Eliminiert man die Zahlen A_1, A_2 aus den ersten zwei Gleichungen, so ergibt sich die Gleichung

$$\Gamma_{l-1}^{l}+\Theta_1\zeta^{-1}\Gamma_1^l=\Theta_0(1+\zeta^{-1})\lambda^{(n-1)l}\Gamma_0^l, \tag{7}$$

in welcher $\Theta_1\zeta^{-1}$ eine primäre Einheit, also nach [3] die l^{te} Potenz einer Einheit aus k_i ist. Hierdurch wird aus (7)

$$\Gamma_{l-1}^{l}+\Gamma_1'^{l}=\Theta_0'\lambda^{(n-1)l}\Gamma_0^l, \tag{8}$$

wobei Γ_1' eine zu $\mathfrak{L}_i$ prime Zahl aus k_i darstellt. (8) hat dieselbe Form wie (1), das angewandte Verfahren kann also wiederholt werden. Nach $n-1$ Schritten gelangt man zu einer Gleichung, in der der Exponent von λ gleich l ist; dies ist jedoch wegen (6) unmöglich. Damit ist unser Satz bewiesen.

Zitate

[1] R. Fueter, *Die diophantische Gleichung* $\xi^3+\eta^3+\zeta^3=0$, Sitzungsber. Heidelberger Akad. (1913), S. 1-25.

[2] W. Burnside, *On the Rational Solutions of the Equation* $x^3+y^3+z^3=0$ *in Quadratic Fields*, Proc. London Math. Soc. 14 (1915), S. 1-4.

[3] P. Dénes, *Über eine rekurrente Serie von relativ-zyklischen algebraischen Zahlkörpern*, Monatshefte f. Math. 55 (1951), S. 229-232.

Les courbures (ordinaires) d'une courbe située sur une hypersurface et les courbures géodésiques et normales ainsi que la torsion géodésique de cette courbe

par S. Gołąb (Kraków)

§ 1. Soient données une surface V_2 plongée dans un espace riemannien V_3 et une courbe V_1 sur cette surface. La surface V_2 et la courbe V_1 étant suffisamment régulières, en chaque point p de la courbe V_1 existeront la courbure première k_1 et la torsion k_2 (si V_1 sera envisagée comme située dans V_3) ainsi que la courbure géodésique α, la courbure normale γ et la torsion géodésique β (si V_1 sera envisagée comme située sur V_2).

La torsion k_2 existe seulement au cas, où la courbure k_1 ne disparait pas identiquement, c'est-à-dire quand V_1 n'est pas une géodésique de l'espace ambiant V_3. Les courbures α, β, γ existent en tout cas.

Entre les courbures $k_1, k_2, \alpha, \beta, \gamma$ ont lieu deux relations. On a notamment

$$k_1=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}, \tag{1}$$

$$k_2=\beta+\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha^2+\gamma^2} \quad \text{si} \quad k_1>0^1). \tag{2}$$

L'accent signifie ici l'opération de la différentiation par rapport à l'arc de la courbe V_1. La formule (2) subsiste sous une orientation convenable du trièdre de Darboux (ou sous une orientation convenable de la surface V_2) composé des vecteurs-unités t_1, t_2, t_3, où t_1 est tangent à V_1, t_2 normal à V_2 et t_3 orienté de manière que le triple (t_1, t_2, t_3) ait la même orientation que le triple des vecteurs-unités sur les axes des coordonnées.

[1]) [1], comp. les formules (193) et (196*). La formule (2) peut être écrite sous la forme $k_2=\beta+\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\gamma}{\alpha}\right)'=\beta+\frac{d\omega}{ds}$, où ω est l'angle entre la normale principale et la normale à la surface (Bonnet).

Réciproquement les courbures α, β, γ ne peuvent être exprimées au moyen des courbures k_1 et k_2. Cette circonstance aura lieu seulement pour les courbes de types spéciaux, par exemple pour les courbes géodésiques, les courbes asymptotiques et pour les lignes de courbure.

