Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondeés en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, Géométrie et la Théorie des Nombres.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA 1955

Nakład 1575 egz. + 25 nadb. aut.
Ark. wyd. 15,75, druk. 14,25
Papier druk. sat. kl. III, 100 g, 70×100
Cena zł 31,50

Podpisano do druku 25. III. 1955.
Druk ukończono w kwietniu 1955 r.
Zamówienie nr 518/54
F-5-19162

Wrocławska Drukarnia Naukowa — Wrocław, ul. Świerczewskiego 19.

Sur l'équation $x^{(n)}+A(t)x=0$

par J. Mikusiński (Wrocław)

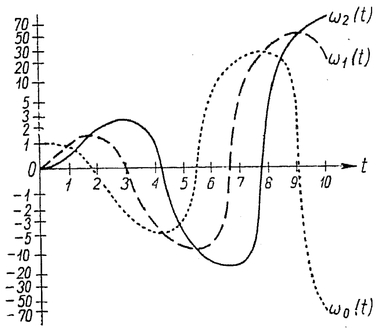
Désignons par $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ les solutions de l'équation différentielle

$$x'''+x=0$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{array}{lll}\omega_0(0)=1, & \omega_0'(0)=0, & \omega_0''(0)=0;\\ \omega_1(0)=0, & \omega_1'(0)=1, & \omega_1''(0)=0;\\ \omega_2(0)=0, & \omega_2'(0)=0, & \omega_2''(0)=1.\end{array}$$

La figure ci-jointe représente les diagrammes des fonctions $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$. Elle montre que les zéros positifs de ces fonctions sont simples et s'entrelacent.



Dans cet article, nous considérons les fonctions analogues $\omega_i(t)$, correspondant à l'équation de n-ème ordre ($n\geqslant 2$)

$$(*)\qquad x^{(n)}+A(t)x=0\quad (A(t)\geqslant 0),$$

et montrons qu'elles jouissent des pareilles propriétés (théorèmes 2, 3 et 4). Nous employons ensuite ces fonctions pour démontrer certains théorèmes généraux sur l'équation $(*)$ (théorèmes 5-11).

Les théorèmes classiques de Sturm [1]) permettent d'estimer la distance des zéros successifs pour les solutions de l'équation de deuxième ordre $x''+A(t)x=0$, ainsi que de comparer les solutions de deux équations de ce type. Dans les paragraphes 3-6, nous démontrons quelques théorèmes analogues pour $n\geqslant 3$. En particulier, le paragraphe 5 est dédié à l'équa-

[1]) E. Sturm [10].

tion de troisième ordre $x'''+A(t)x=0$. Désignons par T_A la borne supérieure des distances des points qui sont des zéros consécutifs des intégrales de cette équation. Le théorème 10 montre que le nombre T_A diminue lorsque la fonction $A(t)$ est remplacée par une fonction majorante. De ce théorème, il résulte facilement un théorème de Davidoglou[2]) qui permet d'estimer le nombre T_A lorsque $0<m<A(t)<M$ (corollaire 2). Des théorèmes analogues sont démontrés dans le paragraphe 6 pour l'équation de quatrième ordre $x^{(4)}+A(t)x=0$. L'étude de cette dernière équation m'a été suggérée, en 1939, par M. Biernacki.

Tous ces théorèmes constituent, en certain sens, un complément aux théorèmes connus d'oscillation[3]).

1. Soit $A(t)$ une fonction continue et non négative dans un intervalle $a\leqslant t\leqslant\beta$. Désignons par $\omega_i(t)$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ la solution de l'équation différentielle

$$x^{(n)}+A(t)x=0 \qquad (n\geqslant 2) \tag{1}$$

telle que

$$\omega_i^{(j)}(a)=\begin{cases}0 & \text{pour} \quad i\neq j,\\ 1 & \text{pour} \quad i=j.\end{cases} \tag{2}$$

Les fonctions $\omega_0,\ldots,\omega_{n-1}$ constituent évidemment un système fondamental de l'équation (1), c'est-à-dire qu'elles sont linéairement indépendantes et telles que toute autre solution de (1) en est une combinaison linéaire. D'après (2), chacune des fonctions ω_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ a un zéro d'ordre i au point a et est positive dans un entourage droit de a.

THÉORÈME 1. *On a*

$$\begin{vmatrix} x_p(t) & x_q(t)\\ x_p'(t) & x_q'(t)\end{vmatrix}>0 \qquad (p<q)$$

pour $a<t\leqslant\beta$.

Démonstration[4]). Les indices p et q étant fixes, posons

$$D_{ij}(t)=\begin{vmatrix} x_p^{(i)}(t) & x_q^{(i)}(t)\\ x_p^{(j)}(t) & x_q^{(j)}(t)\end{vmatrix},$$

où les indices i,j parcourent toutes les valeurs entières telles que

$$0\leqslant i<j\leqslant n-1.$$

[2]) A. Davidoglou [1].

[3]) A. Kneser [4], W. B. Fite [2], J. Mikusiński [9].

[4]) Cette démonstration suit la méthode introduite dans le travail de J. Mikusiński [6].

