Die Differenzierbarkeit der homogenen Funktionen und die geometrischen Eigenschaften der Indicatrix von Carathéodory

von M. KUCHARZEWSKI (Kraków)

Einleitung. Ist $f(x)=f(\xi^1,\dots,\xi^n)$ eine nicht negative und positiv-homogene Funktion der Ordnung $\mu\neq 0$ von $n\geqslant 2$ unabhängigen Veränderlichen $\xi^1,\dots,\xi^n$, so bestimmt die Gleichung $f(x)=1$, von ausgearteten Fällen abgesehen, eine Indicatrix I mit $o(0,\dots,0)$ als Grundpunkt.

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit den Zusammenhängen, die zwischen der Differenzierbarkeit von $f(x)$ in einem Punkte $x_0\neq o$ der Indicatrix und den geometrischen Eigenschaften der Indicatrix I bestehen.

Die Arbeit besteht aus drei Teilen:

Im ersten Teil bringe ich die grundlegenden Definitionen und Sätze, die zum Verständnis der Hauptteile dieser Arbeit nötig sind.

Im zweiten Teil betrachte ich die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in regulären Punkten der Indicatrix I. Aus den dort angestellten Überlegungen folgt, daß $f(x)$ in einem solchen Punkte $x_0\neq o$ dann und nur dann differenzierbar ist, wenn die Indicatrix I in x_0 eine $(n-1)$-dimensionale, nicht durch o gehende Tangentialhyperebene besitzt.

Im dritten Teil untersuche ich die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in denjenigen Punkten $x_0\neq o$, die hinsichtlich der Indicatrix I singulär von der ersten oder zweiten Art sind.

Es kommt darauf an, folgenden Satz, bewiesen von S. Gołąb, auf Funktionen von $n>2$ Veränderlichen zu verallgemeinern.

SATZ 1. *$f(x)=f(\xi^1,\xi^2)$ sei eine nicht negative und positiv-homogene Funktion der ersten Ordnung von zwei Veränderlichen. Ferner sei*

$$x_0(\xi_0^1,\xi_0^2)\neq o(0,0)$$

ein regulärer Punkt der durch die Gleichung $f(x)=1$ definierten Indicatrix I. Hat die Indicatrix I im Punkte x_0 eine nicht durch o gehende Tangentialgerade, so ist $f(x)$ im Punkte x_0 differenzierbar im Sinne von Stolz-Fréchet[1].

[1] Dieser Satz und sein Beweis wurden von S. Gołąb während des Mathematikerkongresses in Warszawa im Jahre 1938 dargestellt, aber nicht veröffentlicht.

Bezeichnungen. Alle Betrachtungen finden im n-dimensionalen $(n\geqslant 2)$ euklidischen Raume R^n statt. Ich benutze folgende Bezeichnungen:

Skalare. Reelle Zahlen und Skalare werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, mit folgenden Ausnahmen: Die Dimension des Raumes bezeichne ich immer mit n, die Dimension der Hyperebene mit k, und die laufenden Indizes mit i, j, k, l.

Punkte und Vektoren. Punkte bezeichne ich mit kleinen lateinischen Buchstaben: o, p, q, x, y, z. Der Buchstabe o bedeutet immer den Punkt $(0,\dots,0)$, d. h. den Anfangspunkt des Koordinatensystems.

Den Abstand zweier Punkte p und q bezeichne ich mit $|pq|$.

Vektoren bezeichne ich mit kleinen lateinischen Buchstaben: $a, b, o, r, s, t, u, v, w$, oder mit zwei kleinen lateinischen Buchstaben, mit einem Strich oben, z. B. $\overline{pq}$ bezeichnet einen Vektor mit dem Anfangspunkt p und dem Endpunkt q. Mit o bezeichne ich den Nullvektor.

Unter dem *Radiusvektor* des Punktes x verstehe ich den Vektor $\overline{ox}$. Da die Raumpunkte und ihre Radiusvektoren ein-eindeutig einander entsprechen, werde ich oft, ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen die Punkte mit ihren Radiusvektoren identifizieren; p darf z. B. auch den Vektor $\overline{op}$ bedeuten u. s. w. Infolgedessen verstehe ich unter der *Addition von Punkten* bzw. *Multiplikation der Punkte mit Zahlfaktoren* u. s. w., die Addition ihrer Radiusvektoren bzw. Multiplikation ihrer Radiusvektoren mit Zahlfaktoren, z. B. $x+y=\overline{ox}+\overline{oy}$, $\lambda x=\lambda\overline{ox}$, $|x|=|ox|$.

Der Vektor $t=\overline{pq}/|pq|$ wird *Einheitsvektor* des Vektors $\overline{pq}\neq 0$ genannt.

Punktmengen. Punktmengen bezeichne ich mit großen lateinischen Buchstaben.

Unter dem *von p ausgehenden* und zum Einheitsvektor s *parallelen Halbstrahl* verstehe ich die Punktmenge $p+\vartheta s$, wo $\vartheta>0$ ist. Einen solchen Halbstrahl bezeichne ich mit $P(p,s)$ oder $R(p,s)$, kurz: P, R. Den Einheitsvektor s nenne ich *Einheitsvektor des Halbstrahls* $P(p,s)$; der Halbstrahl enthält nicht seinen Anfangspunkt.

Es sei eine Punktmenge Z und ein Punkt p gegeben. Unter dem *Kegel* mit Scheitel p und der Leitmenge Z, verstehe ich die Vereinigung aller Punkte, die auf denjenigen von p ausgehenden Halbstrahlen liegen, die mit der Menge Z wenigstens einen gemeinsamen Punkt besitzen[2]. Den Kegel mit Scheitel p und der Leitmenge Z bezeichne ich mit $S(p,Z)$.

Der kürzeren Ausdrucksweise halber statt „der Halbstrahl P ist eine Teilmenge des Kegels S" oder „P ist im S enthalten" (im Zeichen: $P\subset S$) sagen wir „der Halbstrahl P gehört zum Kegel S". Obgleich

[2] Vergl. den Begriff der erweiterten Projektion von M aus o bei P. Aleksandroff und H. Hopf [1], S. 614.

letztere Ausdrucksweise vom Standpunkt der formalen Logik aus betrachtet nicht fehlerfrei ist, kann sie keine Mißverständnisse verursachen. Diese Bemerkung betrifft alle in dieser Weise gekürzten Ausdrücke, welche in dieser Arbeit[3]) vorkommen.

Es sei $P(p,s)$ ein von p ausgehender Halbstrahl mit dem Einheitsvektor s und δ sei eine beliebige reelle Zahl, welche der Ungleichung $0<\delta\leqslant\pi$ genügt. Eine *δ-Umgebung $U(P,\delta)$ des Halbstrahles P* nenne ich Vereinigung aller derjenigen Punkte, die auf denjenigen von p ausgehenden Halbstrahlen $P(p,u)$ liegen, deren Einheitsvektoren u der Bedingung $\cos\delta<su\leqslant 1$ [4]) genügen.

Als *ε-Umgebung des Punktes p* bezeichnet man die Menge $U(p,\varepsilon)$ aller derjenigen Punkte x, deren Abstand von p kleiner als ε ist.

Es sei ein Halbstrahl $R(o,r)$ gegeben. Bezeichnet man mit $p=\varrho r$, wobei $\varrho>0$, einen beliebigen Punkt des Halbstrahls R, so kann man zeigen, daß in jeder δ-Umgebung von R eine Umgebung von p enthalten ist.

Umgekehrt gibt es für jede ε-Umgebung von p eine derartige $U(R,\delta)$-Umgebung, so daß $U(p,\varepsilon)\subset U(R,\delta)$, wenn $0<\varepsilon<\varrho$ ist.

Es sei in R^n ein Punkt x_0 und ein System von k $(1\leqslant k\leqslant n)$ linear unabhängigen Vektoren $b_1,b_2,\ldots,b_k$ gegeben. Dann gibt es eine und nur eine k-dimensionale Hyperebene H_k, welche x_0 enthält und zu diesen Vektoren parallel ist. Die parametrische Gleichung dieser Hyperebene kann man in der Form schreiben

$$x=x_0+\sum_{i=1}^{k} b_i\tau^i,$$

wobei $\tau^1,\tau^2,\ldots,\tau^k$ beliebige reelle Zahlen sind.

I. Einleitende Untersuchungen und Tangentialhyperebenen

Homogene Funktionen. Definition 1. Eine in einer Punktmenge $Z\subset R^n$ definierte Funktion $f(x)=f(\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^n)$ von n Veränderlichen $(n\geqslant 2)$ nennen wir *positiv-homogen der Ordnung μ*, wenn für jeden Punkt $x\neq o$ und für jede reelle Zahl $\vartheta>0$ folgende Implikation gilt:

(1) *Aus* $x\,\epsilon\, Z$ *und* $(\vartheta x)\,\epsilon\, Z$ *folgt* $f(\vartheta x)=\vartheta^\mu f(x)$.

Aus der Implikation (1) folgt: Ist eine positiv-homogene Funktion in einem Punkte $x\neq o$ definiert, so kann man sie in eindeutiger Weise auf dem ganzen Halbstrahl $R(o,\overline{ox}/|ox|)$ bestimmen. Daraus folgt weiter: Ist eine solche Funktion auf einer Punktmenge Z definiert, so kann man sie eindeutig auf dem ganzen Kegel $S(o,Z)$ definieren. Darum werde ich in weiteren Überlegungen stets voraussetzen, daß der Definitionsbereich der betrachteten homogenen Funktion ein Kegel mit Scheitel o ist. Dann können wir die Implikation (1) in fogender Form schreiben:

(2) *Aus* $\vartheta>0$, $x\neq o$ *und* $x\,\epsilon\, Z$ *folgt* $f(\vartheta x)=\vartheta^\mu f(x)$.

Überdies nehme ich, falls $\mu>0$,

$$f(o)=0 \tag{3}$$

an, um die Stetigkeit von $f(x)$ zu gewährleisten.

Aus obigen Betrachtungen sehen wir, daß die Werte einer positiv-homogenen Funktion auf jedem von o ausgehenden Halbstrahl, auf dem sie definiert ist, miteinander verbunden sind. Die positiv-homogene Funktion ist nämlich in jedem Punkte eines solchen Halbstrahles nicht nur stetig[5]), sondern sie besitzt auch in der Richtung des betrachteten Halbstrahls alle stetigen Richtungsableitungen. Hingegen können die Werte einer positiv-homogenen Funktion, die den auf verschiedenen von o ausgehenden Halbstrahlen gelegenen Punkten zugeordnet sind, ganz beliebig gewählt werden, wenn die Funktion keine zusätzlichen Bedingungen erfüllt. Es genügt, die Bedingungen, denen eine positiv-homogene Funktion genügen soll, in der Richtung solcher Geraden, Ebenen oder Hyperebenen anzusetzen, welche hinsichtlich der Halbstrahlenrichtung querliegend sind. Aus der Stetigkeit der positiv-homogenen Funktion von n Veränderlichen im Punkte $x\neq o$ in der Richtung einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene, die den Punkt o nicht enthält, folgt z. B. ihre Stetigkeit im Punkte x im üblichen Sinne. Dasselbe betrifft die Existenz der Richtungsableitungen, die Differenzierbarkeit u. s. w.