On sait, que les courbes géodésiques sont caractérisées par l'identité

$$\alpha \equiv 0, \tag{3}$$

les lignes asymptotiques par l'identité

$$\gamma \equiv 0 \tag{4}$$

et les lignes de courbure par l'identité

$$\beta \equiv 0 \text{ [2]}. \tag{5}$$

On voit de là, d'après les formules (1) et (2), que, pour les courbes géodésiques, on a

$$\gamma = \varepsilon k_1, \quad \beta = k_2 \qquad (\varepsilon^2 = 1). \tag{6}$$

Pour les courbes asymptotiques, on a les formules tout à fait analogues

$$\alpha = \eta k_1, \quad \beta = k_2 \qquad (\eta^2 = 1). \tag{7}$$

Pour les lignes de courbure enfin le calcul ci-dessous conduit aux formules donnant α et γ. En raison de (1), on peut poser

$$\alpha = \varepsilon_1 k_1 \cos\varphi, \quad \gamma = \varepsilon_2 k_1 \sin\varphi \qquad (\varphi = \varphi(s)), \tag{8}$$

où

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1 \tag{9}$$

et la fonction $\varphi(s)$ est à déterminer. En différentiant les relations (8), on obtient

$$\alpha' = \varepsilon_1 [k_1' \cos\varphi - k_1 \varphi' \sin\varphi], \quad \gamma' = \varepsilon_2 [k_1' \sin\varphi + k_1 \varphi' \cos\varphi]. \tag{10}$$

En substituant (10) et (8) dans la formule

$$k_2 = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha^2 + \gamma^2} \tag{11}$$

($\beta \equiv 0$ pour les lignes de courbure), il vient

$$k_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi' = \varepsilon \varphi' \qquad (\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2), \tag{12}$$

[2]) Voir par exemple [2], p. 91.

d'où on a

$$\varphi' = \varepsilon k_2 \tag{13}$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \varepsilon \left[\int_0^s k_2(s)\, ds + \delta \right] \tag{14}$$

où δ est une constante. En substituant (14) dans (8) on obtient finalement

$$\alpha = \varepsilon_1 k_1 \cos\left[\int_0^s k_2(s)\, ds + \delta \right], \quad \gamma = \varepsilon_1 k_1 \sin\left[\int_0^s k_2(s)\, ds + \delta \right]. \tag{15}$$

On peut tirer immédiatement des formules (6), (7) et (15) les conséquences suivantes.

THÉORÈME 1. *Si une courbe géodésique est plane* ($k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$), *elle est une ligne de courbure* [3]).

THÉORÈME 2. *Si une courbe asymptotique est plane* ($k_1 \neq 0, k_2 = 0$), *elle est une ligne de courbure* [4]).

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que le rapport des courbures géodésique et normale soit constant pour une ligne de courbure est que cette ligne soit plane.*

§ 2. Proposons nous de savoir si les théorèmes précédents se laissent généraliser aux espaces à plusieurs dimensions, c'est-à-dire à une hypersurface V_{n-1} plongée dans un espace riemannien V_n et une courbe V_1 donnée sur V_{n-1}.

Dans ce cas, on peut, comme je l'ai démontré ailleurs, déterminer en chaque point p de la courbe V_1, à part les courbures $k_1, \ldots, k_{n-1}$ provenant du n-èdre de Frenet, $2n-3$ scalaires

$$\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1} \text{ [5]}), \tag{16}$$

où γ est invariant absolu, tandis que les $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ et les $\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ sont des invariants relatifs; ils se transforment notamment comme les composantes d'un vecteur contravariant d'un espace à $n-2$ dimensions

[3]) Cf. par exemple [3], p. 296.

[4]) C'est un théorème dans un sens réciproque au théorème bien connu: une ligne qui est en même temps asymptotique et ligne de courbure, est nécessairement plane.

[5]) Voir [1], les formules (59).

(orthogonal à V_1 et tangent à V_{n-1}) par rapport au groupe orthogonal. De là, il suit en particulier que les quantités

$$\alpha=\sqrt{\sum_{\mu}\alpha_{\mu}^2} \tag{17}$$

et

$$\beta=\sqrt{\sum_{\mu}\beta_{\mu}^2} \tag{18}$$

sont des invariants absolus. L'invariant α peut être nommé *courbure géodésique* de la courbe V_1 (au point p), β *torsion géodésique*, γ enfin *courbure normale*[6]). Remarquons que pour $n\geqslant 4$ les quantités α et β sont non négatives, tandis que γ peut avoir le signe arbitraire.

J'ai démontré dans un travail précédent que les courbures k_i sont des fonctions algébriques des coefficients (16) et de leurs dérivées[7]). On a, en particulier,

$$k_1=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2} \tag{19}$$

et

$$k_2=\frac{\sqrt{[k_1(\sum_{\mu}\alpha_{\mu}\beta_{\mu}+\gamma')-\gamma k_1']^2+\sum_{\mu}[k_1(\alpha_{\mu}'-\gamma\beta_{\mu})-\alpha_{\mu}k_1']^2}}{k_1^2} \quad \text{si } k_1>0 \tag{20}$$

[8]).