En dérivant les déterminants D_{ij} par lignes et tenant compte de (1), on a

$$\begin{aligned}
&D'_{0,n-1}=D_{1,n-1},\\
&D'_{n-2,n-1}=A\,D_{0,n-2},\\
&D'_{i,i+1}=D_{i,i+2} \quad \text{pour} \quad 0\leqslant i\leqslant n-2,\\
&D'_{i,n-1}=D_{i+1,n-1}+A\,D_{0i} \quad \text{pour} \quad 1\leqslant i\leqslant n-2,\\
&D'_{ij}=D_{i+1,j}+D_{i,j+1} \quad \text{pour} \quad 1\leqslant i+1<j\leqslant n-2.
\end{aligned} \tag{3}$$

De plus, on voit que

$$D_{ij}(a)=\begin{cases}0 & \text{lorsque} \quad i\neq p \quad \text{ou} \quad j\neq q,\\ 1 & \text{lorsque} \quad i=p \quad \text{et} \quad j=q.\end{cases} \tag{4}$$

Les $n(n-1)/2$ déterminants D_{ij} peuvent donc être regardés comme des solutions du système (3) de $n(n-1)/2$ équations linéaires avec les conditions initiales (4). Tous les coefficients de ce système sont non-négatifs, on a donc[5])

$$D_{ij}\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad a\leqslant t\leqslant\beta.$$

De plus, il résulte de (3) que les fonctions D_{ij} sont non-décroissantes. On a en particulier $D_{pq}\geqslant 1$ pour $a\leqslant t\leqslant\beta$. Si $p\geqslant 1$, le déterminant D_{pq} figure dans le second membre de celle des équations (3) dont le premier membre est $D'_{p-1,q}$; il s'ensuit que $D_{p-1,q}>0$ pour $a<t\leqslant\beta$. Si $p\geqslant 2$, on conclut de la même manière que $D_{p-2,q}>0$ pour $a<t\leqslant\beta$. Après un nombre convenable de pas, on parvient à l'inégalité $D_{0q}>0$ pour $a<t\leqslant\beta$. Si $q\geqslant 2$, le déterminant D_{0q} figure dans le second membre de celle des équations (3) dont le premier membre est $D'_{0,q-1}$; il s'ensuit que $D_{0,q-1}>0$ pour $a<t\leqslant\beta$. Après un nombre convenable de pas analogues, on parvient ainsi à l'inégalité $D_{01}>0$ pour $a<t\leqslant\beta$ qui était à démontrer.

THÉORÈME 2. *Les zéros des fonctions* $\omega_0(t),\ldots,\omega_{n-1}(t)$, *s'ils existent dans l'intervalle* $a<t\leqslant\beta$, *sont simples et différents* (c'est-à-dire le cas $\omega_p(t)=\omega_q(t)$ est exclus pour $p\neq q$ et $a<t\leqslant\beta$).

Ce théorème est une conséquence directe du théorème 1.

THÉORÈME 3. *Les zéros à droite de* a *s'entrelacent pour chaque couple de fonctions* $\omega_p(t)$, $\omega_q(t)$ $(p\neq q)$ (c'est-à-dire si t_1 et t_2 $(a<t_1<t_2\leqslant\beta)$ sont des zéros consécutifs de $\omega_q(t)$, il existe, entre t_1 et t_2, exactement un zéro de $\omega_p(t)$).

Démonstration. Supposons que t_1 et t_2 soient deux zéros consécutifs de $\omega_q(t)$ et que $\omega_p(t)$ n'ait pas de zéros entre t_1 et t_2. En vertu du théorème 2, on a alors $\omega_p(t)\neq 0$ pour $t_1\leqslant t\leqslant t_2$. Par conséquent, la fonction

[5]) Voir J. Mikusiński [6], p. 181, Nº 3.2.

$\varphi = \omega_q/\omega_p$ est continue pour $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ et s'annule aux points t_1 et t_2. D'après le théorème de Rolle, on a donc

$$\varphi'(\xi) = \frac{\omega_p(\xi)\,\omega_q'(\xi) - \omega_p'(\xi)\,\omega_q(\xi)}{\omega_p(\xi)^2} = 0$$

pour un certain point ξ de l'intervalle (t_1, t_2), ce qui est en contradiction avec le théorème 1. Il existe donc un zéro de $\omega_p(t)$ entre t_1 et t_2. Ce zéro est unique. En effet, s'il y en avait deux: u_1 et u_2, il existerait, par raison de symétrie, un zéro de $\omega_q(t)$ entre u_1 et u_2 et les zéros t_1 et t_2 ne seraient pas consécutifs. Nous avons donc démontré que les zéros de $\omega_p(t)$ et $\omega_q(t)$ s'entrelacent.

Théorème 4. *Si la fonction $\omega_p(t)$ est positive pour $\alpha < t < \beta$ toute fonction $\omega_q(t)$, où $q > p$, est positive pour $\alpha < t \leqslant \beta$.*

Démonstration. Supposons par contre que $\omega_q(t)$ possède un zéro t_0 $(\alpha < t_0 \leqslant \beta)$. La fonction $\varphi = \omega_q/\omega_p$ est alors continue pour $\alpha \leqslant t \leqslant t_0$ et nulle aux points α et t_0, car $\omega_q(t)$ a, au point α, un zéro d'ordre supérieur que $\omega_p(t)$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ, on parvient, comme dans la démonstration précédente, à une contradiction avec la théorème 1.

Corollaire 1. *Si une fonction $\varphi(t) = a\omega_p(t) + b\omega_q(t)$ $(p < q)$, où a et b sont constants $(|a|+|b|>0)$, est non négative pour $\alpha < t < \beta$, la fonction $\omega_{n-1}(t)$ est positive pour $\alpha < t \leqslant \beta$, à moins que $a = 0$ et $q = n-1$.*

Démonstration. Si $a = 0$, cette proposition résulte aussitôt du théorème 4. On peut donc admettre dans la suite que $a > 0$ (car, si l'on avait $a < 0$, la fonction φ serait négative au voisinage droit de α). Supposons que la fonction $\omega_{n-1}(t)$ ait des zéros dans l'intervalle $\alpha < t \leqslant \beta$ et désignons par t_{n-1} le moindre de ces zéros. D'après le théorème 4, la fonction $\omega_q(t)$ a un zéro t_q dans l'intervalle $\alpha < t \leqslant t_{n-1}$. Ce zéro est unique, d'après le théorème 3. La fonction $\omega_p(t)$ change de signe dans l'intervalle $\alpha < t < t_q$, en vertu des théorèmes 2, 3 et 4; on a donc $\omega_p(t_q) < 0$. Il s'ensuit que $\varphi(t_q) = a\omega_p(t_q) < 0$, contrairement à l'hypothèse.