Die Indicatrix von Carathéodory[6]). Eine positiv-homogene Funktion im ganzen Kegel mit Scheitel o ist eindeutig bestimmt, wenn wir ihre Werte in nur einem Punkte einen jedes zum Kegel gehörigen und von o ausgehenden Halbstrahles kennen, d. h. eine solche Funktion ist im ganzen Kegel dann definiert, wenn ihre Werte in jedem Punkte derjenigen Menge bekannt sind, die mit jedem zum Kegel gehörigen und von o ausgehenden Halbstrahl nur einen gemeinsamen Punkt hat. Ich werde mich weiter mit derartigen Punktmengen beschäftigen und darum führe ich für sie einige Definitionen ein.

Definition 2. Die Punktmenge $G\subset R^n$ nennt man *sternförmig in bezug auf Punkt o*, wenn jeder von o ausgehende Halbstrahl mit G höchstens einen gemeinsamen Punkt hat. o heißt dann der *Grundpunkt* der sternförmigen Menge G.

[3]) Diese Erläuterung stammt von S. Gołąb.

[4]) ab bedeutet das skalare Produkt der Vektoren a und b.

[5]) Natürlich spricht man hier von der Stetigkeit in der Richtung des entsprechenden Halbstrahls.

[6]) Die Benennung „Indicatrix" hat C. Carathéodory [3] in seiner Dissertation eingeführt.

Definition 3. Wir sagen, daß die *Halbstrahlfolge*[7]) $\{R_\nu(o,r_\nu)\}$ *gegen den Halbstrahl* $R(o,r)$ *konvergiert*, wenn der Einheitsvektor von R_ν gegen den Einheitsvektor von R konvergiert, d. h. $r_\nu\to r$, für $\nu\to\infty$.

Definition 4. Hat der Halbstrahl $R(o,r)$ mit der sternförmigen[8]) Punktmenge $G\subset R^n$ einen Punkt p gemeinsam, so sagt man, daß p ein dem Halbstrahl R *entschprechender Punkt* der Menge G ist.

Diesen Sachverhalt schreibe ich, obgleich nicht genau, in der symbolischen Form $p=G\cdot R$.

Definition 5[9]). G sei eine sternförmige Punktmenge von R^n. Die Folge

$$\{R_\nu(o,r_\nu)\}$$

nenne ich eine für die Menge G und den Halbstrahl $R_0(o,r_0)$ *grundsätzliche Halbstrahlfolge*, wenn sie die drei folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(4)\qquad \left.\begin{array}{ll} 1^0 & R_\nu\neq R_0, \\ 2^0 & R_\nu\to R_0, \\ 3^0 & p_\nu=R_\nu\cdot G \end{array}\right\} \quad \text{für } \nu=1,2,\ldots$$

(der Durchschnitt von R_ν und G besteht aus einem einzigen Punkt p_ν).

Definition 6. G sei eine sternförmige Punktmenge von R^n. Den Halbstrahl $R(o,r)$ nennt man *regulär hinsichtlich* G, wenn er den zwei folgenden Bedingungen genügt:

1^0 $R\cdot G=p$ (der Durchschnitt von R und G besteht aus einem einzigen Punkt p).

2^0 Jede Punktfolge $\{p_\nu\}$, die der für G und R grundsätzlichen Halbstrahlfolge $\{R_\nu\}$ entspricht, konvergiert gegen p.

Ähnlich kann man folgende Definitionen aufstellen.

Definition 7. Den Halbstrahl $R(o,r)$ nennt man *singulär von der ersten Art* hinsichtlich der sternförmigen Punktmenge G des R^n, wenn er den zwei folgenden Bedingungen genügt:

1^0 $R\cdot G=0$ (der Durchschnitt von R und G ist eine Nullmenge).

2^0 Es gibt eine für G und R grundsätzliche Halbstrahlfolge $\{R_\nu(o,r_\nu)\}$ derart, daß die ihr entsprechende Punktfolge $\{p_\nu\}$ gegen ∞ konvergiert, d. h. $|op_\nu|\to\infty$, für $\nu\to\infty$.

[7]) Wenn es ausdrücklich nicht vermerkt ist, verstehe ich unter einem Halbstrahl ohne Angabe seines Anfangspunktes einen von o ausgehenden Halbstrahl.

[8]) Da wir in allen folgenden Betrachtungen unter einer sternförmigen Punktmenge stets eine in Bezug auf o sternförmige Menge verstehen, brauchen wir nicht jedesmal den Grundpunkt der betrachteten sternförmigen Punktmenge anzugeben.

[9]) Für die Bildung der Definition 5 nahm ich mir, die von T. Ważewski in seinen Vorlesungen aufgestellte Definition einer, für die Menge Z und den Punkt a grundsätzlichen Punktfolge, als Muster.

Definition 8. Den Halbstrahl $R(o,r)$ nennt man *singulär von der zweiten Art* hinsichtlich einer sternförmigen Punktmenge G von R^n, wenn er den zwei folgenden Bedingungen genügt:

1^0 $R\cdot G=0$.

2^0 Es gibt eine für G und R grundsätzliche Halbstrahlfolge $\{R_\nu(o,r_\nu)\}$ derart, daß die ihr entsprechende Punktfolge $\{p_\nu\}$ gegen o konvergiert, d. h. $|op_\nu|\to 0$, für $\nu\to\infty$[10]).

Hat der Halbstrahl R mit G keinen Punkt gemeinsam, konvergiert aber jede Punktfolge $p_\nu=R_\nu\cdot G$, die der für G und R grundsätzlichen Halbstrahlfolge $\{R_\nu\}$ entspricht, stets gegen denselben Punkt p von R, so können wir durch Hinzufügung des Punktes p zur G eine neue sternförmige Menge erhalten, in Bezug auf welche R regulär ist.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß diejenigen Halbstrahlen, die hinsichtlich einer sternförmigen Menge G irregulär sind, in zwei Kategorien eingeteilt werden können. Zur ersten gehören solche Halbstrahlen, die zwar irregulär sind, aber durch eine passende Erweiterung der Definition von G regulär gemacht werden können. Die zweite enthält alle übrige irregulären Halbstrahlen. Diese werden als *wesentlich* irreguläre Halbstrahlen bezeichnet.

Bemerkung 1. Aus den obigen Betrachtungen und der Definition 6 schließen wir: der Halbstrahl $R(o,r)$ ist hinsichtlich der sternförmigen Punktmenge G dann und nur dann wesentlich irregulär, wenn es wenigstens eine Halbstrahlfolge $\{R_\nu(o,r_\nu)\}$ gibt, die den Bedingungen

$$1^0 \quad R_\nu\to R \quad \text{für } \nu\to\infty,$$
$$2^0 \quad R_\nu\cdot G=p_\nu \quad \text{für } \nu=1,2,\ldots$$

genügt und von solcher Art ist, daß die ihr entsprechende Punktfolge $\{p_\nu\}$ gegen keinen Punkt des Halbstrahles konvergiert.

Daraus folgt insbesondere, daß die singuläre Halbstrahlen der ersten und zweiten Art wesentlich irregulär sind.

Definition 9. Einen hinsichtlich der sternförmigen Menge G *regulären* (bzw. *singulären* der ersten oder der zweiten Art) Punkt nennt man einen jeden Punkt, der auf einem in Bezug auf G regulären (bzw. singulären der ersten oder der zweiten Art) Halbstrahl liegt.

Als *regulären Punkt von* G bezeichnet man denjenigen, hinsichtlich G regulären Punkt, der zu G gehört.

Definition 10. Der Halbstrahl $R(o,r)$ heißt *ordentlich* hinsichtlich der sternförmigen Punktmenge G, wenn es eine δ-Umgebung $U(R,\delta)$ des Halbstrahls R mit folgender Eigenschaft gibt: Jeder zur $U(R,\delta)$

[10]) Die Definitionen 6, 7 und 8 verdanke ich einer Mitteilung von S. Gołąb.

gehörige und von R verschiedene Halbstrahl mit o als Anfangspunkt hat mit G genau einen gemeinsamen Punkt.

Definition 11. Eine *Indicatrix mit dem Grundpunkt* o nenne ich eine in Bezug auf o sternförmige Punktmenge, die keine wesentlich irregulären Halbstrahlen besitzt, welche von den singulären Halbstrahlen der ersten oder zweiten Art verschieden sind[11]).

Ist eine positiv-homogene Funktion auf einer Indicatrix I mit o als Grundpunkt definiert, so sind ihre Werte in jedem Punkte, der auf dem zu I regulären Halbstrahl liegt, eindeutig bestimmt.

Wit betrachten ganz beliebige Indicatrizen und nehmen an, daß in jedem Punkte x einer solchen Indicatrix I der Funktionswert einer positiv-homogenen Funktion $f(x)$ stets gleich 1 ist; dann ist $f(x)$ auf dem ganzen Kegel $S(o,I)$ eindeutig bestimmt und positiv. Im Punkte o nehmen wir $f(o)=0$ an, wenn die Ordnung der Homogenität von $f(x)$, $\mu>0$ ist. Falls $\mu<0$, hat es keinen Sinn den Wert von $f(o)$ zu definieren.

Ist umgekehrt eine positiv-homogene und nicht negative Funktion $f(x)$ gegeben, so stellt die Menge aller derjenigen Punkte x, für welche die Beziehung $f(x)=1$ gilt, unter zusätzlichen Voraussetzungen für $f(x)$ es ist z. B. hinreichend, daß $f(x)$ stetig sei, eine Indicatrix I mit dem Grundpunkt o dar. Die geometrischen Eigenschaften dieser Indicatrix sind offenbar mit den Eigenschaften von $f(x)$ verbunden.

Im folgenden werde ich besonders die Zusammenhänge zwischen der Differenzierbarkeit von $f(x)$ in einem Punkte $x_0\neq o$ und der Existenz einer $(n-1)$-dimensionalen nicht durch o gehenden Hyperebene, die an I im Punkte p_0 (der dem Punkte x_0 entspricht) tangential ist, betrachten.

Zuerst bringe ich einige Definitionen und Sätze, welche die Differenzierbarkeit der Funktionen mehrerer Veränderlichen und die Existenz von Hyperebenen, die an gewisse Punktmengen tangential sind, betreffen.

Die Differenzierbarkeit der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Jetzt gebe ich eine für die Differenzierbarkeit der Funktion $f(x)$[12]) notwendige und hinreichende Bedingung.

Satz 2. *Eine in der Umgebung* $U(x_0,\varepsilon)$ *des Punktes*

(5) $$x_0(\xi_0^1,\xi_0^2,\ldots,\xi_0^n)$$

definierte Funktion $f(x)$ *ist dann und nur dann im Punkte* x_0 *differenzierbar im Sinne von Stolz-Fréchet*[13]), *wenn für jedes Funktionensystem*

(6) $$\xi^i=\varphi_i(\tau),\qquad 0\leqslant\tau\leqslant\delta,\qquad \textit{für}\quad i=1,2,\ldots,n,$$

[11]) Eine solche Definition der Indicatrix ist für unsere Zwecke brauchbar.
[12]) Der Beweis befindet sich in der Arbeit von S. Gołąb [6], S. 33-39.
[13]) M. Fréchet [5], S. 385.

das folgende Bedingungen erfüllt:

(7) $$\varphi_i(0)=\xi_0^i \qquad \textit{für}\quad i=1,2,\ldots,n,$$

(8) $$\left.\frac{d\varphi_i}{d\tau}\right|_{\tau=+0}=\lambda_i$$

(9) $$\big(\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau),\ldots,\varphi_n(\tau)\big)\,\epsilon\, U(x_0;\varepsilon)\qquad \textit{für}\quad 0\leqslant\tau\leqslant\delta,$$

die zusammengesetzte Funktion

(10) $$F(\tau)=f\big(\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau),\ldots,\varphi_n(\tau)\big)$$

in $\tau=0$ *eine rechtsseitige Ableitung besitzt, und diese Ableitung sich in der Gestalt*

(11) $$F'(0)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\lambda^i$$

ausdrücken läßt, wobei β_i *für* $i=1,2,\ldots,n$ *vom Funktionensystem* (6) *unabhängige Konstanten sind.*

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes hat S. Gołąb den Satz 1 (Einleitung) bewiesen. Die im zweiten Teil dieser Arbeit bewiesene Verallgemeinerung des Satzes 1 für den Fall von n Veränderlichen, stützt sich auf Satz 2.

