Die in Bezug auf I singulären Punkte der zweiten Art. Für diejenigen Punkte, welche hinsichtlich der Indicatrix I, singulär von der zweiten Art sind, gelten folgende, den oben bewiesenen ähnliche, Sätze; nämlich:

SATZ 13*. *Es sei eine Funktion $f(x)$ von n Veränderlichen ($n \geqslant 2$) mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

1^0 *$f(x)$ ist in der Umgebung $U(R_0, \delta)$ definiert und dort nicht negativ.*

2^0 *$f(x)$ ist positiv-homogen von der Ordnung $\mu < 0$.*

3^0 *Die Gleichung $f(x)=1$ stellt eine Indicatrix I mit o als Grundpunkt dar, in Bezug auf welche $R(o, r_0)$ ein singulärer Halbstrahl zweiter Art ist.*

Dann gilt folgende Aussage: $f(x)$ ist im Punkte $x_0 \epsilon R_0$ dann und nur dann differenzierbar, wenn für jede hinsichtlich I und R_0 grundsätzliche Halbstrahlfolge $R_\nu(o, r_\nu)$, der Ausdruck für $1/\varrho_\nu^\mu \cdot \psi_\nu$ für $\nu \to \infty$ gegen Null konvergiert mit denselben Bezeichnungen, die im Satz 14 auftreten (11).

SATZ 14*. *Es sei eine Funktion $f(x)$ von n Veränderlichen ($n \geqslant 2$) mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

1^0 *$f(x)$ ist in einem Kegel mit o als Scheitel definiert.*

2^0 *$f(x)$ ist positiv-homogen von der Ordnung $\mu > 0$.*

3^0 *Die Gleichung $f(x)=1$ bestimmt eine Indicatrix I mit o als Grundpunkt, in Bezug auf welche $R_0(o, r_0)$ ein singulärer Halbstrahl zweiter Art ist. Dann gilt*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

wobei x_0 ein beliebiger Punkt des Halbstrahls R_0 bedeutet.

Aus dem Satze 14* folgt insbesondere, daß unter den Voraussetzungen des Satzes 14* $f(x)$ im Punkte x_0 nicht differenzierbar sein kann.

Die Beweise oben genannter Sätze 13* und 14* sind jenen der Sätze 13 und 14 analog.

Zitate

[1] P. Aleksandroff und H. Hopf, *Topologie*, Bd. I, Berlin 1935.

[2] K. Borsuk, *Geometria analityczna w n-wymiarach*, Warszawa 1950.

[3] C. Carathéodory, *Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung*, Dissertation Göttingen 1904.

[4] O. Haupt und G. Aumann, *Differential u. Integralrechnung*, Bd. II, Berlin 1938.

[5] M. Fréchet, *Sur la notion différentielle totale*, Nouvelles Annales 1912.

[6] S. Gołąb, *Sur une condition nécéssaire et suffisante pour l'existence d'une différentielle totale*, Ann. de la Soc. Polon. de Math. 26 (1937).

Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires

par Z. SZMYDT (Kraków)

Envisageons le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{0.1}$$

et le système

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{0.2}$$

qui en particulier, pour

$$f_i(t, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t) y_j \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{0.3}$$

passe en un système linéaire de la forme

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} \big(a_{ij} + \varphi_{ij}(t)\big) y_j \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{0.4}$$

Soient y^* une intégrale quelconque du système (0.1) et y une intégrale quelconque du système (0.2). On considère les intégrales y et y^* comme asymptotiquement associées lorsque la relation[1])

$$y = y^* + o(\|y^*\|), \tag{0.5}$$

subsiste.

Le problème suivant s'impose:

PROBLÈME P. *Correspond-il à chaque intégrale non banale*[2]) *y^* du système* (0.1) *au moins une intégrale y du système* (0.2) *asymptotiquement associée avec y^* de la façon* (0.5)?

[1]) $\|y\|$ désigne la norme du vecteur $y(y_1, \ldots, y_n)$. On a $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$; $\varphi(t) = o(\psi(t))$ signifie que la fonction $\varphi(t)/\psi(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

[2]) L'intégrale y^* est dite *non banale* lorsque $\|y\|^* \neq 0$.

Désignons par $\mu+1$ le maximum de tous les exposants des diviseurs élémentaires de la matrice $(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})$ et soit $h(t)$ une fonction positive, continue pour $t\geqslant t_0$ et telle que l'inégalité

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t)t^{\mu}\,dt<\infty \tag{0.6}$$

subsiste.