2. Soient p_1 un nombre naturel quelconque et $p_2, \dots, p_k$ des nombres naturels pairs. Supposons que $p_1 + \dots + p_k = n$. Soient, de plus, $t_1, \dots, t_k$ des nombres tels que $\alpha \leqslant t_1 < \dots < t_k \leqslant \beta$. Cela étant, on a le théorème suivant:

Théorème 5. *Il existe une et une seule solution $x(t)$ de (1) satisfaisant aux conditions*

$$x^{(i)}(t_j) = a \qquad (i = 0, 1, \dots, p_j - 1;\ j = 1, 2, \dots, k), \tag{5}$$

quelles que soient les valeurs a_{ij} données d'avance.

Démonstration. Toute fonction $x(t)$ satisfaisant à l'équation (1) peut être représentée sous la forme

$$x(t) = c_0\,\omega_0(t) + \dots + c_{n-1}\,\omega_{n-1}(t), \tag{6}$$

où les c_i sont des constantes. En substituant (6) dans (5), on obtient n équations avec n inconnues $c_1, \dots, c_n$. Il suffit de démontrer que le déterminant de ce système d'équations est différent de zéro. Considérons, à côté de ce système, le système homogène qu'on en obtient, en posant partout $a_{ij} = 0$. Si le déterminant en question était nul, le système homogène aurait des solutions non nulles. Par conséquent, il existerait une solution $x_0(t)$, non identiquement nulle, de l'équation différentielle (1), ayant le zéro d'ordre $\geqslant p_j$ dans chacun des points t_j. Pour avoir le théorème, il suffit donc de démontrer que toute solution $x_0(t)$ de (1), ayant le zéro d'ordre $\geqslant p_j$ dans chacun des points t_j, est identiquement nulle.

Désignons généralement par q_j l'ordre du zéro de $x_0(t)$ au point t_j. On a évidemment

$$p_j \leqslant q_j \leqslant n-1$$

(si l'on avait $q_j > n-1$ pour un certain j on aurait identiquement $x_0(t) = 0$). Désignons par r_i le nombre d'indices i, pour lesquels $q_i \geqslant j$. On a

$$\begin{gathered} r_1 = k, \\ r_1 + \dots + r_n = q_1 + \dots + q_k \geqslant p_1 + \dots + p_k = n. \end{gathered} \tag{7}$$

Désignons enfin par z_i le nombre de zéros (différents) de $x_0^{(i)}(t)$ dans $[t_1, t_k]$. On a $z_0 \geqslant k$.

D'après le théorème de Rolle, la dérivée $x_0'(t)$ a au moins un zéro entre tout couple de zéros consécutifs de $x_0(t)$ et, de plus, au moins r_2 zéros communs avec $x_0(t)$. Donc

$$z_1 \geqslant z_0 - 1 + r_2.$$

Pareillement, on trouve les inégalités

$$z_i \geqslant z_{i-1} - 1 + r_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1). \tag{8}$$

Supposons que dans l'une au moins des inégalités (8) le signe $>$ ait lieu. En ajoutant ces inégalités, on trouvera alors

$$z_{n-1} > z_0 - (n-1) + (r_2 + \dots + r_n)$$

et, en vertu de (7),

$$z_{n-1} > K = z_0 - k + 1 + (q_1 - p_1) + \dots + (q_k - p_k).$$

D'après la dernière inégalité, la dérivée $x_0^{(n-1)}(t)$ a au moins $K+1$ zéros (différents) dans $[t_1, t_k]$. Il s'ensuit que la n-ème dérivée $x_0^{(n)}(t)$ change de signe au moins K fois dans l'intervalle $[t_1, t_k]$. En vertu de (1), il en est de même de $x_0(t)$. Or, ceci est impossible, car $x_0(t)$ ne peut changer de signe qu'aux points différents de t_j (dont le nombre est z_0-k) et en ceux des points $t_2,\ldots,t_{k-1}$ pour lesquels $q_i-p_i>0$. Cette contradiction prouve que le signe $>$ ne peut pas intervenir dans les inégalités (8), c'est-à-dire que l'on a

$$z_i=z_{i-1}-1+r_{i+1} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1). \tag{9}$$

Ce raisonnement prouve, de plus, que

$$q_1=p_1, \qquad q_k=p_k, \tag{10}$$

et que $x_0^{(n)}(t)$ change de signe exactement $z_{n-1}-1$ fois dans $[t_1,t_k]$.

Des égalités (9) on déduit facilement qu'entre chaque couple de zéros consécutifs de $x_0^{(i-1)}(t)$ se trouve un seul zéro de la fonction $x_0^{(i)}(t)$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$; ce zéro est simple, lorsque $i<n-1$. Les autres zéros possibles de $x_1^{(i)}(t)$ se trouvent tous parmi les points t_j.