In den Überlegungen des zweiten und dritten Teiles dieser Arbeit, werde ich oft folgenden Satz benutzen:

Satz 3. *Ist eine positiv-homogene Funktion* $f(x)$ *in einem Punkte* $x_0\neq o$ *differenzierbar, so ist sie es auch in jedem Punkte des Halbstrahles* $R(o;\overline{ox_0}/|ox_0|)$.

Die Tangentialhyperebenen. Wir werden öfters benutzen

Definition 12. p_0 sei ein Häufungspunkt der Menge $Z\subset R^n$. Den Halbstrahl $P(p_0;s)$ nennt man *Kontingenthalbstrahl von* Z *im Punkte* p_0, wenn es wenigstens eine Punktfolge $\{p_\nu\}$ gibt derart, daß die Relationen

(12) $$p_\nu\neq p_0,\qquad p_\nu\,\epsilon\, Z,\qquad p_\nu\to p_0\qquad \text{für}\quad \nu=1,2,\ldots,$$

(13) $$s_\nu=\frac{\overline{p_0p_\nu}}{|p_0p_\nu|}\to s\qquad \text{für}\quad \nu\to\infty,$$

erfüllt sind. Den Kontingenthalbstrahl von Z in p_0 werde ich mit $P(p_0,Z)$ bezeichnen.

Satz 4. *Der Halbstrahl $P(p_0,s)$ ist dann und nur dann ein Kontingenthalbstrahl von Z in p_0, wenn es eine den Relationen (12) genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$ gibt, derart, daß*

(14) $$\frac{|p_\nu p_\nu'|}{|p_0 p_\nu|} \to 0 \quad \text{für} \quad \nu\to\infty,$$

wobei p_ν' die senkrechte Projektion von p_ν auf $P(p_0;s)$ bedeutet.

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Ich nehme an, daß $P(p_0,s)$ ein Kontingenthalbstrahl von $Z\subset R^n$ in p_0 ist. Es gibt eine den Relationen (12) genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$ derart, daß (13) gilt.

Die senkrechte Projektion p_ν' von p_ν auf die Trägergerade des Halbstrahls P ist durch die Formel

(15) $$p_\nu'=p_0+s(s\cdot\overline{p_0p_\nu})$$

definiert. Da infolge (13)

(16) $$s\cdot s_\nu\to s^2=1$$

ist, so gilt für hinreichend große Indizes ν $(\nu\geqslant\nu_0)$ die Relation

(17) $$s\cdot\frac{\overline{p_0p_\nu}}{|p_0p_\nu|}=s\cdot s_\nu>0.$$

Aber dann ist auch

(18) $$s\cdot\overline{p_0p_\nu}\overset{\mathrm{df}}{=}\delta_\nu>0 \qquad \text{für} \quad \nu\geqslant\nu_0.$$

Diese letzte Beziehung besagt wegen (15), daß

(19) $$p_\nu'\in P(p_0,s).$$

Aus (15) erhalten wir

(20) $$\frac{\overline{p_\nu p_\nu'}}{|p_0p_\nu|}=-s_\nu+s(s\cdot s_\nu).$$

Aus (20) und (16) folgt (14). Wir haben also gezeigt, daß $\{p_\nu\}$, für $\nu\geqslant\nu_0$, eine im Satz 4 gesuchte Punktfolge ist.

Die Bedingung ist hinreichend. Gegeben sei eine den Relationen (12) genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$, für welche (14) gilt. Da p_ν' die senkrechte Projektion von p_ν auf $P(p,s)$ ist, genügt p_ν' also der Gleichung (15) und der Ungleichung (18) für $\nu=1,2,\ldots$ Daraus folgt aber, daß auch die Relationen (20) und (17) für p_ν und p_ν' erfüllt sind. Durch einfaches Umformen erhält man aus (20)

(21) $$\frac{|p_\nu p_\nu'|}{|p_0p_\nu|}=\sqrt{1-(s\cdot s_\nu)^2}\,.$$

Aus (21) und (17) ergibt wegen (14) $s\cdot s_\nu\to 1$. Daraus wegen (12), (20) und (14) folgt (13), w. z. b. w.

Definition 13. Unter dem *Kontingent* der Punktmenge $Z\subset R^n$ in p_0 verstehe ich die Vereinigungsmenge aller Punkte, die auf den Kontingenthalbstrahlen von Z in p_0 (p_0 einschließlich) liegen. Das Kontingent von Z in p_0 wird mit $K(p_0,Z)$ bezeichnet[14]).

Satz 5. *Dann und nur dann enthält das Kontingent $K(p_0,Z)$ wenigstens einen Halbstrahl $P(p_0,Z)$, wenn p_0 ein Häufungspunkt der Punktmenge Z ist.*

Definition 14. p_0 sei ein Häufungspunkt der Punktmenge $Z\subset R^n$. Unter der an Z in p_0 *im weiteren Sinne tangentialen Hyperebene* verstehe ich die das ganze $K(p_0,Z)$ enthaltende Hyperebene, die eine möglichst niedrige Dimension hat.

Bezeichnet man mit k die Dimension dieser Tangentialhyperebene, so folgt aus Satz 5, daß $1\leqslant k$ ist; andererseits muß natürlich die Ungleichung $k\leqslant n$ gelten.

Definition 15. Eine k-dimensionale $(1\leqslant k\leqslant n)$ Hyperebene $H_k\subset R^n$ bezeichnet man als *tangential im engeren Sinne* an die Punktmenge $Z\subset R^n$ im Häufungspunkte p_0 von Z, wenn $p_0\in H_k$ und $H_k\subset K(p_0,Z)$.

Definition 16. Eine Hyperebene $H_k\subset R^n$ heißt *tangential* (schlechthin) an die Punktmenge $Z\subset R^n$ in einem Häufungspunkt p_0 von Z, wenn H_k gleichzeitig eine im engeren und weiteren Sinne an Z in p_0 tangentiale Hyperebene ist, d. h. wenn $H_k=K(p_0,Z)$.

Folgerung 1. *Es sei p_0 ein Häufungspunkt von $Z\subset R^n$. Gibt es in p_0 eine an Z tangentiale Hyperebene, so gibt es in diesem Punkte auch eine an Z tangentiale Hyperebene im weiteren Sinne, und diese beiden Hyperebenen sind einander gleich.*

Natürlich ist die Umkehrung dieser Folgerung nicht richtig.

Satz 6. *Ist p_0 ein Häufungspunkt der Punktmenge $Z\subset R^n$, so gibt es eine und nur eine an Z in p_0 tangentiale Hyperebene im weiteren Sinne. Die eindeutig bestimmte Dimension k dieser Hyperebene genügt der Ungleichung $1\leqslant k\leqslant n$.*

Satz 7. *Es sei p_0 ein Häufungspunkt der Punktmenge $Z\subset R^n$. Eine Hyperebene H_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ enthält dann und nur dann das ganze Kontingent von Z in p_0, wenn für jede den Relationen (12) genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$*

(22) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{|p_\nu p_\nu'|}{|p_0p_\nu|}=0$$

gilt, wobei p_ν' eine senkrechte Projektion von p_ν auf H_k bedeutet.

[14]) Was diese Ausdruckweise anbelangt, siehe Einleitung.

Beachten wir, daß die Hyperebene H_k durch die im Satz 7 auftretende Bedingung nicht eindeutig bestimmt ist. Nehmen wir z. B. eine in R^3 enthaltene Punktmenge Z, die in ihrem Häufungspunkte p_0 eine tangentiale Gerade H_1 besitzt, so besteht die Relation (22) nicht nur in Bezug auf H_1 und Z, für jede (12) genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$, sondern auch für jede Ebene H_2, welche H_1 enthält. Dies folgt aus der Ungleichung

$$|p_\nu p'_\nu| \geqslant |p_\nu p^*_\nu| \geqslant 0,$$

wobei p^*_ν die senkrechte Projektion von p_ν auf H_2 bedeutet.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Ich nehme an, daß in einem Häufungspunkte p_0 von Z eine Hyperebene H_k existiert, welche der im Satz 7 auftretenden Bedingung genügt. Man soll zeigen, daß dann $K(p_0,Z)\subset H_k$. Für $k=n$ ist die Inklusion offensichtlich richtig. Es genügt also den Fall

(23) $$1\leqslant k\leqslant n-1$$

zu betrachten.

Um die Inklusion zu beweisen, zeigen wir, daß ein beliebiger Kontingenthalbstrahl $P(p_0,Z)$ von Z in p_0 zu H_k gehört

(24) $$P(p_0;Z)\subset H_k.$$

Bezeichnet man den Einheitsvektor von $P(p_0,Z)$ mit s, so gibt es gemäß der Definition 12 eine den Relationen (12) genügende Punktfolge, die die Beziehung (13) erfüllt. Die Inklusion (24) wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß s parallel H_k ist. Zu diesem Zweck berechnen wir die senkrechte Projektion p'_ν von p_ν auf H_k. H_k sei durch das System der Gleichungen

(25) $$a_i(x-p_0)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n-k)$$

dargestellt.

Überdies können wir stets voraussetzen, daß die Vektoren

(26) $$a_i \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n-k$$

ein orthonormales System bilden. Die zu H_k komplementäre und durch p_ν gehende Hyperebene H_{n-k} kann in folgender Form dargestellt werden:

(27) $$x=p_\nu+\sum_{i=1}^{n-k} a_i\tau^i.$$

Dann ist p'_ν, gemäß der Definition 14, durch die Gleichung

(28) $$p'_\nu=p_\nu-\sum_{i=1}^{n-k} a_i(a_i\cdot\overline{p_0 p_\nu})$$

bestimmt, die wir durch Auflösung der Gleichungssysteme (25) und (27) erhalten. Aus (28) folgt

(29) $$\frac{\overline{p_\nu p'_\nu}}{|p_0 p_\nu|}=-\sum_{i=1}^{n-k} a_i(a_i\cdot s_\nu).$$

Infolge der Voraussetzung (22) konvergiert die linke Seite von (29) gegen Null für $\nu\to\infty$ und die rechte Seite wegen (13) konvergiert gegen $-\sum_{i=1}^{n-k} a_i(a_i\cdot s)$, also

(30) $$-\sum_{i=1}^{n-k} a_i(a_i\cdot s)=0.$$

Aus (30) folgt

(31) $$a_i\cdot s=0 \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n-k.$$

Aber dann ist s parallel H_k, womit wir, daß unsere Bedingung hinreichend ist, bewiesen haben.

Mit Hilfe eines indirekten Beweises zeige ich jetzt, daß diese Bedingung auch notwendig ist. Ich nehme also an, daß es in einem Häufungspunkte p_0 von Z eine Hyperebene H_k gibt, für welche $K(p_0;Z)\subset H_k$ gilt. Auch jetzt können wir unsere Betrachtungen auf den Fall (23) beschränken, weil im Falle $k=n$ die Behauptung offensichtlich richtig ist. Zur Durchführung des Beweises nehme ich an, daß es eine den Relationen (12) genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$ gibt, der eine nicht gegen Null konvergierende Folge

(32) $$\frac{|p_\nu p'_\nu|}{|p_0 p_\nu|}$$

entspricht.