Dans les hypothèses (0.3), (0.6) et l'hypothèse $|\varphi_{ij}(t)|\leqslant h(t)$, S. Faedo et E. Levi ont démontré[3]) l'existence d'un certain système de n intégrales linéairément indépendantes de (0.1) ayant la propriété qu'à chaque intégrale y^* de ce système appartient au moins une intégrale y de (0.4) asymptotiquement associée avec y^*.

On pourrait assez facilement démontrer, que la méthode des approximations successives, employée par Levi [2] pour la démonstration de ce théorème s'applique sans des modifications essentielles au système (0.2) dans les hypothèses:

$$\begin{gathered} f_i(t,0,\ldots,0)=0,\\ |f_i(t,y_1,\ldots,y_n)-f_i(t,\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_n)|\leqslant h(t)\sum_{j=1}^{n}|y_j-\hat{y}_j| \quad (i=1,2,\ldots,n), \end{gathered} \tag{0.7}$$

où la fonction $h(t)$ remplit la condition (0.6).

Par les considérations tout à fait élémentaires il est facile de déduire du théorème de Faedo-Levi une réponse affirmative au problème P dans le cas, où le système (0.2) est linéaire. Dans le cas non linéaire les considérations de cette sorte ne conduisent pas au but.

Dans le présent travail (cf. § 4, théorème 1 et corollaire 1) je résous positivement le problème P, qui concerne des équations non linéaires (0.2) dans l'hypothèse de l'unicité des intégrales de ce système et dans l'hypothèse

$$|f_i(t,y_1,\ldots,y_n)|\leqslant h(t)\sum_{j=1}^{n}|y_j| \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{0.8}$$

essentiellement plus générale que (0.7). Cette généralisation réussit grâce à la méthode topologique de T. Ważewski[4]), qui permet en plus d'obtenir des renseignements plus précis sur le nombre des paramètres essentiels desquels dépend la famille des intégrales y du système (0.2), asymptotiquement associées de la façon (0.5) avec une intégrale non banale y^* du système (0.1), et d'évaluer la vitesse avec laquelle la fonction $(y-y^*)/\|y^*\|$ tend vers zéro.

[3]) Cf. [2], (8) 9 (1950), p. 29. L'hypothèse (0.6) a été introduite par Levi au lieu de l'hypothèse analogue, mais plus restrictive de Faedo (cf. [1]).

[4]) Cf. [3], [4].

Il est intéressant de remarquer que l'inégalité (0.6) est, en un certain sens, une condition nécessaire pour que le problème P admette une réponse affirmative. Cette remarque résulte d'un exemple dû à W. A. Jakubowicz[5]).

Dans le présent travail, outre la résolution du problème P (cf. théorème 1 et corollaire 1), je démontre le théorème 2 (cf. § 4) qui est une modification du théorème 1, et le théorème 3 (cf. § 5) qui concerne la comparaison de l'allure asymptotique des intégrales de deux systèmes d'équations différentielles non linéaires dont les seconds membres dépendent de la variable t.

Le théorème 3 englobe comme cas particulier le théorème de Levinson[6]) qui se rapporte à la comparaison de l'allure asymptotique des intégrales du système

$$y_i'=\lambda_i(t)y_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et du système

$$y_i'=\lambda_i(t)y_i+\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(t)y_j \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Dans le § 3 je démontre un lemme de caractère topologique. La méthode topologique de T. Ważewski ayant été exposée et appliquée plusieurs fois ([3], [8], [9]), je vais me référer dans la suite aux définitions et aux théorèmes qui y sont cités.

§ 1. Lemme 1. *Supposons que les fonctions $\sigma(t)$, $\delta(t)$ soient des fonctions réelles, continues*

$$\delta(t)>0 \quad \textit{pour} \quad t\geqslant t_0, \qquad \int_{t_0}^{\infty}\delta(t)\,dt<\infty,$$

et qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\int_{A}^{B}\sigma(t)\,dt>-C \quad \textit{pour tout} \quad B>A\geqslant t_0.$$

L'équation différentielle

$$zz'-\sigma(t)z^2+\delta(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{dz^2}{dt}-\sigma(t)z^2+\delta(t)=0$$

possède alors une intégrale $z=\varphi(t)$ ayant la propriété:

$$\varphi(t)>0, \qquad \lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0.$$

On a

$$z=\varphi(t)=\Big[2\exp\Big(2\int_{t_0}^{t}\sigma(s)\,ds\Big)\int_{t}^{\infty}\delta(\tau)\exp\Big(-2\int_{t_0}^{\tau}\sigma(s)\,ds\Big)\,d\tau\Big]^{1/2}.$$

Une démonstration très simple de ce lemme peut être omise.