La seconde des égalités (10) exprime que le point t_k est, pour $x_0(t)$, un zéro d'ordre p_k (exactement). On a donc $x^{(p_k)}(t_k)\neq 0$. Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que $x(t)>0$ au voisinage gauche de t_k. Alors $x^{(p_k)}(t_k)>0$, car le nombre p_k est pair. Désignons par $s^{(p_k)}$ le plus grand zéro de $x_0^{(p_k)}(t)$ dans $[t_1,t_k]$. Ce zéro est simple, car il se trouve entre des zéros consécutifs de $x_0^{(p_k-1)}(t)$. En tenant compte de ce que $x^{(s_k)}(t)>0$ pour $s^{(p_k)}<t<t_k$, on voit que $x_0^{(p_k+1)}(s^{(p_k)})>0$. Désignons ensuite par $s^{(p_k+1)}$ le plus grand zéro de $x^{(p_k+1)}(t)$ dans $[t_1,t_k]$. Ce zéro est simple pour la même raison que dans le cas précédent. Comme $x_0^{(p_k+1)}(t)>0$ pour $s^{(p_k+1)}<t\leqslant s^{(p_k)}$, on a $x_q^{(p_k+2)}(s^{(p_k+1)})>0$. En désignant généralement par $s^{(j)}$ $(j=p_k,\ldots,n-2)$ le plus grand zéro de $x_0^{(j)}(t)$ dans l'intervalle $[t_1,t_k]$, on voit, de la même manière, que ce zéro est simple et que $x_0^{(j+1)}(s^{(j)})>0$. En particulier, on a $x_0^{(n-1)}(s^{(n-2)})>0$. Soit $s^{(n-1)}$ le plus grand zéro de $x_0^{(n-1)}(t)$ dans $[t_1,t_k]$. Comme $x_0^{(n-1)}(t)>0$ pour $s^{(n-1)}<t\leqslant s^{(n-2)}$, la dérivée $x_0^{(n)}(t)$ est certainement positive au voisinage droit de $s^{(n-1)}$. Cette dérivée change de signe exactement $z_{n-1}-1$ fois; tous ces changements de signe s'effectuent donc entre les zéros de $x_0^{(n-1)}(t)$. Il s'ensuit que $x_0^{(n)}(t)$ reste non négative pour $s^{(n-1)}\leqslant t\leqslant t_k$. Or, $x_0^{(n)}(t)$ ne peut s'annuler identiquement dans aucun intervalle (sous-intervalle de $[t_1,t_k]$), on a donc $x_0^{(n)}(t)>0$ au voisinage gauche de t_k, ce qui n'est pas compatible, en vertu de (1), avec la supposition que $x_0(t)>0$ dans ce voisinage.

Cette contradiction prouve que toute solution $x_0(t)$ de (1), ayant le zéro d'ordre $\geqslant p_j$ dans chacun des points t_j, est identiquement nulle. C'est ce qui achève la démonstration du théorème 5.

Théorème 6. *Si une solution $v_0(t)$ de l'équation* (1), *où $n\geqslant 3$, est nulle au point a et positive pour $a<t<\beta$, il existe pour tout γ $(a<\gamma<\beta)$ une solution $x(t)$ de* (1) *telle que*

$$x(a)=x(\gamma)=0 \quad \textit{et} \quad x(t)>0 \quad \textit{pour} \quad a<t<\gamma. \tag{11}$$

Démonstration. Pour avoir le théorème, il suffit de démontrer les deux propositions suivantes:

1° *On peut choisir, dans tout sous-intervalle (a,δ) de (a,β), un point γ pour lequel il existe une solution $x(t)$ de* (1) *satisfaisant aux conditions* (5).

2° *Si une solution $y(t)$ de* (1) *satisfait aux conditions*

$$y(a)=y(\gamma_0)=0 \quad \textit{et} \quad y(t)\geqslant 0 \quad \textit{pour} \quad a<t<\gamma_0, \tag{12}$$

où γ_0 est un point de (a,β), il existe, pour tout γ d'un certain voisinage droit de γ_0, une solution $x(t)$ de (1) *satisfaisant aux conditions* (11).

En effet, il résulte de 1° et 2° qu'il existe un sous-intervalle (a,η) de (a,β) jouissant de la propriété suivante:

(P) *Pour tout $\gamma\in(a,\eta)$ il existe une solution $x(t)$ de* (1), *satisfaisant aux conditions* (11).

Désignons par η_0 la borne supérieure de l'ensemble H des nombres η, pour lesquels l'intervalle (a,η) jouit de la propriété (P). Supposons que $\eta_0<\beta$. Soit $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ une suite croissante de nombres de l'intervalle (a,η_0), ayant η_0 pour limite. Soit de plus $x_1(t),x_2(t),\ldots$ une suite de solutions de (1) telle que

$$x_i(a)=x_i(\gamma_i)=0 \quad \text{et} \quad x_i(t)>0 \quad \text{pour} \quad a<t<\gamma_i.$$

On peut normer cette suite de manière que $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant\beta}|x_i(t)|=1$. Alors, comme on le voit facilement d'après (1), les fonctions $x_1(t),x_2(t),\ldots$ satisfont à la condition de Lipschitz avec une constante commune et l'on peut en tirer une suite partielle convergente uniformément vers une une fonction $y(x)$. Cette fonction est encore une solution de (1), satisfaisant à la condition (12), où $\gamma_0=\eta_0$. Or, la proposition 2° entraîne que η_0 n'est pas la borne supérieure de H. La supposition que $\eta_0<\beta$ est donc fausse et l'on a $\eta_0=\beta$. Cela achève la réduction du théorème 6 aux propositions 1° et 2°.

Démontrons d'abord 1°. La fonction

$$x(t)=\omega_2(\delta)\,\omega_1(t)-\omega_1(\delta)\,\omega_2(t)$$

n'est pas identiquement nulle, car le cas $\omega_1(\delta)=\omega_2(\delta)=0$ est exclus par le théorème 2. Cette fonction est cependant nulle aux points a et δ. Désignons par γ le moindre zéro de $x(t)$ à droite de a. Si $x(t)$ est positive dans le voisinage droit de a, elle satisfait aux conditions (11). Si elle est négative, il suffit de la prendre avec le signe opposé.

Passons maintenent à la proposition 2°.

Si γ_0 est un zéro impair de $y(t)$, posons

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon x_0(t)+y(t).$$

En traitant ε comme un paramètre, la fonction $x(t,\varepsilon)$ est une solution de (1) qui, pour $\varepsilon=0$, a un zéro au point γ_0. Si ε croît, ce zéro se meut à droite d'une manière continue (pour petites valeurs de ε), car $x(t,\varepsilon)$ augmente avec ε dans l'intervalle $\alpha<t\leqslant\beta$. La proposition 2^0 est donc démontrée dans le cas, où γ_0 est un zéro impair de $y(t)$.