Aus der Punktfolge $\{p_\nu\}$ kann man also eine Teilfolge $\{p_{\alpha_\nu}\}$ so wählen, daß

(33) $$\frac{|p_{\alpha_\nu} p'_{\alpha_\nu}|}{|p_0 p_{\alpha_\nu}|}\geqslant\varepsilon_0>0 \quad \text{für} \quad \nu=1,2,\ldots$$

ist. Ferner wählen wir aus $\{p_{\alpha_\nu}\}$ eine solche Teilfolge $\{p_{\beta_\nu}\}$, daß

(34) $$s_\nu=\frac{\overline{p_0 p'_{\beta_\nu}}}{|p_0 p_{\beta_\nu}|}\to s.$$

Ist die Hyperebene H_k durch das Gleichungssystem (25) bestimmt, so befriedigen die Punkte p_{β_ν} und p'_{β_ν} eine zu (29) ähnliche Gleichheit. Daraus ergibt sich infolge der Beziehung

$$P(p_0,s)\subset K(p_0,Z)\subset H_k, \tag{35}$$

daß

$$\frac{|p_{\beta_\nu}p'_{\beta_\nu}|}{|p_0p'_{\beta_\nu}|}\to 0. \tag{36}$$

(36) widerspricht aber der Relation (33). Auf diese Weise ist die Notwendigkeit unserer Bedingung bewiesen.

Satz 8. *Es sei p_0 ein Häufungspunkt von $Z\subset R^n$. Eine Hyperebene H_k ist dann und nur dann tangential an Z in p_0, wenn*

1^0 $H_k\subset K(p_0,Z)$;

2^0 *für jede den Relation* (12) *genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$, die Beziehung* (22) *besteht.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition 16 und dem Satze 7.

Satz 9. *I sei eine Indicatrix mit o als Grundpunkt, und $R_0(o;r_0)$ sei ein in Bezug auf I ordentlicher und regulärer Halbstrahl. Außerdem sei $p_0=R_0\cdot I$.*

Eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene H_{n-1}, die o nicht enthält, ist dann und nur dann tangential an I in p_0, wenn für jede den Bedingungen

$$p_\nu\neq p_0,\quad p_\nu\in I,\quad p_\nu\to p_0\quad \text{für}\quad \nu=1,2,\ldots \tag{37}$$

genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$ die Beziehung (22) *erfüllt ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit vorstehender Bedingung folgt unmittelbar aus Satz 8. Jetzt beweise ich, daß sie auch hinreichend ist.

Im regulären Punkte p_0 der Indicatrix I sei eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene H_{n-1} gegeben, die durch die Gleichung

$$a(x-p_0)=0,\qquad a^2=1 \tag{38}$$

bestimmt ist und o nicht enthält.

Überdies soll H_{n-1} folgende Eigenschaft besitzen: Für jede Punktfolge $\{p_\nu\}$, die den Beziehungen (37) genügt, sei die Beziehung (22) erfüllt. Ferner sei mit $U(R_0,\delta)$ diejenige Umgebung des Halbstrahls R_0 bezeichnet, deren jeder Halbstrahl einen gemeinsamen Punkt mit I und H_{n-1} hat.

Aus den obengenannten Voraussetzungen, die H_{n-1} betreffen, und dem Satz 7 folgt

$$K(p_0,Z)\subset H_{n-1}. \tag{39}$$

Es genügt jetzt die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Zu diesem Zweck nehmen wir einen beliebigen zu H_{n-1} gehörigen Halbstrahl $P(p_0,t)$ mit p_0 als Anfangspunkt und beweisen, daß $P(p_0,t)$ ein Kontingenthalbstrahl von I in p_0 ist, d. h. $P(p_0,t)\subset K(p_0,Z)$.

Die Richtigkeit dieser Inklusion wird bewiesen sein, wenn wir imstande sind, eine den Relationen (37) genügende Punktfolge zu konstruieren, deren entsprechende Einheitsvektorenfolge

$$s_\nu=\frac{\overline{p_0p_\nu}}{|p_0p_\nu|} \tag{40}$$

gegen t konvergiert. Um eine solche Punktfolge zu konstruieren, wählen wir aus dem Halbstrahl $P(p_0,t)$ eine Punktfolge $\{q_\nu\}$, die durch folgende Bedingungen definiert ist:

$$q_\nu\neq p_0,\qquad q_\nu\in P\cdot U(R_0,\delta),\qquad q_\nu\to p_0. \tag{41}$$

Die den Relationen (41) entsprechende Halbstrahlfolge $\{R_\nu(o;\overline{oq_\nu}/|oq_\nu|)\}$ stellt eine für I und R_0 grundsätzliche Folge dar. Die Punktfolge $p_\nu=R_\nu\cdot I$ genügt also den Bedingungen (37). Aus der Folge $\{p_\nu\}$ kann man eine Teilfolge $\{p_{a_\nu}\}$ so wählen, daß die der Teilfolge $\{p_{a_\nu}\}$ entsprechende Einheitsvektorenfolge gegen einen Einheitsvektor s konvergiert, d. h.

$$s_\nu=\frac{\overline{p_0p_{a_\nu}}}{|p_0p_{a_\nu}|}\to s. \tag{42}$$

Ich nehme an, daß schon p_ν die Eigenschaft (42) besitzt. Die so definierte Punktfolge $\{p_\nu\}$ stellt dann die gesuchte Punktfolge dar, wenn wir beweisen, daß $s=t$. Folgende Gleichheiten sind richtig (vergl. Fig. 1):

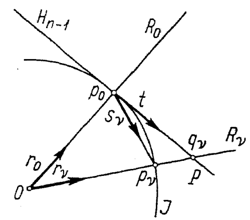

Fig. 1

$$\overline{p_0p_\nu}=\overline{op_\nu}-\overline{op_0},\qquad \overline{oq_\nu}=\overline{op_0}+\overline{p_0q_\nu}. \tag{43}$$

Bezeichnet man mit

$$r_\nu=\frac{\overline{oq_\nu}}{|oq_\nu|}=\frac{\overline{op_\nu}}{|op_\nu|} \tag{44}$$

den Einheitsvektor von R_ν, so erhalten wir

$$\overline{op_\nu}=\tau_\nu r_\nu,\qquad \tau_\nu>0,\qquad \overline{op_0}=\tau_0r_0,\qquad \tau_0>0. \tag{45}$$

Mit Hilfe der Relationen (43), (44) und (45), kann man den Einheitsvektor s_ν in folgender Form darstellen:

$$s_\nu=a_\nu t+\beta_\nu r_0, \tag{46}$$

wobei

$$\alpha_\nu > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{47}$$

Wenn wir in der Gleichung (46) den Grenzübergang $\nu \to \infty$ durchführen, so erhalten wir wegen (42)

$$s = \alpha t + \beta r_0, \tag{48}$$

wobei infolge (47)

$$\alpha \geqslant 0. \tag{49}$$

Multiplizieren wir beide Seiten von (48) skalar mit a (dem Vektor, der zu H_{n-1} orthogonal ist), so erhalten wir

$$\beta = 0, \tag{50}$$

da $as = 0$ $\big(P(p_0, s) \subset K(p_0, I) \subset H_{n-1}\big)$, $at = 0$ $\big(P(p_0, t) \subset H_{n-1}\big)$ und $ar_0 \neq 0$ (H_{n-1} enthält nicht den Punkt o).

Infolge (50) kann man also die Gleichung (48) in der Form $s = \alpha t$ schreiben. Daraus folgt $s = 1$, denn s und t sind Einheitsvektoren und für α gilt die Ungleichung (49), womit der Beweis beendet ist.

Satz 10. *Es sei $p_0 \neq o$ ein Häufungspunkt einer in Bezug auf o sternförmigen Punktmenge $Z \subset R^n$. Weiter sei eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene H_{n-1} von der Gleichung*

$$a(x - p_0) = 0, \quad \textit{wobei} \quad a^2 = 1, \tag{51}$$

gegeben. Überdies nehmen wir an, daß H_{n-1} den Punkt o nicht enthält. Mit $U(p_0, \varepsilon)$ bezeichnet man eine derartige Umgebung des Punktes p_0, daß jeder von o ausgehende Halbstrahl, der einen beliebigen Punkt von $U(p_0, \varepsilon)$ enthält, einen gemeinsamen Punkt mit H_{n-1} besitzt (natürlich muß $0 < \varepsilon \leqslant |op_0|$ sein). Bedeutet $\{p_\nu\}$ eine Punktfolge, die den Bedingungen (12) genügt und die zur Umgebung $U(p_0, \varepsilon)$ gehört, so verstehen wir unter p'_ν die senkrechte Projektion von p'_ν auf H_{n-1} und unter p''_ν den für $R_\nu(o, \overline{op_\nu}/|op_\nu|)$ und H_{n-1} gemeinsamen Punkt. Unter den vorstehenden Voraussetzungen gilt folgende Behauptung:

Damit die Folge

$$\alpha_\nu = \frac{|p_\nu p'_\nu|}{|p_0 p_\nu|} \tag{52}$$

gegen 0 konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß die Folge

$$\beta_\nu = \frac{|p_\nu p''_\nu|}{|p_0 p''_\nu|} \tag{53}$$

Null als Grenzwert hat.

Beweis. Zuerst zeige ich, daß die Bedingung hinreichend ist. Es sei eine den Relationen (12) genügende Punktfolge $\{p_\nu\}$ gegeben, so daß

$$\beta_\nu \to 0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty. \tag{54}$$

Um zu beweisen, daß dann auch $\alpha_\nu \to 0$ für $\nu \to \infty$, führe ich einige Beziehungen ein. Es sind nämlich

$$\overline{p_\nu p'_\nu} = -a[a \cdot (\overline{p_0 p_\nu})], \tag{55}$$

$$\overline{p_\nu p''_\nu} = -p_\nu \frac{a \cdot (\overline{p_0 p_\nu})}{a \cdot p_\nu}, \tag{56}$$

$$\overline{p_0 p''_\nu} = \overline{p_0 p_\nu} - p_\nu \frac{a \cdot (\overline{p_0 p_\nu})}{a \cdot p_\nu}. \tag{57}$$

Aus (55) und (56) erhalten wir

$$\overline{p_\nu p'_\nu} = a \cdot \left\{ [(\overline{p_\nu p''_\nu}) \cdot p_\nu] \frac{a p_\nu}{|p_\nu|^2} \right\}. \tag{58}$$

Daher ist

$$|p_\nu p'_\nu| = |(\overline{p_\nu p''_\nu}) \cdot p_\nu| \frac{|a p_\nu|}{|p_\nu|^2}. \tag{59}$$

Außerdem gilt offenbar folgende Ungleichung:

$$|p_0 p_\nu| \geqslant \big| |p_0 p''_\nu| - |p_\nu p''_\nu| \big|. \tag{60}$$

Es muß aber

$$|p_0 p''_\nu| \neq 0 \tag{61}$$

sein (andernfalls wäre β_ν sinnlos, was unserer Voraussetzung (54) widerspricht). Mit Hilfe von (53) erhalten wir aus (60) und (61) die Ungleichung

$$|p_0 p_\nu| \geqslant |p_0 p''_\nu| \, |1 - \beta_\nu|. \tag{62}$$

Die rechte Seite letzterer Ungleichung ist positiv für $\nu \geqslant \nu_0$ $\big((54)$ wegen$\big)$. Setzt man (59) und (62) in (52) ein, so erhalten wir folgende Ungleichung für α_ν:

$$0 \leqslant \alpha_\nu \leqslant \frac{\left| \dfrac{\overline{p_\nu p''_\nu}}{|p_0 p''_\nu|} \cdot p_\nu \right|}{|1 - \beta_\nu|} \cdot \frac{|a p_\nu|}{|p_\nu|^2} \quad \text{für} \quad \nu \geqslant \nu_0. \tag{63}$$

Aus (63) folgt unmittelbar $\alpha_\nu \to 0$ für $\nu \to \infty$, daß der Vektor $\overline{p_\nu p''_\nu}/|p_0 p''_\nu|$ gleichzeitig mit β_ν gegen Null konvergiert.