[5]) Cf. [5], p. 365, et [6], p. 234-235.

[6]) Cf. [7], théorème 1.

Lemme 2. *Supposons, que les fonctions réelles $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, soient continues*

$$\alpha(t)>0,\qquad \beta(t)>0\qquad \textit{pour}\quad t\geqslant t_0,$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\alpha(t)\,dt<\infty,\qquad \lim_{t\to\infty}\beta(t)=0,\qquad \lim_{B\to\infty}\int_{t_0}^{B}\gamma(t)\,dt=-\infty, \tag{1.1}$$

et qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\int_{A}^{B}\gamma(t)\,dt<C\qquad \textit{pour}\quad B>A\geqslant t_0. \tag{1.2}$$

Soit D une constante réelle telle que

$$\gamma(t)D\geqslant 0.$$

Dans ces hypothèses l'équation différentielle

$$z'-\gamma(t)z-[\alpha(t)+D\beta(t)\gamma(t)]=0 \tag{1.3}$$

possède une solution $z=\psi(t)$ ayant la propriété

$$\psi(t)>0\qquad \textit{pour}\quad t>t_0,\qquad \lim_{t\to\infty}\psi(t)=0. \tag{1.4}$$

On a

$$z=\psi(t)=\exp\Big(\int_{t_0}^{t}\gamma(s)\,ds\Big)\int_{t_0}^{t}[\alpha(\tau)+D\beta(\tau)\gamma(\tau)]\exp\Big(-\int_{t_0}^{\tau}\gamma(s)\,ds\Big)\,d\tau. \tag{1.5}$$

Démonstration. Il est évident, que (1.5) est une intégrale de l'équation (1.3), positive pour $t>t_0$.

Désignons par $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ les fonctions

$$\psi_1(t)=\exp\Big(\int_{t_0}^{t}\gamma(s)\,ds\Big)\int_{t_0}^{t}\alpha(\tau)\exp\Big(-\int_{t_0}^{\tau}\gamma(s)\,ds\Big)\,d\tau,$$

$$\psi_2(t)=\exp\Big(\int_{t_0}^{t}\gamma(s)\,ds\Big)\int_{t_0}^{t}D\beta(\tau)\gamma(\tau)\,\exp\Big(-\int_{t_0}^{\tau}\gamma(s)\,ds\Big)\,d\tau.$$

Pour la démonstration de la seconde des relations (1.4) il suffit de démontrer, que

$$\lim_{t\to\infty}\psi_1(t)=0,\qquad \lim_{t\to\infty}\psi_2(t)=0. \tag{1.6}$$

Appliquons la règle de l'Hospital au quotient

$$\psi_2(t)=\frac{D\int_{t_0}^{t}\beta(\tau)\gamma(\tau)\exp\Big(-\int_{t_0}^{\tau}\gamma(s)\,ds\Big)\,d\tau}{\exp\Big(-\int_{t_0}^{t}\gamma(s)\,ds\Big)}$$

dont le dénominateur tend vers l'infini lorsque $t\to\infty$ (cf. (1.1)).

On obtient pour le quotient des dérivées la relation

$$\frac{D\beta(t)\gamma(t)\exp\Big(-\int_{t_0}^{t}\gamma(s)\,ds\Big)}{-\gamma(t)\exp\Big(-\int_{t_0}^{t}\gamma(s)\,ds\Big)}=-D\beta(t)\underset{t\to\infty}{\to}0$$

(cf. (1.1)), donc $\lim_{t\to\infty}\psi_2(t)=0$.