Supposons maintenant que γ_0 soit un zéro pair de $y(t)$. (Si $n=3$, la fonction identiquement nulle est, en vertu du théorème 5, l'unique solution de (1), s'annulant au point α et ayant le zéro d'ordre $\geqslant 2$ au point γ_0. On a donc $n\geqslant 4$.) Tous les zéros de $y(t)$ dans l'intervalle (α,γ_0) sont pairs, car $y(t)$ y est de signe constant. En désignant respectivement par $p_1,\dots,p_k$ l'ordre des zéros $t_1,\dots,t_k$ de $y(t)$ dans $[\alpha,\gamma_0]$ $(t_1=\alpha, t_k=\gamma_0)$, on a $p_1+\dots+p_k<n$, car, en cas contraire, on aurait $y(t)\equiv 0$, en vertu du théorème 5. D'après le même théorème 5, il existe une solution $y_0(t)$ de (1) telle que

$$\begin{aligned} y_0^{(j)}(\alpha)&=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqslant j\leqslant n-(p_2+\dots+p_k),\\ y_0(t_i)&=0 \quad \text{pour} \quad 2\leqslant i\leqslant k-1,\\ y_0(\gamma_0)&=0 \quad \text{et} \quad y_0'(\gamma_0)<0. \end{aligned}$$

Posons

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon y_0(t)+y(t);$$

cette fonction est évidemment une solution de (1), quel que soit le nombre ε. En prenant ε positif et assez petit, on fera $x(t,\varepsilon)$ positive dans l'intervalle (α,γ_0). De plus $x(t,\varepsilon)$ sera nulle aux deux extrémités ce cet intervalle, le point γ_0 étant un zéro de premier ordre. Ainsi la démonstration se réduit au cas précédent, où γ_0 est un zéro impair de $y(t)$.

Ce raisonnement complète la démonstration de 2^0 et, en même temps, du théorème 6.

3. Voici un théorème sur une inégalité différentielle:

THÉORÈME 7. *Si une fonction $x(t)$, n fois continûment dérivable dans l'intervalle $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, satisfait à l'inégalité*

$$x^{(n)}+A(t)x>0 \tag{13}$$

sur un ensemble dense dans cet intervalle et aux conditions initiales

$$x(\alpha)=x'(\alpha)=\dots=x^{(n-1)}(\alpha)=0 \tag{14}$$

et si $\omega_{n-1}(t)>0$ pour $\alpha<t<\beta$, on a $x(t)>0$ pour $\alpha<t\leqslant\beta$.

Démonstration. Soit $\omega(t,\tau)$ une fonction définie dans le triangle T: $\alpha\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\beta$ par les deux conditions suivantes:

$$\omega(\tau,\tau)=\omega'(\tau,\tau)=\dots=\omega^{(n-2)}(\tau,\tau)=0, \quad \omega^{(n-1)}(\tau,\tau)=1 \qquad (\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta), \tag{15}$$

$$\omega^{(n)}(t,\tau)+A(t)\,\omega(t,\tau)=0 \qquad (0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\beta), \tag{16}$$

où toutes les dérivations sont entendues relativement à la première variable. D'après un théorème classique[6]), la fonction $\omega(t,\tau)$ est continue dans T.

Nous allons démontrer que

$$\omega(t,\tau)>0 \quad \text{pour} \quad \alpha<\tau<t\leqslant\beta. \tag{17}$$

On a évidemment $\omega(t,\alpha)=\omega_{n-1}(t)$. La fonction $\omega_{n-1}(t)$, ainsi que chacune de ses dérivées d'ordre inférieur à n est positive dans un voisinage (α,γ) de α. Fixons τ arbitrairement dans ce voisinage. On peut écrire

$$\omega_{n-1}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\bar\omega_i(t), \tag{18}$$

où $\bar\omega_i(t)$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ satisfait à l'équation (1) avec les conditions

$$\bar\omega_i^{(j)}(\tau)=\begin{cases}0 & \text{pour} \quad i\neq j,\\ 1 & \text{pour} \quad i=j.\end{cases}$$

On a

$$c_i=\omega_{n-1}^{(i)}(\tau)>0 \qquad (i=0,1,\dots,n-1).$$

Supposons que $\bar\omega_{n-1}(t)$ s'annule dans l'intervalle $\tau<t\leqslant\beta$ et soit t_0 le zéro de $\bar\omega_{n-1}(t)$ le plus proche de τ. Il résulte du théorème 4 que $\bar\omega_i(t_0)<0$ pour $i=0,1,\dots,n-2$. En vertu de (18) on a donc $\omega_{n-1}(t_0)<0$, contrairement à l'hypothèse. Cela prouve que

$$\omega(t,\tau)=\bar\omega_{n-1}(t)>0 \quad \text{pour} \quad \tau<t\leqslant\beta.$$

L'inégalité (17) est donc démontrée pour $\alpha<\tau<\gamma$.

Soit maintenant α_0 la borne supérieure des valeurs γ telles que l'inégalité (17) soit vraie pour $\alpha<\tau<\gamma$. En vertu de la continuité de $\omega(t,\tau)$, on a $\omega(t,\alpha_0)\geqslant 0$ pour $\alpha_0\leqslant t\leqslant\beta$. Supposons que $\alpha_0<\beta$. D'après le théorème 2, la fonction $\omega(t,\alpha_0)$ ne peut avoir que des zéros simples à droite de α_0; il s'ensuit que $\omega(t,\alpha_0)>0$ pour $\alpha_0<t<\beta$. Or, il est possible de repéter, pour le triangle T_0: $\alpha_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\beta$ le même raisonnement que pour le triangle T. On parvient ainsi à la conclusion que l'inégalité (17) a lieu pour τ appartenant à un intervalle (α_0,γ_0), contrairement à la supposition que α_0 soit la borne supérieure des valeurs τ pour lequelles cette inégalité est satisfaite. On a donc $\alpha_0=\beta$, ce qui complète la démonstration de (17).