Jetzt zeige ich, daß die Bedingung notwendig ist. Dazu bezeichne ich mit $\{p_\nu\}$ diejenige, die den Relationen (12) genügt, Punktfolge und für die die Beziehung $\alpha_\nu \to 0$ für $\nu \to \infty$ erfüllt ist.

Aus (56) ergibt sich

$$(64) \qquad |p_\nu p_\nu''| = |p_\nu| \left| \frac{a \cdot (\overline{p_0 p_\nu})}{a \cdot p_\nu} \right| = |p_\nu| \left| \frac{a(\overline{p_\nu p_\nu'})}{a p_\nu} \right|,$$

da infolge (55) $a \cdot (\overline{p_\nu p_\nu'}) = -a(\overline{p_0 p_\nu})$.

Andrerseits folgt aus (57)

$$(65) \qquad |p_0 p_\nu''| \geqslant \left| |p_0 p_\nu| - |p_\nu| \left| \frac{a \cdot (\overline{p_\nu p_\nu'})}{a p_\nu} \right| \right| = |p_0 p_\nu| \left| 1 - \frac{|p_\nu|}{|a \cdot p_\nu|} \left| a \cdot \frac{\overline{p_\nu p_\nu'}}{|p_0 p_\nu|} \right| \right|.$$

Der letzte Ausdruck von (65) ist positiv für $\nu \geqslant \nu_0$. Setzt man (65) und (64) in (53) ein, so erhalten wir folgende Ungleichung für β_ν

$$0 \leqslant \beta_\nu \leqslant \frac{|p_\nu|}{|a \cdot p_\nu|} \cdot \frac{\left| a \cdot \dfrac{\overline{p_\nu p_\nu'}}{|p_0 p_\nu|} \right|}{\left| 1 - \left| \dfrac{p_\nu}{a \cdot p_\nu} \right| \left| a \cdot \dfrac{\overline{p_\nu p_\nu'}}{|p_0 p_\nu|} \right| \right|}.$$

Wir sehen also, daß die Beziehung (54) richtig ist, denn die Vektorenfolge $\overline{p_\nu p_\nu'}/|p_0 p_\nu|$ konvergiert gleichzeitig mit α_ν gegen Null, w. z. b. w.

Mit Hilfe des Satzes 10 kann man den Satz 9 in folgender Form aussprechen:

Satz 9*. *$R_0(o, r_0)$ sei hinsichtlich einer in Bezug auf o sternförmigen Indicatrix I regulärer und ordentlicher Halbstrahl. Mit $U(R_0, \delta)$ wird eine derartige Umgebung des Halbstrahles R_0 bezeichnet, daß jeder zu $U(R_0, \delta)$ gehörige Halbstrahl je einen mit I und H_{n-1} gemeinsamen Punkt besitzt. Ist $\{R_\nu(o, r_\nu)\}$ eine Halbstrahlenfolge die den Bedingungen*

$$(66) \qquad R_\nu \neq R_0, \qquad R_\nu \subset U(R_0, \delta), \qquad R_\nu \to R_0$$

genügt, so setzen wir $p_\nu = R_\nu I$. Eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene H_{n-1}, die nicht durch o geht, ist dann und nur dann tangential an I im Punkte $p_0 = R_0 \cdot I$, wenn für jede Halbstrahlenfolge $\{R_\nu(o; r_\nu)\}$, welche den Bedingungen (66) genügt, die Folge

$$(67) \qquad \frac{|p_\nu p_\nu''|}{|p_0 p_\nu''|} \to 0 \qquad \text{für} \quad \nu \to \infty$$

gegen Null konvergiert, wobei $p_\nu'' = R_\nu \cdot H_{n-1}$.

2. Die Differenzierbarkeit der positiv-homogenen Funktionen in regulären Punkten

Jetzt beweise ich die in der Einleitung angekündigte Verallgemeinerung des Satzes 1, für den Fall von n $(n \geqslant 2)$ Veränderlichen.

Satz 11. *Es sei $f(x)$ eine Funktion von n Veränderlichen $(n \geqslant 2)$, die folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) *$f(x)$ ist in einer Umgebung $U(R_0, \delta)$ definiert und dort positiv.*

(2) *$f(x)$ ist positiv-homogen der Ordnung $\mu \neq 0$.*

(3) *Durch die Gleichung $f(x) = 1$ wird eine Indicatrix I mit o als Grundpunkt bestimmt.*

Ist $R_0(o, r_0)$ ein hinsichtlich I regulärer Halbstrahl[15]*) und hat die Indicatrix I im Punkte $p_0 = R_0 \cdot I$ eine $(n-1)$-dimensionale, nicht durch o gehende, Tangentialhyperebene H_{n-1}, so ist in jedem Punkte $x_0 \in R_0$ die Funktion $f(x)$ differenzierbar im Sinne von Stolz-Fréchet.*

Beweis. Infolge des Satzes 3 genügt es zu zeigen, daß $f(x)$ im Punkte p_0 differenzierbar ist. Den Beweis des vorstehenden Satzes führe ich mit Hilfe des Satzes 2 und deshalb zeige ich zuerst folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 1. *$f(x)$ sei eine den Voraussetzungen des obigen Satzes genügende Funktion, während I eine durch die Gleichung*

$$(4) \qquad f(x) = 1$$

bestimmte Indicatrix, mit den im Satze 11 beschriebenen Eigenschaften, ist.

Dann existiert für jedes Funktionssystem $x = x(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \delta)$, welches folgenden Bedingungen genügt:

$$(5) \qquad x(o) = p_0,$$

$$(6) \qquad x(\tau) \in U(R_0, \delta_0),$$

$$(7) \qquad \left. \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=+0} = l(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n), \qquad \text{wo} \quad l^2 > 0,$$

die rechtsseitige Ableitung der zusammengesetzten Funktion $f[x(\tau)]$ und läßt sich durch die Formel

$$(8) \qquad \left. \frac{df[x(\tau)]}{d\tau} \right|_{\lambda=+0} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda^i$$

ausdrücken. Dabei sind $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ passende Konstanten, die vom Funktionssystem $x = x(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \delta)$ nicht abhängen.

[15]) Wegen (2) ist er auch in $U(R_0, \delta)$ ein hinsichtlich I ordentlicher Halbstrahl, es gilt daher folgende Implikation: Aus $R \subset U(R_0, \delta)$ folgt $R \cdot I = p$.

Beweis. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken können wir $l^2=1$ annehmen. Ist

$$(9) \qquad a(x-p_0)=1, \qquad a^2=1$$

eine Gleichung der Hyperebene H_{n-1}, so ist $a\cdot p_0\neq 0$, weil nach Voraussetzung H_{n-1} den Punkt o nicht enthält.

Wir nehmen noch an, daß die Umgebung $U(R_0,\delta)$ so gewählt wurde, daß jeder zu $U(R_0,\delta)$ gehörige Halbstrahl einen gemeinsamen Punkt mit H_{n-1} hat, d. h. daß die Implikation

$$(10) \qquad \text{aus} \quad R\subset U(R_0,\delta) \quad \text{folgt} \quad R\cdot H_{n-1}=p''$$

richtig ist.

Wir betrachten ein beliebiges Funktionssystem $x=x(\tau)$ $(0\leqslant\tau\leqslant\delta)$, das die Bedingungen (5), (6) und (7) erfüllt. Um (8) zu beweisen, zeige ich, daß für eine beliebige Zahlenfolge $\{\tau_\nu\}$ mit den Eigenschaften

$$(11) \qquad \tau_\nu\neq 0, \qquad \tau_\nu\in[o,\delta], \qquad \tau_\nu\to 0,$$

der Differenzenquotient der zusammengesetzten Funktion $f[x(\tau)]$ im Punkte $\tau=0$ gegen die rechte Seite der Gleichung (8) für $\nu\to\infty$ konvergiert.

Setzt man

$$x_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} x(\tau_\nu),$$

so genügt die Punktfolge (11) infolge von (6), (5) und (11) den Bedingungen

$$(12) \qquad x_\nu\in U(R_0,\delta), \qquad x_\nu\to p_0.$$

Bezeichnet man mit

$$(13) \qquad p_\nu=R_\nu\cdot I, \qquad p''_\nu=R_\nu\cdot H_{n-1}$$

diejenigen Punkte, in welchen der Halbstrahl

$$(14) \qquad R_\nu\left(o,\frac{\overline{ox_\nu}}{|ox_\nu|}\right)$$

die Indicatrix I und die Hyperebene H_{n-1} trifft[16]), so ergibt sich

$$(15) \qquad p''_\nu=\vartheta_\nu x_\nu, \qquad \text{wo} \quad \vartheta_\nu>0.$$

Setzt man (15) in (9) ein, so erhält man

$$(16) \qquad \vartheta_\nu=\frac{a\cdot p_0}{a\cdot x_\nu}.$$

[16]) Solche Punkte (13) sind infolge von (12), Fußnote [15]) und (10) vorhanden.

Aus (16) und (13) folgt weiter

$$(17) \qquad \vartheta_\nu\to 1 \quad \text{für} \quad \nu\to\infty$$

und aus (17) und (7)

$$(18) \qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{\vartheta_\nu-1}{\tau_\nu}=-\frac{a\cdot l}{ap_0}.$$

Bezeichnet man noch mit

$$(19) \qquad r_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} \textit{Einheitsvektor von } R_\nu=\frac{x_\nu}{|x_\nu|}=\frac{\overline{ox_\nu}}{|ox_\nu|},$$

so gilt folgende Beziehung:

$$(20) \qquad p_\nu=p''_\nu+r_\nu\varrho_\nu.$$

Daher erhält man (16) wegen

$$(21) \qquad p_\nu=x_\nu\left(\vartheta_\nu+\frac{\varrho_\nu}{|x_\nu|}\right).$$

Aus (21) erhalten wir mit Hilfe der Homogenität von $f(x)$ und der Definition der Indicatrix I folgende Gleichung:

$$f(p_\nu)=1=\left(\vartheta_\nu+\frac{\varrho_\nu}{|x_\nu|}\right)^{\mu}f(x_\nu),$$

aus der

$$\varrho_\nu=\left(\frac{1}{\sqrt[\mu]{f(x_\nu)}}-\vartheta_\nu\right)|x_\nu|.$$

Daraus

$$(22) \qquad \frac{\varrho_\nu}{\tau_\nu}=\frac{-|x_\nu|}{\sqrt[\mu]{f(x_\nu)}}\left(\vartheta_\nu\frac{\sqrt[\mu]{f(x_\nu)}-1}{\tau_\nu}+\frac{\vartheta_\nu-1}{\tau_\nu}\right).$$

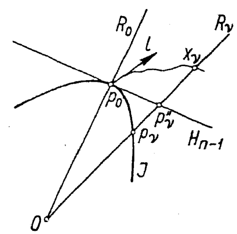

Fig. 2

Setzt man $\Delta_\nu f \overset{\mathrm{d}}{=} f(x_\nu)-1$, so erhält man $|\Delta_\nu f|<1$ für $\nu\geqslant\nu_0$ und

$$(23) \qquad \frac{\sqrt[\mu]{f(x_\nu)}-1}{\tau_\nu}=\frac{\Delta_\nu f}{\tau_\nu}\left[\frac{1}{\mu}+\binom{1/\mu}{2}\Delta_\nu f+\ldots\right].$$

Durch Einsetzen von (23) in die rechte Seite von (22) erhält man schließlich

$$(24) \qquad \frac{\varrho_\nu}{\tau_\nu}=\frac{-|x_\nu|}{\sqrt[\mu]{f(x_\nu)}}\left[\vartheta_\nu\frac{\Delta_\nu f}{\tau_\nu}\left[\frac{1}{\mu}+\binom{1/\mu}{2}\Delta_\nu f+\ldots\right]+\frac{\vartheta_\nu-1}{\tau_\nu}\right] \quad \text{für} \quad \nu\geqslant\nu_0.$$

Jetzt zeige ich, daß

(25) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\varrho_\nu}{\tau_\nu}=0.$$

Zu diesem Zweck betrachte ich die zwei Möglichkeiten.