Remarque. Pour $n=3$, il faut assujettir au deuxième membre de la formule (20) un signe convenable.

Des formules précédentes on peut conclure que, pour les courbes géodésiques ($\alpha\equiv 0$), on a

$$k_1=|\gamma|, \qquad k_2=\beta. \tag{21}$$

Donc, pour $n\geqslant 4$, des formules analogues aux formules (6) qui ont lieu pour $n=3$, subsistent. Il s'ensuit de là que *le théorème* 1 *se laisse généraliser aux espaces à plusieurs dimensions*.

Pour les courbes asymptotiques ($\gamma\equiv 0$), les formules (19) et (20) se transforment en les suivantes

$$k_1=\alpha, \qquad k_2=\frac{\sqrt{\alpha^2\Big(\sum_{\mu}\alpha_{\mu}\beta_{\mu}\Big)^2+\sum_{\mu}\Big[\alpha\alpha_{\mu}'-\alpha_{\mu}\dfrac{\sum_{\lambda}\alpha_{\lambda}\alpha_{\lambda}'}{\alpha}\Big]^2}}{\alpha^2}. \tag{22}$$

[6]) Cf. [4]. Pour $n=3$ les quantités α,β se confondent avec les notions classiques à un signe près.

[7]) [1], p. 127, la formule (116).

[8]) [1], p. 127, les formules (114) et (115).

Supposons maintenant que la courbe soit plane, c'est-à-dire que $k_2\equiv 0$. On obtient de cette hypothèse, comme conditions nécessaires, les relations suivantes

$$\sum_{\mu}\alpha_{\mu}\beta_{\mu}=0, \tag{23}$$

$$\alpha^2\alpha_{\mu}'-\alpha_{\mu}\sum_{\lambda}\alpha_{\lambda}\alpha_{\lambda}'=0 \qquad (\mu=2,3,\ldots,n-1).$$

La seconde des relations précédentes conduit aux conséquences successives

$$\frac{\alpha_{\mu}'}{\alpha_{\mu}}=\frac{\sum\alpha_{\lambda}\alpha_{\lambda}'}{\sum\alpha_{\lambda}^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum 2\alpha_{\lambda}\alpha_{\lambda}'}{\sum\alpha_{\lambda}^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{d}{ds}\Big(\sum\alpha_{\lambda}^2\Big)}{\sum\alpha_{\lambda}^2},$$

$$\frac{\alpha_{\mu}'}{\alpha_{\mu}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{d}{ds}(\alpha^2)}{\alpha^2}, \qquad \int\frac{\alpha_{\mu}'}{\alpha_{\mu}}\,ds=\frac{1}{2}\int\frac{d(\alpha^2)}{\alpha^2},$$

$$\ln|\alpha_{\mu}|=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2)+\overline{C}_{\mu}=\ln\alpha+\overline{C}_{\mu},$$

$$\alpha_{\mu}=C_{\mu}\alpha \quad \text{pour} \quad \mu=2,3,\ldots,n-1, \tag{24}$$

où C_{μ} sont des constantes. Puisque $k_1>0$ et $k_1=\alpha$, on a

$$\alpha^2=\sum\alpha_{\mu}^2=\sum C_{\mu}^2\alpha^2=\Big(\sum C_{\mu}^2\Big)\alpha^2, \tag{25}$$

et, par conséquent,

$$\sum_{\mu}C_{\mu}^2=1. \tag{26}$$

En substituant les relations (24) dans la première équation (23), et en tenant compte de l'inégalité $\alpha>0$, on parvient à la liaison

$$\sum C_{\mu}\beta_{\mu}\equiv 0. \tag{27}$$

Cette condition confrontée avec (26) dit que les fonctions $\beta_{\mu}(s)$ sont linéairement dépendentes, mais elles ne doivent pas nécessairement s'annuler identiquement, l'identité $\beta\equiv 0$ n'est donc pas, pour $n\geqslant 4$, une conséquence des relations (23).

Réciproquement, si on prenait la fonction $\alpha(s)\geqslant 0$ arbitrairement, mais $\alpha(s)\not\equiv 0$, si les fonctions $\beta_{\mu}(s)$ pour $\mu=2,3,\ldots,n-2$ étaient choisies d'une façon tout à fait arbitraire, les constantes $C_2,C_3,\ldots,C_{n-2}$ aussi, si ensuite la constante C_{n-1} ainsi que la fonction $\beta_{n-1}(s)$ étaient detérminées de la relation (27) et si enfin les fonctions α_{μ} ($\mu=2,3,\ldots,n-1$) étaient

définies au moyen de la formule (24), alors il existerait dans V_n une courbe V_1 avec la propriété suivante. On peut mener par V_1 une hypersurface V_{n-1} telle que pour V_1 la courbure et la torsion géodésique soient données par les formules (17) et (18), que V_1 soit une courbe asymptotique par rapport à V_{n-1}, que V_1 soit une courbe plane ($k_2\equiv 0$) et que V_1 ne soit pas une ligne de courbure ($\beta\neq 0$).