Posons maintenant

$$y(t)=x(t)-\int_\alpha^t\omega(t,\tau)\,[x^{(n)}(\tau)+A(\tau)x(\tau)]\,d\tau.$$

---

[6]) E. Kamke [3], p. 150, Satz 4.

En tenant compte de (15), on trouve facilement que

(19) $$y^{(i)}(t)=x^{(i)}(t)-\int_a^t \omega^{(i)}(t,\tau)[x^{(n)}(\tau)+A(\tau)x(\tau)]d\tau \quad \text{pour} \quad i=0,1,\ldots,n-1,$$

d'où

$$y^{(i)}(a)=0 \quad \text{pour} \quad i=0,1,\ldots,n-1.$$

En dérivant, pour $i=n-1$, l'égalité (19), il vient, en vertu de (15) et (16),

$$y^{(n)}(t)=-A(t)y(t).$$

La fonction $y(t)$ satisfait donc à l'équation différentielle (1) avec les conditions initiales nulles, elle est donc elle-même identiquement nulle et l'on peut écrire

$$x(t)=\int_a^t \omega(t,\tau)[x^{(n)}(\tau)+A(\tau)x(\tau)]d\tau.$$

D'après (13) et (17), on voit aussitôt que la dernière intégrale est positive pour $a<t\leqslant\beta$. Le théorème se trouve donc démontré.

4. Soient $y(t)$ et $z(t)$ respectivement des solutions des équations

(20) $$y^{(n)}+A(t)y=0,$$

(21) $$z^{(n)}+B(t)z=0,$$

satisfaisant aux mêmes conditions initiales au point a. Les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ sont supposées continues pour $a\leqslant t\leqslant\beta$.

THÉORÈME 8. *Si $0\leqslant A(t)$ et $B(t)<A(t)$ pour $a\leqslant t\leqslant\beta$ et si la fonction $\omega_{n-1}(t)$ correspondant à l'équation (20) et l'une (au moins) des fonctions $y(t)$ ou $z(t)$ sont non-négatives pour $a\leqslant t\leqslant\beta$, on a $y(t)<z(t)$ pour $a<t\leqslant\beta$ (à moins que les deux fonctions soient identiquement nulles).*

Démonstration. Supposons d'abord que la fonction $z(t)$ soit non-négative pour $a<t<\beta$. Alors cette fonction est positive presque partout dans l'intervalle $a\leqslant t\leqslant\beta$ et la différence $x(t)=z(t)-y(t)$ satisfait presque partout à l'inégalité

$$x^{(n)}+Ax=(z^{(n)}+Az)-(y^{(n)}+Ay)>(z^{(n)}+Bz)-0=0.$$

De plus, la fonction $x(t)$ satisfait évidemment aux conditions (14). D'après le théorème 7, on a donc $x(t)>0$ pour $a<t\leqslant\beta$, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant que la fonction $y(t)$ soit non-négative pour $a<t<\beta$. Alors $z(t)$ est positive dans un voisinage droit du point a, car $z(t)$ y satisfait aux mêmes conditions initiales que $y(t)$. Supposons que (a,γ) soit le plus grand intervalle, où $z(t)$ est positive. D'après ce que nous venons de démontrer, on a alors $y(t)<z(t)$ pour $a<t\leqslant\gamma$, d'où, en particulier, $z(\gamma)>y(\gamma)\geqslant 0$. Il s'ensuit que $\gamma=\beta$, ce qui nous ramène au cas déjà démontré.

THÉORÈME 9. *Si $0\leqslant B(t)<A(t)$ pour $a\leqslant t\leqslant\beta$ et si la fonction $\omega_{n-1}(t)$ correspondant à l'équation (21) et la fonction $y(t)$ sont positives pour $a<t<\beta$, on a $y(t)<z(t)$ pour $a<t\leqslant\beta$.*

Démonstration. La fonction $x(t)=z(t)-y(t)$ satisfait à l'inégalité $x^{(n)}+B(t)x>0$ presque partout dans l'intervalle $a\leqslant t\leqslant\beta$ et aux conditions initiales nulles au point $t=a$. D'après le théorème 7, on a donc $x(t)>0$ pour $a<t\leqslant\beta$, ce qu'il fallait démontrer.

5. Considérons maintenant deux équations de troisième ordre

(22) $$y'''+A(t)y=0,$$

(23) $$z'''+B(t)z=0,$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions continues. Désignons par T la borne supérieure des distances des points qui sont des zéros consécutifs des intégrales de (22). Pareillement, désignons par T_B le nombre analogue pour l'équation (23).

THÉORÈME 10. *Si $0\leqslant B(t)<A(t)$ pour $a\leqslant t\leqslant\beta$, on a $T_A<T_B$, à moins que $T_A=\beta-a$. Dans ce dernier cas on a $T_A=T_B$.*

Démonstration. Soit $\{y_n(t)\}$ une suite de solutions de (22), possédant des zéros consécutifs u_n, v_n, tels que $v_n-u_n\to T_A$. Les fonctions $y_n(t)$ peuvent être supposées normées de façon que

(24) $$|y_n(a)|+|y_n'(a)|+|y_n''(a)|=1 \qquad (n=1,2,\ldots).$$

On peut choisir une suite croissante de nombre naturels k_n tels que u_{k_n} tende vers une limite U. Alors $v_n\to V=U+T_A$. Tirons de $\{k_n\}$ une sous-suite $\{l_n\}$ de manière que les suites $\{y_{l_n}(a)\}$, $\{y_{l_n}'(a)\}$ et $\{y_{l_n}''(a)\}$ soient convergentes; les limites de ces dernières suites ne sont pas toutes nulles, en vertu de (24). Cela étant, la suite $\{y_{l_n}(t)\}$ converge vers une solution non triviale $y(t)$ de (22) telle que