1° $|p_0 p_\nu''|\neq 0$ für $\nu=1,2,\ldots$

Die Halbstrahlfolge (14) genügt also den Bedingungen des Satzes 9* und infolgedessen gilt (67), Teil 1. Außerdem ist

(26) $$\frac{|p_0 p_\nu''|}{\tau_\nu}=\left|\vartheta_\nu\frac{x_\nu-p_0}{\tau_\nu}+p_0\frac{\vartheta_\nu-1}{\tau_\nu}\right|.$$

Aus (26), (17), (7) und (18) folgt, daß für

(27) $$\frac{|p_0 p_\nu''|}{\tau_\nu}\to\left|l-p_0\frac{a\cdot l}{a\cdot p_0}\right|.$$

Andererseits

(28) $$\left|\frac{\varrho_\nu}{\tau_\nu}\right|=\frac{|p_\nu p_\nu''|}{|p_0 p_\nu''|}\cdot\frac{|p_0 p_\nu''|}{\tau_\nu},$$

da (20) wegen $\varrho_\nu=|p_\nu p_\nu''|$.

Aus (27), (28) und (67), Teil 1, folgt die Beziehung (25).

2° $|p_0 p_\nu''|=0$ für $\nu=1,2,\ldots$

Daraus folgt $p_0=p_\nu''$, also $R_\nu=R_0$ und $p_\nu=p_\nu''$. Somit ist $\varrho_\nu=0$. Daraus folgt aber, daß auch im Falle 2° die Beziehung (25) richtig ist.

Aus dem Satz, über die Zusammensetzung zweier gegen den gleichen Limes konvergierender Folgen, kann man auf die Richtigkeit von (25) im allgemeinen Falle schließen.

Lassen wir auf beiden Seiten von (24), ν ins Unendliche gehen, so erhalten wir wegen (25), (17), (23) und (18)

(29) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\Delta_\nu f}{\tau_\nu}=\mu\frac{a\cdot l}{a\cdot p_0}.$$

Bezeichnet man die Komponenten des Vektors a mit $(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n)$, so kann man (29) in der Form

(30) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\Delta_\nu f}{\tau_\nu}=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\frac{\mu\alpha^i}{a\cdot p_0}$$

darstellen. Die Konstanten

(31) $$\beta_i\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{\mu\alpha^i}{ap_0}\quad\text{für}\quad i=1,2,\ldots,n$$

sind vom Funktionssystem $x=x(\tau)$ $(0\leqslant\tau\leqslant\delta)$ unabhängig. Da die Grenze des Quotienten $\Delta_\nu f/\tau_\nu$ von der Wahl der Folge $\{\tau_\nu\}$ unabhängig ist, soweit sie den Bedingungen (11) genügt, muß die Beziehung (8) gelten, w. z. b. w.

Aus vorstehendem Hilfssatz 1 und Satz 2 folgt Satz 11.

Bemerkung 2. Aus der Relation (30) schließt man, daß unter den Voraussetzungen des Satzes 11 die partiellen Ableitungen von $f(x)$ in jedem Punkte $x_0\in R_0$ existieren. Sie lassen sich durch folgende Formel ausdrücken:

(32) $$\beta_i=\frac{\partial f(x_0)}{\partial\xi^i}=f^i(x_0)=\frac{\mu f(x_0)\alpha^i}{a\cdot x_0}\quad\text{für}\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Zum Beweis der Umkehrung des Satzes 11, bringe ich folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 2[17]. *p_0 sei ein Häufungspunkt der Punktmenge $Z\subset E^n$. Es gibt also eine unendliche Folge von zu Z gehörigen Punkten $\{p_\nu\}$, die p_0 als Häufungspunkt besitzt. Es existiert eine Kurve C mit der Gleichung*

(33) $$x=x(\tau),\qquad \tau\in[0,\delta],$$

und den folgenden Eigenschaften:

1° $x(0)=p_0$,

2° *im abgeschlossenen Intervall $[0,\delta]$ besitzt die Funktion $x(\tau)$ stetige Ableitungen,*

3° *im ganzen Intervall $[0,\delta]$ ist $(dx/d\tau)^2>0$,*

4° *jeder Punkt p_ν (für $\nu=1,2,\ldots$) liegt auf C.*

Jetzt kann ich die Umkehrung des Satzes 11 beweisen.

SATZ 12. *$f(x)$ sei eine Funktion von n Veränderlichen $(n\geqslant 2)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(34) *$f(x)$ ist in einer Umgebung $U(R_0,\delta_0)$ des Halbstrahles R_0 definiert und positiv,*

(35) *$f(x)$ ist positiv-homogen von der Ordnung $\mu\neq 0$,*

(36) *$f(x)$ ist im Punkte $x_0\neq o$ differenzierbar.*

Dann besitzt die durch die Gleichung

$$f(x)=1$$

definierte Indicatrix I, im Punkte $p_0=R_0(o,\overline{ox_0}/|ox_0|)\cdot I$ eine $(n-1)$-dimensionale Tangentialhyperebene H_{n-1}, die den Punkt o nicht enthält.

Beweis. Aus (34) ergibt sich, daß

(37) R_0 ein hinsichtlich I ordentlicher Halbstrahl ist,

und aus (36) folgt weiter, daß

(38) R_0 ein hinsichtlich I regulärer Halbstrahl ist.

[17]) Den Beweis dieses Hilfssatzes findet man in der Arbeit von S. Gołąb [6], S. 34.

Um den Satz selbst zu beweisen konstruiere ich eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene, die nicht durch o geht und an I im Punkte p_0 tangential ist.

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ seien solche Konstanten, deren Existenz aus der Differenzierbarkeit von $f(x)$ im Punkte[18]) definitionsgemäß folgt.

Mit $a(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sei ein Einheitsvektor

(39) $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$$

bezeichnet. Die Komponenten α_i dieses Einheitsvektors will ich so bestimmen, daß folgende Gleichungen erfüllt sind:

(40) $$\beta_i = \frac{\mu}{a \cdot p_0} \alpha_i \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n$$

(vergl. (31)) oder, was auf das Gleiche hinausläuft,

(41) $$\mu\alpha_i = \beta_i (a \cdot p_0) \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Bezeichnet man mit $(\xi_0^1, \xi_0^2, \ldots, \xi_0^n)$ die Koordinaten des Punktes p_0, so kann man (41) in der gleichwertigen Form schreiben

(42) $$\sum_{k=1}^{n} (\beta_i \xi_0^k - \mu \delta_i^k) \alpha_k = 0^{19)} \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n.$$

(42) ist ein lineares und homogenes Gleichungssystem von n Unbekannten. Um dieses System nach α_k auflössen zu können, müssen wir zuerst seine Determinante

(43) $$\Delta = |\beta_i \xi_0^k - \mu \delta_i^k| \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

untersuchen. Wir bemerken, daß man die k-te Spalte $(k=1,2,\ldots,n)$ obiger Determinante durch Addition entsprechender Elemente der zwei folgenden Spalten erhalten kann:

$$\beta_1 \xi_0^k, \ldots, \beta_k \xi_0^k, \ldots, \beta_n \xi_0^k \quad \text{und} \quad 0,\ldots,0,-\mu,0,\ldots,0.$$

Die Determinante (43) kann man daher als Summe von solchen Determinanten darstellen, in welchen nur Spalten der ersten und zweiten Art auftreten. Da aber jede Determinante, in welcher wenigstens zwei Spalten der ersten Art vorkommen, gleich Null ist, so bleiben in der betrachteten Summe nur diejenigen Determinanten übrig, die höchstens eine Spalte der ersten Art besitzen. Daraus folgt, daß der Wert von Δ durch folgende Formel gegeben ist

(44) $$\Delta = (-\mu)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \xi_0^k - \mu \right).$$

[18]) Infolge von Satz 3 kann man aus (36) auf die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in p_0 schließen.

[19]) δ_i^k ist das Symbol von Kronnecker.

Der zweite Faktor rechterhand von (44) ist gleich Null, denn $f(x)$ erfüllt in p_0 die Eulersche Gleichung, und $f(p_0)=1$. Die Determinante (44) kann also nicht von Null verschieden sein. Daraus kann man auf die Existenz einer nicht verschwindenden Lösung von (42) nach α_i schließen. Um zu sehen, wieviel linear unabhängige Lösungen dieses System besitzt, beweise ich, daß der Rang der Matrix von Δ gleich $n-1$ ist. Nehmen wir an, daß das nicht der Fall sei. Dann müßten alle Determinanten der $(n-1)$-ten Ordnung, die aus der Matrix von Δ gebildet werden können, gleich Null sein, insbesondere alle diejenigen Determinanten Δ_k $(k=1,2,\ldots,n)$, die man aus Δ durch Ausstreichen der k-ten Spalte und der k-ten Reihe erhalten kann. Ähnlich wie Δ erhalten wir

(45) $$\Delta_k = [-\mu]^{n-2} (-\beta_k \xi_0^k) \quad \text{für} \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Aus $\Delta_k = 0$, für $k=1,2,\ldots,n$, folgt wegen (45) und $(-\mu) \neq 0$, daß

(46) $$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \xi_0^k = 0.$$

Andererseits aber gilt die Gleichung von Euler

(47) $$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \xi_0^k = \mu.$$

Aus (46) und (47) ergibt sich $\mu = 0$. Dies widerspricht der Voraussetzung (35). Unsere Vermutung, daß der Rang der Matrix kleiner als $(n-1)$ sei, ist also falsch.

Aus den vorstehenden Betrachtungen können wir noch auf die Existenz wenigstens einer von Null verschiedenen Determinante (45) schließen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß z. B. $\Delta_n \neq 0$. Daraus folgt, daß alle Lösungen des Systems (42) durch die Formeln

(48) $$\alpha_i = \sigma \delta_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

bestimmt sind; wobei σ eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Unter δ_i für $i=1,2,\ldots,n-1$ versteht man die Determinante, die man aus Δ_n durch Ersetzen der i-ten Spalte durch die mit (-1) multiplizierten n-ten Spalte derjenigen Matrix erhält, die aus der Matrix von Δ durch Ausstreichen der n-ten Reihe entsteht. Hingegen ist $\delta_n = \Delta_n$.