On peut donc conclure, que *le théorème 2 n'est pas vrai dans l'espace à plusieurs dimensions.*

Supposons maintenant, que V_1 soit une ligne de courbure ($\beta\equiv 0$) et qu'en même temps elle ne soit pas une géodésique dans V_n ($k_1>0$). Dans ce cas, les formules (19) et (20) prennent la forme

$$k_1=\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}, \qquad k_2=\frac{\sqrt{(k_1\gamma'-\gamma k_1')^2+\sum_\lambda [k_1\alpha_\lambda'-\alpha_\lambda k_1']^2}}{k_1^2}. \tag{28}$$

Supposons encore que la courbe V_1 soit plane, c'est-à-dire que $k_2\equiv 0$. Cette hypothèse conduit aux identités suivantes

$$\begin{gathered} k_1\gamma'-\gamma k_1'=0, \\ k_1\alpha_\lambda'-\alpha_\lambda k_1'=0 \quad \text{pour} \quad \lambda=2,3,\ldots,n-1 \end{gathered} \tag{29}$$

qui, vu l'inégalité $k_1>0$, peuvent être transcrites sous la forme

$$\left(\frac{\gamma}{k_1}\right)'=0, \qquad \left(\frac{\alpha_\lambda}{k_1}\right)'=0 \qquad (\lambda=2,3,\ldots,n-1).$$

Cela donne

$$\gamma=Ck_1, \qquad \alpha_\lambda=D_\lambda k_1, \tag{30}$$

où C et D_λ sont des constantes. Les relations (30) et (28) conduisent à l'égalité

$$C^2+\sum D_\lambda^2=1$$

qui signifie que pas toutes les constantes D_λ et C_1 sont égales à zéro. Comme $\alpha=\sqrt{\sum\alpha_\lambda^2}$, on a pour $\alpha>0$

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{C}{\sqrt{\sum D_\lambda^2}} \tag{31}$$

et la relation (31) exprime que le rapport des courbures normale et géodésique est constant le long de la ligne V_1. Dans le cas $\alpha\equiv 0$, le rapport α/γ est aussi constant le long de la courbe V_1 (et égal à zéro).

Réciproquement, supposons qu'on ait

$$\gamma=E\alpha, \tag{32}$$

où E est une constante. Dans ce cas $k_1\gamma'-\gamma k_1'\equiv 0$, mais les différences

$$k_1\alpha_\lambda'-\alpha_\lambda k_1'=\frac{\sqrt{1+E^2}}{\alpha}\left(\alpha^2\alpha_\lambda'-\alpha_\lambda\sum_\mu\alpha_\mu\alpha_\mu'\right)$$

ne disparaissent pas nécessairement. On peut facilement construire un contre-exemple pour $n=4$. La courbe V_1 ne doit pas être plane dans nos hypothèses.

Seulement une partie du théorème 3 conserve sa validité pour $n\geqslant 4$, notamment

THÉORÈME 4. *Si la ligne de courbure est plane, le rapport de la courbure normale et géodésique a une valeur constante (la réciproque n'est pas exacte).*

THÉORÈME 5. *Si la courbe V_1 située sur une V_{n-1} plongée dans V_n est asymptotique (de deuxième ordre) et plane, elle est asymptotique d'ordre arbitraire ($\leqslant n-1$)* [9]).

Démonstration. J'ai établi que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe soit asymptotique d'ordre p ($p\geqslant 3$) consiste en ce qu'on ait les relations suivantes [10])

$$\gamma\equiv 0, \qquad \sum_\mu\beta_\mu\alpha_\mu^{(r)}\equiv 0 \quad \text{pour} \quad r=0,1,2,\ldots,p-3, \tag{33}$$

où $\alpha_\mu^{(r)}$ désigne la dérivée d'ordre r de la fonction α_μ ($\alpha_\mu^{(0)}$ désigne la fonction α_μ même).

La condition $\gamma\equiv 0$ est satisfaite en vertu de l'hypothèse que la courbe soit asymptotique d'ordre 2.