(25) $$y(U)=y(V)=0 \quad \text{et} \quad y(t)\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad U\leqslant t\leqslant V.$$

Il suffit maintenant, en vertu du théorème 6, de montrer que la fonction $z(t)$ satisfaisant à l'équation (23) et aux conditions

$$z(U)=0, \quad z'(U)=0, \quad z''(U)=1$$

est positive pour $U<t\leqslant V$. On a

$$y(t)=a\,\bar\omega_1(t)+b\,\bar\omega_2(t),$$

où $\bar\omega_1(t)$ et $\bar\omega_2(t)$ sont des solutions de (15) telles que

$$\bar\omega_1(U)=0, \quad \bar\omega_1'(U)=1, \quad \bar\omega_1''(U)=0;$$
$$\bar\omega_2(U)=0, \quad \bar\omega_2'(U)=0, \quad \bar\omega_2''(U)=1.$$

Il s'ensuit, en vertu du corollaire 1, que $\bar{\omega}_2(t) \geqslant 0$ pour $U \leqslant t \leqslant V$. Or, les fonctions $\bar{\omega}_2(t)$ et $z(t)$ satisfont aux mêmes conditions initiales au point U, on a donc, d'après le théorème 9, $z(t) > \bar{\omega}_2'(t) \geqslant 0$ pour $U < t \leqslant V$, ce qui achève la démonstration.

Soit maintenant $\omega_2(t)$ la solution de l'équation $x''' + x = 0$ satisfaisant aux conditions $\omega_2(0) = \omega_2'(0) = 0$ et $\omega_2''(0) = 1$. Cette solution peut être représentée explicitement sous la forme[7])

$$\omega_2(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Désignons par p_3 la plus petite racine positive de l'équation $\omega_2(t) = 0$. Cette racine peut être évaluée par des méthodes numériques, ce qui conduit à la valeur approchée 4,232.

Il est facile de montrer que le nombre $p_3/\sqrt[3]{\mu}$ $(\mu > 0)$ est la borne supérieure des distances des zéros consécutifs appartenant aux solutions de l'équation $x''' + \mu x = 0$[8]).

Cela posé, il résulte aussitôt, du théorème 10, le corollaire suivant:

Corollaire 2. *Si* $0 < m < A(t) < M$ *et* $\beta - \alpha > p_3/\sqrt[3]{M}$, *on a*[9])

$$\frac{p_3}{\sqrt[3]{M}} < T_A < \frac{p_3}{\sqrt[3]{m}}.$$

6. Des théorèmes analogues se laissent démontrer pour les équations de quatrième ordre

$$y^{(4)} + A(t) y = 0, \tag{26}$$

$$z^{(4)} + B(t) z = 0, \tag{27}$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions continues. Désignons par Q_A et Q_B les bornes supérieures des distances des points qui sont des zéros consécutifs des intégrales de (26) et (27) respectivement.

Théorème 11. *Si* $0 \leqslant B(t) < A(t)$ *pour* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, *on a* $Q_A < Q_B$, *à moins que* $Q_A = \beta - \alpha$. *Dans ce dernier cas, on a* $Q_A = Q_B$[10]).

Démonstration. D'une manière tout à fait analogue à celle dans le paragraphe précédent, on démontre l'existence d'une solution non triviale $y(t)$ de (26) telle que

$$y(U) = y(V) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad U \leqslant t \leqslant V,$$

où $\alpha \leqslant U \leqslant V \leqslant \beta$, $V - U = Q_A$.

[7]) J. Mikusiński [8], p. 47. [8]) J. Mikusiński [7], p. 29.

[9]) Voir aussi A. Davidoglou [1] et J. Mikusiński [7], p. 31.

[10]) M. Biernacki a démontré (en 1939) que $Q_A \leqslant 2Q_B$; son résultat n'a pas été publié.

Supposons d'abord que $V < \beta$ et que $y(t) > 0$ pour $U < t < V$. D'après le théorème 5, il existe une solution $y_0(t)$ de (26) telle que

$$y_0(U) = 0, \quad y_0'(U) > 0, \quad y_0(V) > 0, \quad y_0'(V) < 0.$$

Pour ε positif et assez petit, la fonction $y_1(t) = y(t) + \varepsilon y_0(t)$ sera positive dans un intervalle (U, V_1) plus grand que (U, V), ce qui contredit la définition du nombre Q_A. Cela prouve que, si $V < \beta$, il existe un point ξ (unique) intérieur à (U, V) tel que

$$y(\xi) = y'(\xi) = 0. \tag{28}$$

Or, un tel point existe aussi, lorsque $\alpha < U$; la démonstration de se fait se ramène à la précédente, en remplaçant la variable t par $-t$.

En vertu de (28), la fonction $y(t)$ peut être représentée sous la forme

$$y(t) = a\,\bar{\omega}_2(t) + b\,\bar{\omega}_3(t),$$

où $\bar{\omega}_2(t)$ et $\bar{\omega}_3(t)$ sont des solutions de (19) satisfaisant aux conditions initiales

$$\bar{\omega}_i^{(j)}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i \neq j \\ 1 & \text{pour} \quad i = j \end{cases} \quad (i = 2, 3;\ j = 0, 1, 2, 3).$$

D'après le théorème 5, la fonction $\bar{\omega}_3(t)$ est positive pour $\xi < t < V$. Il s'ensuit, en vertu du théorème 9, que la solution $z_0(t)$ de (27) satisfaisant au point ξ aux mêmes conditions initiales que $y(t)$ est positive pour $\xi < t \leqslant V$. Par raison de symétrie, elle est positive pour $U \leqslant t < \xi$; la démonstration se réduit à la précédente, en remplaçant la variable t par $-t$. La fonction $z_0(t)$ est donc positive dans l'intervalle $U \leqslant t \leqslant V$, sauf au point ξ. En modifiant légèrement les conditions initiales au point ξ, on parvient aisément à une solution de (27) qui est positive dans l'intervalle $U \leqslant t \leqslant V$ tout entier.