Je vais démontrer la première des relations (1.6) moyennant un raisonnement de N. Levinson[7]). On a en vertu de (1.2),

$$\psi_1(t)=\int_{t_0}^{t}\alpha(\tau)\exp\Big(\int_{\tau}^{t}\gamma(s)\,ds\Big)\,d\tau\leqslant\int_{t_0}^{\omega(t)}\alpha(\tau)\exp\Big(\int_{\tau}^{t}\gamma(s)\,ds\Big)\,d\tau+e^{c}\int_{\omega(t)}^{t}\alpha(\tau)\,d\tau.$$

Il est donc évident que notre lemme sera démontré, si l'on trouve une fonction $\omega(t)$ satisfaisant aux deux conditions suivantes:

$$\omega(t)\underset{t\to\infty}{\to}\infty,\qquad \int_{\tau}^{t}\gamma(s)\,ds\to-\infty\qquad \text{lorsque}\quad t_0\leqslant\tau\leqslant\omega(t)\leqslant t,\quad t\to\infty.$$

En nous bornant aux valeurs de t suffisamment grandes pour que l'inégalité (cf. (1.1))

$$F(t)=-\int_{t_0}^{t}\gamma(s)\,ds>0$$

subsiste, il suffit de choisir $\omega(t)$ de sorte que

$$F[\omega(t)]=\frac{1}{2}F(t),\qquad F(\tau)\leqslant\frac{1}{2}F(t)\qquad \text{lorsque}\quad t_0\leqslant\tau\leqslant\omega(t).$$

Lemme 3. *Soit $h(u)$ une fonction positive et k un nombre naturel, $k\geqslant 2$. Dans ces hypothèses l'inégalité*

$$\int_{t}^{\infty}\Big\{\int_{u_k}^{\infty}\dots\Big(\int_{u_2}^{\infty}h(u_1)\,du_1\Big)\dots\Big\}\,du_k<\infty \tag{1.7}$$

est équivalente à l'inégalité

$$\int_{t}^{\infty}h(u_1)u_1^{k-1}du_1<\infty. \tag{1.8}$$

La démonstration de ce lemme étant facile, mais assez longue, j'en donnerai une esquisse. En profitant de la formule d'intégration par parties on démontre par l'induction qu'il existe des constantes A_{ij} telles que

$$\int_{u_i}^{z}du_{i-1}\int_{u_{i-1}}^{z}du_{i-2}\dots\int_{u_2}^{z}du_1\,h(u_1)=\sum_{j=0}^{i-2}A_{ij}u_i^j\int_{u_i}^{z}u^{i-j-2}h(u)\,du. \tag{1.9}$$

[7]) [7], p. 121, démonstration du théorème 1.

L'équivalence des relations (1.7) et (1.8) résulte facilement de la relation (1.9).

§ 2. Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{2.1}$$

et supposons que

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ldots,(\lambda-\lambda_w)^{p_w}$$

constitue la suite complète des diviseurs élémentaires de la matrice $(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})$ et que $\mathrm{Re}(\lambda_i)\geqslant\mathrm{Re}(\lambda_{i+1})$ $(i=1,2,\ldots,w-1)$. Choisissons un groupe quelconque $\lambda_q,\ldots,\lambda_{q+r-1}$ de racines caractéristiques ayant la même partie réelle. On a

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}(\lambda_1)\geqslant\ldots\geqslant\mathrm{Re}(\lambda_{q-1})>\mathrm{Re}(\lambda_q)=\ldots\\ \ldots=\mathrm{Re}(\lambda_{q+r-1})>\mathrm{Re}(\lambda_{q+r})\geqslant\ldots\geqslant\mathrm{Re}(\lambda_w)\end{gathered} \tag{2.2}$$

ou bien un des cas extrêmes $q=1$, $q+r-1=w$ subsiste.

Choisissons $\varrho_i>0$ de sorte que

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(\lambda_i-\lambda_q)-\varrho_i>0 &&(i=1,2,\ldots,q-1),\\ &\mathrm{Re}(\lambda_q-\lambda_i)-\varrho_i>0 &&(i=q+r,\ldots,w),\\ &\varrho_i=1 &&(i=q,\ldots,q+r-1),\end{aligned} \tag{2.3}$$

ce qui est possible en vertu des hypothèses (2.2).

