{j-1} \equiv j \pmod{\mathfrak{L}_i},$$

$$c - j \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}_i} \qquad (j = 0, 1, \ldots, l-1)$$

folgt, welche Inkongruenz für $j \equiv c \pmod{l}$ nicht besteht. Es muss also

$$n > 1 \tag{6}$$

sein.

Nach obigen Überlegungen lassen sich also aus (2) die folgenden Gleichungen bilden:

$$\frac{A_1 + A_2}{A_1 + \zeta^{-1} A_2} = l^{(n-1)l} \frac{\mathfrak{J}_0^l}{\mathfrak{J}_{l-1}^l},$$

$$\frac{A_1 + \zeta^j A_2}{A_1 + \zeta^{-1} A_2} = \frac{\mathfrak{J}_j^l}{\mathfrak{J}_{l-1}^l} \qquad (j = 1, 2, \ldots, l-2).$$

Da die Klassenzahl von k_i prim zu l ist [3], sind die Ideale

$$\frac{\mathfrak{J}_j}{\mathfrak{J}_{l-1}} \qquad (j = 0, 1, \ldots, l-2)$$

Hauptideale und können durch Zahlen des Körpers k_i vertreten werden:

$$\frac{A_1 + A_2}{A_1 + \zeta^{-1} A_2} = \lambda^{(n-1)l} \Theta_0 \frac{\Gamma_0^l}{\Gamma_{l-1}^l},$$

$$\frac{A_1 + \zeta^j A_2}{A_1 + \zeta^{-1} A_2} = \Theta_j \frac{\Gamma_j^l}{\Gamma_{l-1}^l} \qquad (j = 1, \ldots, l-2),$$

wobei $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_{l-2}$ Einheiten, $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{l-1}$ zu $\mathfrak{L}_i$ prime Zahlen in k_i bezeichnen.

Eliminiert man die Zahlen A_1, A_2 aus den ersten zwei Gleichungen, so ergibt sich die Gleichung

$$\Gamma_{l-1}^l + \Theta_1 \zeta^{-1} \Gamma_1^l = \Theta_0 (1+\zeta^{-1}) \lambda^{(n-1)l} \Gamma_0^l, \tag{7}$$

in welcher $\Theta_1 \zeta^{-1}$ eine primäre Einheit, also nach [3] die l^{te} Potenz einer Einheit aus k_i ist. Hierdurch wird aus (7)

$$\Gamma_{l-1}^l + \Gamma_1'^{\,l} = \Theta_0' \lambda^{(n-1)l} \Gamma_0^l, \tag{8}$$

wobei Γ_1' eine zu $\mathfrak{L}_i$ prime Zahl aus k_i darstellt. (8) hat dieselbe Form wie (1), das angewandte Verfahren kann also wiederholt werden. Nach $n-1$ Schritten gelangt man zu einer Gleichung, in der der Exponent von λ gleich l ist; dies ist jedoch wegen (6) unmöglich. Damit ist unser Satz bewiesen.

Zitate

[1] R. Fueter, *Die diophantische Gleichung* $\xi^3+\eta^3+\zeta^3=0$, Sitzungsber. Heidelberger Akad. (1913), S. 1-25.

[2] W. Burnside, *On the Rational Solutions of the Equation* $x^3+y^3+z^3=0$ *in Quadratic Fields*, Proc. London Math. Soc. 14 (1915), S. 1-4.

[3] P. Dénes, *Über eine rekurrente Serie von relativ-zyklischen algebraischen Zahlkörpern*, Monatshefte f. Math. 55 (1951), S. 229-232.

Les courbures (ordinaires) d'une courbe située sur une hypersurface et les courbures géodésiques et normales ainsi que la torsion géodésique de cette courbe

par S. Gołąb (Kraków)

§ 1. Soient données une surface V_2 plongée dans un espace riemannien V_3 et une courbe V_1 sur cette surface. La surface V_2 et la courbe V_1 étant suffisamment régulières, en chaque point p de la courbe V_1 existeront la courbure première k_1 et la torsion k_2 (si V_1 sera envisagée comme située dans V_3) ainsi que la courbure géodésique α, la courbure normale γ et la torsion géodésique β (si V_1 sera envisagée comme située sur V_2).

La torsion k_2 existe seulement au cas, où la courbure k_1 ne disparait pas identiquement, c'est-à-dire quand V_1 n'est pas une géodésique de l'espace ambiant V_3. Les courbures α, β, γ existent en tout cas.

Entre les courbures $k_1, k_2, \alpha, \beta, \gamma$ ont lieu deux relations. On a notamment

$$k_1 = \sqrt{\alpha^2+\gamma^2}, \tag{1}$$

$$k_2 = \beta + \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha^2+\gamma^2} \quad \text{si} \quad k_1 > 0 \text{ [1]}. \tag{2}$$

L'accent signifie ici l'opération de la différentiation par rapport à l'arc de la courbe V_1. La formule (2) subsiste sous une orientation convenable du trièdre de Darboux (ou sous une orientation convenable de la surface V_2) composé des vecteurs-unités t_1, t_2, t_3, où t_1 est tangent à V_1, t_2 normal à V_2 et t_3 orienté de manière que le triple (t_1, t_2, t_3) ait la même orientation que le triple des vecteurs-unités sur les axes des coordonnées.

[1]) [1], comp. les formules (193) et (196*). La formule (2) peut être écrite sous la forme $k_2 = \beta + \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\gamma}{\alpha}\right)' = \beta + \frac{d\omega}{ds}$, où ω est l'angle entre la normale principale et la normale à la surface (Bonnet).