Nous avons ainsi démontré que si $\alpha < U$ ou $V < \beta$, il existe une solution $z_2(t)$ de (27) qui est positive pour $U \leqslant t \leqslant V$. Nous allons montrer qu'une telle solution existe encore lorsque $\alpha = U$ et $\beta = V$.

S'il existe un nombre ξ intérieur à l'intervalle (α, β) tel que les relations (28) aient lieu, la démonstration est identique à la précédente. Sinon, la fonction $y(t)$ est positive pour $\alpha < t < \beta$. Dans ce cas, prolongeons la définition de $A(t)$ à droite de β, en posant $A(t) = A(\beta)$ pour $t > \beta$. Soit γ_0 la borne supérieure des nombres γ pour lesquels il existe une solution de (26) positive dans l'intervalle (α, γ) et nulle à ses extrémités; le nombre γ_0 est fini, d'après un théorème connu[11]).

[11]) J. Mikusiński [5].

Comme dans la démonstration du théorème 10, on peut construire une solution non triviale $y_2(t)$ de (26) qui est non-négative dans l'intervalle (α,γ_0) et nulle à ses extrémités. Supposons, pour un moment, que $y_2(t)>0$ dans (α,γ_0). D'après le théorème 5, il existe une solution $y_0(t)$ de (26) telle que

$$y_0(\alpha)=0, \quad y_0'(\alpha)>0, \quad y_0(\gamma_0)>0, \quad y_0'(\gamma_0)>0.$$

Pour ε positif et assez petit, la fonction $y_1(t)=y_2(t)+\varepsilon y_0(t)$ sera positive dans un intervalle (α,γ_1) plus grand que (α,γ_0), ce qui contredit la définition du nombre γ_0. Cela prouve qu'il existe un nombre ξ intérieur, à (α,γ_0), où $y_0(\xi)=y_0'(\xi)=0$. Un raisonnement analogue au précédent montre qu'il existe une solution $z_2(t)$ de (27) qui est positive pour $\alpha\leqslant t\leqslant\gamma_0$.

Nous avons ainsi démontré qu'il existe toujours une solution $z_2(t)$ de (27) positive pour $U\leqslant t\leqslant V$.

Prolongeons la définition de $B(t)$ à droite et à gauche de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ de manière que $B(t)$ soit positive à l'extérieur de cet intervalle et que la fonction $z_2(t)$ possède des zéros à droite et à gauche de $[\alpha,\beta]$; ceci est possible d'après un théorème connu de Kneser[12]). En désignant par U_0 et V_0 les zéros consécutifs de $z_2(t)$ tels que $U_0<U$ et $V<V_0$, soit u le plus grand des nombres U_0,α et soit v le plus petit des nombres V_0,β. En vertu du théorème 5 il existe une solution $z_3(t)$ de (27) telle que $z_3(U_0)=z_3(v)=0$ et $z_3(t)>0$ pour $U_0<t<v$. Par raison de symétrie, il existe une solution $z(t)$ de (27) telle que $z(u)=z(v)=0$ et $z(t)>0$ pour $u<t<v$; ceci peut être démontré, en remplaçant la variable t par $-t$.

Or l'intervalle (u,v) est plus grand que (U,V), lorsque $\alpha<U$ ou $V<\beta$, et identique avec (U,V), lorsque $U=\alpha$ et $V=\beta$. Cela prouve la validité du théorème 11, car $V-U=Q_A$.

Corollaire 3. *Si* $0<m<A(t)<M$ *et* $\beta-\alpha>2\sqrt{2}\pi/\sqrt[4]{M}$, *on a*

$$2\sqrt{2}\pi/\sqrt[4]{M}<Q_A<2\sqrt{2}\pi/\sqrt[4]{m}.$$

Ce corollaire résulte aussitôt du théorème 11, en tenant compte de ce que, pour l'équation $x^{(4)}+\mu x=0$ $(\mu>0)$ la borne supérieure des distances des zéros consécutifs des solutions est $2\sqrt{2}\pi/\sqrt[4]{\mu}$ [13]).

Publications citées

[1] A. Davidoglou, *Sur les zéros des intégrales des équations linéaires du troisième ordre*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 130 (1900), p. 339-401.

[2] W. B. Fite, *Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society 19 (1918), p. 341-352.

[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[12]) A. Kneser [4].

[13]) J. Mikusiński [7], p. 31.

[4] A. Kneser, *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen*, Mathematische Annalen 42 (1893), p. 409-435.

[5] J. Mikusiński, *Sur l'inégalité différentielle* $|f^{(n)}(x)|\geqslant m|f(x)|$, Comptes Rendus 222 (1946), p. 359-361.

[6] — *Sur un problème d'interpolation pour les intégrales des équations différentielles linéaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1946), p. 165-205.

[7] — *Sur les intégrales de quelques équations différentielles linéaires*, Annales U. M. C. S., Sectio A, Vol. 1, Nr 2 (1946), p. 23-34.

[8] — *Sur les fonctions* $k_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu x^{n+k\nu}/(n+k\nu)!$ $(k=1,2,\ldots;\ n=0,1,\ldots,k-1)$, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 21 (1948), p. 46-51.

[9] — *On Fite's oscillation theorems*, Colloquium Mathematicum 2 (1949), p. 34-39.

[10] E. Sturm, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre*, Journal de Mathématiques pures et appliquées 1 (1836), p. 106-186.