Mit Hilfe derselben Überlegungen, die uns zur Berechnung des Wertes von Δ führten, erhalten wir folgende Beziehungen:

(49) $$\delta_i = (-\mu)^{n-2} (-\beta_i \xi_0^n) \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Wählt man σ so, daß die durch (46) bestimmten a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ der Bedingung (45) genügen, so erhalten wir die *einzige nichtverschwindende* Lösung des Systems (42), welche (39) erfüllt. Um zu zeigen, daß die so erhaltene Lösung von (42) auch das System (40) befriedigt, müssen wir noch die Ungleichung

$$a\cdot p_0=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\xi_0^i\neq 0. \tag{50}$$

beweisen. Aus (48) und (49) folgt

$$a\cdot p_0=\sigma\cdot\sum_{i=1}^{n}\delta_i\,\xi_0^i=\sigma(-\mu)^{n-1}\xi_0^n\neq 0.$$

H_{n-1} sei eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene, die durch die Gleichung

$$a(x-p_0)=0 \tag{51}$$

bestimmt ist, wobei der Einheitsvektor $a(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ die oben erklärten Komponenten (48) besitzt. (50) wegen enthält H_{n-1} nicht den Punkt o.

Ich behaupte, daß H_{n-1} an die Indicatrix I im Punkte p_0 tangential ist. Den indirekten Beweis führe ich mit Hilfe des Satzes 9*. Zunächst bezeichnet man mit $U(R_0,\delta)$ eine Umgebung des Halbstrahles R_0, derart, daß

$$U(R_0,\delta)\subset U(R_0,\delta_0)$$

und daß

(52) jeder Halbstrahl $R(o;r)$, der zur Umgebung $U(R_0,\delta)$ gehört, einen gemeinsamen Punkt mit H_{n-1} hat.

Für den indirekten Beweis nimmt man an, daß H_{n-1} keine an I in p_0 tangentiale Hyperebene ist. Dann gibt es infolge des Satzes 9* eine den Relationen (66), Teil 1, genügende Halbstrahlfolge $\{R(o,r_\nu)\}$ von der Art, daß (67), Teil 1, nicht erfüllt ist, d. h. aber, daß die Folge

$$\gamma_\nu=\frac{|p_\nu p_\nu''|}{|p_0 p_\nu''|} \tag{53}$$

für $\nu\to\infty$ nicht gegen Null konvergiert, wobei p_ν und p_ν'' durch $p_\nu=R_\nu I$ und $p_\nu''=R_\nu H_{n-1}$ definiert sind[20]). Aus der Folge (53) kann man eine solche Teilfolge $\{\gamma_{\alpha_\nu}\}$ wählen, so daß für ein gewisses $\varepsilon_0>0$ die Ungleichung besteht

$$\gamma_{\alpha_\nu}=\frac{|p_{\alpha_\nu}p_{\alpha_\nu}''|}{|p_0 p_{\alpha_\nu}''|}\geqslant\varepsilon_0>0 \quad \text{für} \quad \nu=1,2,\ldots \tag{54}$$

[20]) Die Existenz solcher Punkte p_ν und p_ν'' folgt unmittelbar aus (66), Teil 1.

Infolge des Hilfssatzes 2 kann man weiter aus $\{p_{\alpha_\nu}''\}$ diejenige Teilfolge $\{p_{\beta_\nu}''\}$ gewinnen, für welche es einen Jordanschen Bogen C von der Gleichung (33) gibt, der den Relationen 2^0 des Hilfssatzes 2 genügt. Bezeichnet man mit τ_ν die Parameterwerte, die den Punkten p_{β_ν}'' entsprechen, so gilt $p_{\beta_\nu}''=x(\tau_\nu)$ für $\nu=1,2,\ldots$ Setzt man noch

$$l(\lambda^1,\ldots,\lambda^h)=\frac{d\big(x(\tau)\big)}{d\tau}\bigg|_{\tau=+0}\neq 0, \tag{55}$$

so können wir stets mit Hilfe einer höchstens linearen Parameteränderung erreichen, daß $l^2=1$. Aus der Differenzierbarkeit von $f(x)$ in p_0 und dem Satze 2 folgt

$$\frac{df[x(\tau)]}{d\tau}\bigg|_{\tau=+0}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{f[x(\tau_\nu)]-[f(p_0)]}{\tau_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\Delta_\nu f}{\tau_\nu}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\lambda^i. \tag{56}$$

Ersetzt man in (56) β_i (für $i=1,2,\ldots,n$) durch die Ausdrücke, die rechterhand in den Gleichungen (40) auftreten, so erhält man

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\Delta_\nu f}{\tau_\nu}=\mu\frac{a\cdot l}{a\cdot p_0}=0, \tag{57}$$

da der Vektor l zu H_{n-1} parallel ist. Außerdem beachten wir, daß die Folge $\{\tau_\nu\}$ die Bedingungen (11) erfüllt. Es gilt also folgende, der Relation (24) ähnliche Gleichheit mit Bezeichnungen, welche denen, die im Beweise des Satzes 11 auftreten, ähnlich sind:

$$\frac{\varrho_\nu}{\tau_\nu}=-\frac{|p_{\beta_\nu}''|}{\sqrt[\mu]{f(p_{\beta_\nu}'')}}\left[\vartheta_\nu\frac{\Delta_\nu f}{\tau_\nu}\left(\frac{1}{\mu}+\binom{1/\mu}{2}\Delta_\nu f+\ldots\right)+\frac{\vartheta_\nu-1}{\tau_\nu}\right] \quad \text{für} \quad \nu\geqslant\nu_0. \tag{58}$$

Daraus auf Grund von (57) und (18) folgt $\varrho_\nu/\tau_\nu\to 0$ für $\nu\to\infty$. Aber $|p_0 p_{\beta_\nu}''|\neq 0$, also erhalten wir

$$\frac{\varrho_\nu}{\tau_\nu}=\frac{|p_{\beta_\nu}p_{\beta_\nu}''|}{|p_0 p_{\beta_\nu}''|}\cdot\frac{|p_0 p_{\beta_\nu}''|}{\tau_\nu}=\gamma_{\beta_\nu}\frac{|p_0 p_{\beta_\nu}''|}{\tau_\nu}\to 0 \quad \text{für} \quad \nu\to\infty. \tag{59}$$

Aus (59) wegen (55) ergibt sich $\gamma_{\beta_\nu}\to 0$ für $\nu\to\infty$.

Das widerspricht der Ungleichung (54), da $\{\gamma_{\beta_\nu}\}$ als Teilfolge von $\{\gamma_{\alpha_\nu}\}$ auch der Bedingung (54) genügen muß.

Unsere Vermutung, daß die durch Gleichung (51) definierte H_{n-1} keine Tangentialhyperebene an I in p_0 darstellt, wird also auf diese Weise widerlegt und der Beweis des Satzes 12 ist beendet.

3. Das Verhalten der positiv-homogenen Funktionen in singulären Punkten

Jetzt betrachte ich die Frage der Differenzierbarkeit der positiv-homogenen Funktion $f(x)$ in denjenigen Punkten, die hinsichtlich einer Indicatrix I singulär der ersten oder zweiten Art sind.

Die in Bezug auf I singulären Punkte der ersten Art.

SATZ 13. *$f(x)$ sei eine Funktion von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$) mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$f(x)$ sei in einem Kegel mit o als Scheitel definiert.*

(2) *$f(x)$ sei positiv-homogen von der Ordnung $\mu<0$.*

(3) *Die Gleichung $f(x)=1$ bestimme eine Indicatrix I mit o als Grundpunkt.*

Ist $R_0(o,r_0)$ ein Halbstrahl, der hinsichtlich I singulär der ersten Art ist, so gilt

$$\limsup_{x\to x_0} f(x)=\infty \tag{4}$$

für jeden Punkt $x_0\in R_0$.

Beweis. Um (4) zu beweisen, genügt es, eine Punktfolge $\{x_\nu\}$ zu konstruieren, welche gegen x_0 konvergiert und für die $f(x_\nu)\to\infty$, für $\nu\to\infty$. Gemäß der Definition des singulären Halbstrahles der ersten Art (Definition 7, Teil 1) gibt es eine für I und R_0 grundsätzliche Halbstrahlfolge $R_\nu(o;r_\nu)$ derart, daß

$$\varrho_\nu=|op_\nu|\to\infty \quad \text{für} \quad \nu\to\infty,$$

wobei $p_\nu=R_\nu\cdot I$ für $\nu=1,2,\ldots$ Daraus folgt wegen (2) und der Definition der Indicatrix (4)

$$f(p_\nu)=\varrho_\nu^\mu f(r_\nu)=1$$

oder, wenn man (2) berücksichtigt,

$$f(r_\nu)=\varrho_\nu^{-\mu}\to\infty \quad \text{für} \quad \nu\to\infty,$$

$x_\nu\overset{\text{df}}{=}\varrho_0\cdot r_\nu$, wobei $\varrho_0\overset{\text{df}}{=}|x_0|$ ist, stellt also die gesuchte Folge $\{x_\nu\}$ dar, w. z. b. w.

Aus dem obigen Satze folgt unmittelbar, daß jede den Voraussetzungen dieses Satzes genügende Funktion $f(x)$, im Punkte x_0, der auf einem hinsichtlich I singulären Halbstrahl der ersten Art liegt, nicht differenzierbar sein kann (wobei die Ordnung der Homogenität $\mu<0$ ist).

HILFSSATZ 3. *Ist eine in der Umgebung $U(x_0,\varepsilon)$ definierte und dort nicht negative Funktion von n Veränderlichen $f(x)=f(\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^n)$ in einem Punkte*

$$x_0(\xi_0^1,\xi_0^2,\ldots,\xi_0^n) \tag{5}$$

differenzierbar, und $f(x_0)=0$, so ist identisch

$$df(x_0)=0. \tag{6}$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes folgt ohne weiteres aus der bekannten Bedingung, die zur Existenz von lokalen Extremen einer Funktion mehrerer Veränderlichen notwendig ist, und aus der Bemerkung, daß unter obigen Voraussetzungen $f(x)$ in x_0 ein lokales Minimum besitzt.

SATZ 14. *$f(x)$ sei eine Funktion von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$) mit folgenden Eingenschaften:*

(7) *$f(x)$ sei in der Umgebung $U(R_0,\delta)$ definiert und nicht negativ.*

(8) *$f(x)$ sei positiv-homogen von der Ordnung $\mu>0$.*

(9) *Die Gleichung $f(x)=1$ besitmme eine Indicatrix I mit o als Grundpunkt.*

(10) *$R(o,r_0)$ sei ein hinsichtlich I singulärer Halbstrahl der ersten Art.*

Dann gilt: Die Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann im Punkte $x_0\in R_0$ differenzierbar, wenn für jede hinsichtlich I und R_0 grundsätzliche Halbstrahlfolge $\{R(o,r_\nu)\}$

$$\frac{1}{\varrho_\nu^\mu\psi_\nu}\to 0 \quad \textit{für} \quad \nu\to\infty,$$

wobei p_ν, ϱ_ν und ψ_ν durch die Formeln

$$p_\nu=R_\nu\cdot I,\qquad \varrho_\nu=|op_\nu|,\qquad \psi_\nu=\sphericalangle(r_0,r_\nu) \tag{11}$$

bestimmt sind.

Hier ist zu beachten, daß aus den Voraussetzungen des obigen Satzes

$$f(x_0)=0 \tag{12}$$

folgt. Denn einerseits folgt aus (7), daß $f(x_0)\geqslant 0$ ist; andererseits aber kann $f(x_0)$ nicht positiv sein, denn dann müßte der Halbstrahl R_0 einen gemeinsamen Punkt mit I haben, was wegen (10) und der Definition (7) unmöglich ist.