La relation

$$\sum_\mu\beta_\mu\alpha_\mu\equiv 0$$

est identique avec la première équation (23). On tire de la formule (24), qui est dans nos hypothèses satisfaite, les identités

$$\alpha_\mu^{(r)}=C_\mu\alpha^{(r)} \qquad (\mu=2,3,\ldots,n-1).$$

On a donc

$$\sum\beta_\mu\alpha_\mu^{(r)}=\sum\beta_\mu C_\mu\alpha^{(r)}=\alpha^{(r)}\sum C_\mu\beta_\mu, \tag{34}$$

ce qui est égal à zéro d'après la relation (27), et le théorème est ainsi démontré.

[9]) Pour la définition de la notion de ligne asymptotique d'ordre p, cf. [1], p. 105.

[10]) [1], p. 124, les formules (105).

Travaux cités

[1] S. Gołąb, *Généralisation des équations de Bonnet-Kowalewski dans l'espace à un nombre arbitraire de dimensions*. Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1949), p. 97-156.

[2] G. Kowalewski, *Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen*, Berlin und Leipzig 1931.

[3] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, T. I, Pisa 1923.

[4] S. Gołąb et T. Wróbel, *Courbure et torsion géodésique pour les courbes situées sur les hypersurfaces à $n-1$ dimensions plongés dans l'espace à n dimensions*. Ann. Soc. Polon. Math. 26 (1951), p. 28-54.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Remarques sur les racines d'une congruence

par W. Sierpiński (Warszawa)

Dans une note encore non publiée M. M. Chojnacka a démontré que pour des modules composés m (par exemple pour les modules 6, 8 et 10) il existe trois entiers a, b, c non congruents deux à deux modulo m, tels que si $f(x)$ est un polynôme en x aux coefficients entiers et si $f(a) \equiv f(b) \equiv 0 \pmod m$, on ait aussi $f(c) \equiv 0 \pmod m$. (M. M. Chojnacka a prouvé que cette proposition est fausse pour $m=4$ et pour les modules premiers.) Je généraliserai ici la proposition de M. M. Chojnacka en démontrant le théorème suivant:

Théorème. *Si m est un module composé $\neq 4$, il existe deux entiers a et b tels que $a \not\equiv 0 \pmod m$, $b \not\equiv 0 \pmod m$ et que, si $f(x)$ est un polynôme aux coefficients entiers tel que $f(a) \equiv f(b) \equiv 0 \pmod m$, on ait aussi $f(0) \equiv 0 \pmod m$.*

Démonstration. Distinguons trois cas:

1° m est le carré d'un nombre premier, $m=p^2$. Comme $m \neq 4$, p est un nombre premier impair. Soit $a=p$, $b=-p$; on a donc $a \not\equiv 0 \pmod m$ et $b \not\equiv 0 \pmod m$. Soit $f(x)$ un polynôme aux coefficients entiers

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1}$$

et supposons $f(a) \equiv f(b) \equiv 0 \pmod m$. Vu que $p^l \equiv 0 \pmod m$ pour $l = 2, 3, \ldots, n$, on trouve, d'après la formule (1), $a_{n-1} p + a_n \equiv 0 \pmod m$ et $-a_{n-1} p + a_n \equiv 0 \pmod m$, d'où, en additionant: $2a_n \equiv 0 \pmod m$, c'est-à-dire $m \mid 2a_n$; m étant un nombre impair, il en résulte que $m \mid a_n$, donc $f(0) = a_n \equiv 0 \pmod m$. On a ainsi $f(0) \equiv 0 \pmod m$.

2° $m = p^\alpha$, où p est un nombre premier et $\alpha \geqslant 3$. On a donc $2\alpha - 3 = \alpha + (\alpha - 3) \geqslant \alpha$, et $m \mid p^{2\alpha-3}$. Posons $a = p^{\alpha-2}$ et $b = p^{\alpha-1}$. On aura $a \not\equiv 0 \pmod m$ et $b \not\equiv 0 \pmod m$. Soit (1) un polynôme aux coefficients entiers et supposons que $f(a) \equiv f(b) \equiv 0 \pmod m$. Comme $\alpha \geqslant 3$ et $p^{2\alpha-3} \equiv 0 \pmod m$, on trouve sans peine $p f(a) \equiv a_{n-1} p^{\alpha-1} + p a_n \pmod m$ et $f(b) \equiv a_{n-1} p^{\alpha-1} + a_n \pmod m$ d'où, en soustrayant: $(p-1) a_n \equiv 0 \pmod m$. On a évidemment $(p, p-1) = 1$ et, comme $m = p^\alpha$, on a $(m, p-1) = 1$. Il résulte donc de $m \mid (p-1) a_n$ que $m \mid a_n$, et $f(0) = a_n \equiv 0 \pmod m$.