On sait qu'il existe une matrice constante non singulière U telle que la transformation

$$y=Ux \tag{2.4}$$

transforme le système (2.1) en le système

$$\begin{aligned}&\frac{dx_{i1}}{dt}=\lambda_i x_{i1}+\varrho_i x_{i2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{dx_{ip_i-1}}{dt}=\lambda_i x_{ip_i-1}+\varrho_i x_{ip_i},\\ &\frac{dx_{ip_i}}{dt}=\lambda_i x_{ip_i}.\end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots,w), \tag{2.5}$$

§ 3. Désignons par t une variable réelle, par

$$X_a=(x_{a_1},\ldots,x_{ap_a}) \qquad (a=1,2,\ldots,w;\ x_{a\beta}\ \text{complexes})$$

et par

$$X=(X_1,\ldots,X_w)=(x_{11},\ldots,x_{1p_1},\ldots,x_{w1},\ldots,x_{wp_w}).$$

Soit $0\leqslant s_i<p_i$ (s_i, p_i nombres entiers). Supposons que les fonctions

$$\begin{matrix}F_{i'}(t) & (i'=q+r,\ldots,w), & F_{ij}(t) & (i=q,\ldots,q+r-1,\ j=1,2,\ldots,s_i),\\ G_{i''}(t) & (i''=1,2,\ldots,q-1), & G_{ij'}(t) & (i=q,\ldots,q+r-1,\ j'=s_i+1,\ldots,p_i)\end{matrix} \tag{3.1}$$

soient des fonctions continues, réelles positives, et que les fonctions

$$H_{ij}(t),\ H_{ij'}(t) \quad (i=q,\ldots,q+r-1,\quad j=1,2,\ldots,s_i,\quad j'=s_i+1,\ldots,p_i)$$

soient des fonctions continues, complexes en général. Dans le cas extrême: $q+r-1=w$, $s_i=0$ pour $i=q,\ldots,q+r-1$ les fonctions F n'interviennent point.

Convention 1. *Si, dans les expressions dans lesquelles interviennent les indices i', i'' ou les couples d'indices (i,j), (i,j'), (i',γ), (i'',δ), l'on n'a pas indiqué les valeurs qui doivent parcourir les indices énumérés ci-dessus, on doit comprendre qu'ils admettent respectivement les valeurs*

$$i'=q+r,\ldots,w,\qquad i''=1,2,\ldots,q-1,\qquad \gamma=1,2,\ldots,p_{i'},\qquad \delta=1,2,\ldots,p_{i''}.$$
$$i=q,q+1,\ldots,q+r-1,\qquad j=1,2,\ldots,s_i,\qquad j'=s_i+1,\ldots,p_i.$$

En tenant compte de cette convention introduisons les fonctions

$$\begin{gathered}m(t,X)=T-t,\qquad m^{i'}(t,X)=|X_{i'}|^2-F_{i'}^2,\\ m^{ij}(t,X)=|x_{ij}-H_{ij}|^2-F_{ij}^2,\\ l^{i''}(t,X)=|X_{i''}|^2-G_{i''}^2,\qquad l^{ij'}(t,X)=|x_{ij'}-H_{ij'}|^2-G_{ij'}^2,\end{gathered} \tag{3.2}$$

avec lesquelles nous allons définir l'ensemble ω (dit *polyfacial régulier*) et les ensembles

$$M,\ M^k\ (k=q+r,\ldots,w),\ M^{kh}\ (k=q,q+1,\ldots,q+r-1,\ h=1,2,\ldots,s_k),$$
$$L^{kh}\ (k=q,q+1,\ldots,q+r-1,\ h=s_k+1,\ldots,p_k),\ L^k\ (k=1,2,\ldots,q-1)$$

(dits *faces de ω*) au moyen des inégalités énumérées ci-dessous, où, pour abréger, on a supprimé les arguments des fonctions qui y interviennent.

ω: $m<0$, $m^{i'}<0$, $m^{ij}<0$, $l^{ij'}<0$, $l^{i''}<0$ [8]),
M: $m=0$, $m^{i'}\leqslant 0$, $m^{ij}\leqslant 0$, $l^{ij'}\leqslant 0$, $l^{i''}\leqslant 0$,
M^k: $m\leqslant 0$, $m^k=0$ (k fixe), $m^{i'}\leqslant 0$, $m^{ij}\leqslant 0$, $l^{ij'}\leqslant 0$, $l^{i''}\leqslant 0$,
M^{kh}: $m\leqslant 0$, $m^{i'}\leqslant 0$, $m^{kh}=0$ (k,h fixes), $m^{ij}\leqslant 0$, $l^{ij'}\leqslant 0$, $l^{i'}\leqslant 0$,
L^{kh}: $m\leqslant 0$, $m^{i'}\leqslant 0$, $m^{ij}\leqslant 0$, $l^{kh}=0$ (k,h fixes), $l^{ij'}\leqslant 0$, $l^{i''}\leqslant 0$,
L^k: $m\leqslant 0$, $m^{i'}\leqslant 0$, $m^{ij}\leqslant 0$, $l^{ij'}\leqslant 0$, $l^k=0$ (k fixe), $l^{i''}\leqslant 0$.