Beweis. Die Bedingung ist notwendig. Ich nehme also an, daß die Funktion $f(x)$ den Bedingungen (7), (8), (9) genügt, und daß sie außerdem im Punkte $x_0\in R_0$ eines Halbstrahles mit der Eigenschaft (10) differenzierbar ist. Mit $\{R_\nu(o,r_\nu)\}$ sei eine für I und R_0 grundsätzliche Halbstrahlfolge bezeichnet. Durch den Punkt x_0 führe ich eine $(n-1)$-dimensionale Hyperebene H_{n-1}, die zu R_0 orthogonal ist. Für alle $\nu\geqslant\nu_0$ gibt es je einen einzigen Schnittpunkt von R_ν und H_{n-1}, welcher mit

$$x_\nu\overset{\text{df}}{=}R_\nu\cdot H_{n-1} \tag{13}$$

bezeichnet sei. Dann haben wir infolge von (11)

$$x_\nu=\vartheta_\nu p_\nu, \qquad \text{wo} \qquad \vartheta_\nu>0, \tag{14}$$

und wegen (11)

$$p_\nu=\varrho_\nu r_\nu. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt weiter

(16) $$\vartheta_\nu = \frac{|x_\nu|}{|p_\nu|} = \frac{|x_\nu|}{\varrho_\nu}.$$

Schließlich erhält man der Definition der Indicatrix nach

(17) $$f(x_\nu) = \vartheta_\nu^\mu f(p_\nu) = \vartheta_\nu^\mu = \frac{|x_\nu|^\mu}{\varrho_\nu^\mu}.$$

Da $f(x)$ im Punkte x_0 differenzierbar ist, und für die Punktfolge (13) $x_\nu \to x_0$ gilt, muß die Beziehung

(18) $$\varepsilon(x_0, x_\nu) = \frac{f(x_\nu) - f(x_0) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\xi_\nu^i - \xi_0^i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_\nu^i - \xi_0^i)^2}} \to 0,$$

für $\nu \to \infty$, gelten. Den Ausdruck $\varepsilon(x_0, x_\nu)$ kann man infolge von (12), (17) und des Hilfssatzes 3 in der Form

(19) $$\varepsilon(x_0, x_\nu) = \frac{f(x_\nu)}{|x_0 x_\nu|} = \frac{|x_\nu|^\mu}{\varrho_\nu^\mu |x_0 x_\nu|}$$

schreiben. Weil H_{n-1} zu R_0 orthogonal ist,

(20) $$|x_0 x_\nu| = |x_0| \operatorname{tg} \psi_\nu.$$

Setzt man (20) in (19) ein, so erhält man

(21) $$\varepsilon(x_0, x_\nu) = \frac{1}{\varrho_\nu^\mu \cdot \psi_\nu} \cdot \frac{|x_\nu|^\mu}{|x_0| \operatorname{tg} \psi_\nu / \psi_\nu}.$$

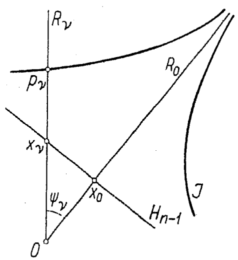

Fig. 3

Wenn $x_\nu \to x_0$, so $\psi_\nu \to 0$ und daraus wegen (21) und (18) folgt, daß

(22) $$\frac{1}{\varrho_\nu^\mu \cdot \psi_\nu} \to 0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty,$$

da der zweite Faktor rechterhand von (21) gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert $|x_0|^{\mu-1}$ konvergiert. Auf diese Weise ist die Notwendigkeit der Bedingung gezeigt.

Die Bedingung ist hinreichend. Ich nehme an, daß eine Funktion $f(x)$ die Bedingungen (7), (8), (9), (10) erfüllt, und daß für jede hinsichtlich I und R_0 grundsätzliche Halbstrahlfolge $\{R_\nu(o, r_\nu)\}$, der Ausdruck $1/\varrho_\nu^\mu \psi_\nu$ gegen Null konvergiert.

Aus (7) ergibt sich, daß $f(x)$ in einer Umgebung $U(x_0, \varepsilon_0)$ definiert ist. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken können wir annehmen, daß

(23) $$0 < \varepsilon \leqslant |x_0|.$$

Um die Differenzierbarkeit von $f(x)$ im Punkte $x_0 \in R_0$ zu beweisen, nehme ich eine beliebige Punktfolge $\{x_\nu\}$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(24) $$x_\nu \neq x_0, \quad x_\nu \in U(x_0, \varepsilon), \quad x_\nu \to x_0,$$

und zeige, daß für diese Punktfolge der Ausdruck

(25) $$\varepsilon(x_0; x_\nu) = \frac{f(x_\nu)}{|x_0 x_\nu|}$$

gegen Null konvergiert.

(23) wegen muß $x_\nu \neq 0$. Deshalb kann man mit $R_\nu(o, r_\nu)$ einen Halbstrahl mit o als Anfangspunkt und dem Einheitsvektor $r_\nu = \overline{ox_\nu}/|ox_\nu|$ bezeichnen. Um zu zeigen daß (25) gegen Null konvergiert, betrachte ich die zwei folgenden Fälle:

1⁰ R_ν hat mit I keinen gemeinsamen Punkt ($\nu = 1, 2, \ldots$), dann gilt

(26) $$f(x_\nu) = 0, \quad \varepsilon(x_0, x_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

2⁰ R_ν hat einen gemeinsamen Punkt mit I (für $\nu = 1, 2, \ldots$), den man mit

(27) $$p_\nu = R_\nu \cdot I$$

bezeichnen kann. Aber dann stellt $R_\nu(o, r_\nu)$ eine für I und R_0 grundsätzliche Halbstrahlfolge dar, und deshalb muß $1/\varrho_\nu^\mu \psi_\nu$ bestimmt sein. Mit Hilfe ähnlicher Bezeichnungen, wie in (14), (15), (16) und (17), erhalten wir

(28) $$\varepsilon(x_0, x_\nu) = \frac{|x_\nu|^\mu}{\varrho_\nu^\mu \cdot |x_0 x_\nu|}.$$

Versteht man unter x_ν' die senkrechte Projektion von x_ν auf R_0, so gilt die Ungleichung

(29) $$\varepsilon(x_0, x_\nu) \leqslant \frac{|x_\nu|^\mu}{\varrho_\nu^\mu \cdot |x_0 x_\nu'|} = \frac{1}{\varrho_\nu^\mu \psi_\nu} \cdot \frac{|x_\nu|^\mu}{|x_\nu'| \cdot \operatorname{tg} \psi_\nu / \psi_\nu}.$$

Aus (29) folgt, daß $\varepsilon(x_0, x_\nu) \to 0$, für $\nu \to \infty$, weil nach der Voraussetzung $1/\varrho_\nu^\mu \psi_\nu$ gegen Null und $|x_\nu|^\mu \psi_\nu / |x_\nu'| \operatorname{tg} \psi_\nu$ gegen einen endlichen Grenzwert $|x_0|^{\mu-1}$ konvergiert.

Aus 1⁰ und 2⁰ ergibt sich, daß der Ausdruck (25) auch im allgemeinen Falle gegen Null strebt. Das bedeutet aber, daß $f(x)$ in x_0 differenzierbar ist; denn (18) ist erfüllt, wenn man $\beta_i = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ setzt und die Beziehung (12) berücksichtigt. Der Beweis unseres Satzes ist beendet.

Die in Bezug auf I singulären Punkte der zweiten Art. Für diejenigen Punkte, welche hinsichtlich der Indicatrix I, singulär von der zweiten Art sind, gelten folgende, den oben bewiesenen ähnliche, Sätze; nämlich:

SATZ 13*. *Es sei eine Funktion $f(x)$ von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$) mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

1^0 *$f(x)$ ist in der Umgebung $U(R_0,\delta)$ definiert und dort nicht negativ.*

2^0 *$f(x)$ ist positiv-homogen von der Ordnung $\mu<0$.*

3^0 *Die Gleichung $f(x)=1$ stellt eine Indicatrix I mit o als Grundpunkt dar, in Bezug auf welche $R(o,r_0)$ ein singulärer Halbstrahl zweiter Art ist.*

Dann gilt folgende Aussage: $f(x)$ ist im Punkte $x_0\epsilon R_0$ dann und nur dann differenzierbar, wenn für jede hinsichtlich I und R_0 grundsätzliche Halbstrahlfolge $R_\nu(o,r_\nu)$, der Ausdruck für $1/\varrho_\nu^\mu\cdot\psi_\nu$ für $\nu\to\infty$ gegen Null konvergiert mit denselben Bezeichnungen, die im Satz 14 auftreten (11).

SATZ 14*. *Es sei eine Funktion $f(x)$ von n Veränderlichen ($n\geqslant 2$) mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

1^0 *$f(x)$ ist in einem Kegel mit o als Scheitel definiert.*

2^0 *$f(x)$ ist positiv-homogen von der Ordnung $\mu>0$.*

3^0 *Die Gleichung $f(x)=1$ bestimmt eine Indicatrix I mit o als Grundpunkt, in Bezug auf welche $R_0(o,r_0)$ ein singulärer Halbstrahl zweiter Art ist. Dann gilt*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

wobei x_0 ein beliebiger Punkt des Halbstrahls R_0 bedeutet.

Aus dem Satze 14* folgt insbesondere, daß unter den Voraussetzungen des Satzes 14* $f(x)$ im Punkte x_0 nicht differenzierbar sein kann.

Die Beweise oben genannter Sätze 13* und 14* sind jenen der Sätze 13 und 14 analog.

Zitate

[1] P. Aleksandroff und H. Hopf, *Topologie*, Bd. I, Berlin 1935.

[2] K. Borsuk, *Geometria analityczna w n-wymiarach*, Warszawa 1950.

[3] C. Carathéodory, *Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung*, Dissertation Göttingen 1904.

[4] O. Haupt und G. Aumann, *Differential u. Integralrechnung*, Bd. II, Berlin 1938.

[5] M. Fréchet, *Sur la notion différentielle totale*, Nouvelles Annales 1912.

[6] S. Gołąb, *Sur une condition nécéssaire et suffisante pour l'existence d'une différentielle totale*, Ann. de la Soc. Polon. de Math. 26 (1937).

Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires

par Z. SZMYDT (Kraków)

Envisageons le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{0.1}$$

et le système

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+f_i(t,y_1,\dots,y_n) \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{0.2}$$

qui en particulier, pour

$$f_i(t,y_1,\dots,y_n)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(t)y_j \qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{0.3}$$

passe en un système linéaire de la forme

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}\big(a_{ij}+\varphi_{ij}(t)\big)y_j \qquad (i=1,2,\dots,n). \tag{0.4}$$

Soient y^* une intégrale quelconque du système (0.1) et y une intégrale quelconque du système (0.2). On considère les intégrales y et y^* comme asymptotiquement associées lorsque la relation[1])

$$y=y^*+o(\|y^*\|), \tag{0.5}$$

subsiste.

Le problème suivant s'impose:

PROBLÈME P. *Correspond-il à chaque intégrale non banale*[2]) *y^* du système* (0.1) *au moins une intégrale y du système* (0.2) *asymptotiquement associée avec y^* de la façon* (0.5)?

[1]) $\|y\|$ désigne la norme du vecteur $y(y_1,\dots,y_n)$. On a $\|y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$; $\varphi(t)=o(\psi(t))$ signifie que la fonction $\varphi(t)/\psi(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

[2]) L'intégrale y^* est dite *non banale* lorsque $\|y\|^*\neq 0$.