---

[8]) Cf. la convention 1.

LEMME 4. *Choisissons une valeur $t=\tau>T$ et un système de valeurs $x_{ij}^{\circ}, x_{i'\gamma}^{\circ}$* (cf. la convention 1) *vérifiant les inégalités*

$$\sum_{\gamma=1}^{p_{i'}} |x_{i'\gamma}^{\circ}|^2 - F_{i'}^2(\tau) < 0, \qquad |x_{ij}^{\circ} - H_{ij}(\tau)|^2 - F_{ij}^2(\tau) < 0. \tag{3.3}$$

Toujours en tenant compte de la convention 1 définissons l'ensemble E par les relations

$$\begin{gathered} t=\tau, \quad x_{ij}=x_{ij}^{\circ}, \quad x_{i'\gamma}=x_{i'\gamma}^{\circ}, \quad |x_{ij'}-H_{ij'}(\tau)|^2 - G_{ij'}^2(\tau) \leqslant 0, \\ \sum_{\delta=1}^{p_{i''}} |x_{i''\delta}|^2 - G_{i''}^2(\tau) \leqslant 0. \end{gathered} \tag{E}$$

Dans le cas extrême: $q+r-1=w$, $s_i=0$ lorsque $q\leqslant i\leqslant q+r-1$ l'ensemble E est défini par les relations

$$t=\tau, \qquad |x_{ij'}-H_{ij'}(\tau)|^2 - G_{ij'}^2(\tau) \leqslant 0, \qquad \sum_{\delta=1}^{p_{i''}} |x_{i''\delta}|^2 - G_{i''}^2(\tau) \leqslant 0.$$

Soit S l'ensemble défini par la relation

$$S = \sum_{i''} L^{i''} + \sum_{i,j'} L^{ij'} - \sum_{i'} M^{i'} - \sum_{i,j} M^{ij} - M.$$

Ceci posé, nous affirmons, que ES est un rétracte[9]) *de S et qu'il n'est pas un rétracte de E.*

Remarque 1. Dans le cas général: $q+r-1<w$, $s_q+\ldots+s_{q+r-1}>0$, en raison du choix arbitraire de $x_{ij}^{\circ}, x_{i'\gamma}^{\circ}$, il existe, pour un τ fixe, une famille d'ensembles E dépendant de p paramètres, où

$$p = p_{q+r} + \ldots + p_w + s_q + \ldots + s_{q+r-1},$$

et telle qu'à deux systèmes différents de ces paramètres correspondent des ensembles E disjoints.

Démonstration. Nous construisons d'abord une transformation $Q=\Phi(P)$ effectuant une rétraction de S en ES. Soit $\hat{P}=(\hat{t}, \hat{x}_{11}, \ldots, \hat{x}_{wp_w})$ un point variable de S. On a pour ce point (cf. la convention 1)

$$\begin{gathered} T-\hat{t}<0, \quad |\hat{X}_{i'}|^2 - F_{i'}^2 < 0, \quad |\hat{x}_{ij} - H_{ij}(\hat{t})|^2 - F_{ij}^2(\hat{t}) < 0, \\ |\hat{X}_{i''}|^2 - G_{i''}^2(\hat{t}) \leqslant 0, \qquad |\hat{x}_{ij'} - H_{ij'}(\hat{t})|^2 - G_{ij'}^2(\hat{t}) \leqslant 0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

où l'égalité intervient au moins une fois.

[9]) [3], p. 280 ou [9], § 2, remarque 1.

En désignant les coordonnées de Q par $(t^*, x_{11}^*, \ldots, x_{wp_w}^*)$ nous définissons la transformation $Q=\Phi(\hat{P})$ par les formules

$$t^*=\tau, \qquad x_{ij}^* = x_{ij}^0, \qquad x_{i'\gamma}^* = x_{i'\gamma}^0,$$

$$x_{ij'}^* = H_{ij'}(\tau) + \frac{G_{ij'}(\tau)}{G_{ij'}(\hat{t})}[\hat{x}_{ij'} - H_{ij'}(\hat{t})], \qquad x_{i''\delta}^* = \frac{G_{i''}(\tau)}{G_{i''}(\hat{t})}\hat{x}_{i''\delta}.$$

Il en résulte que le point $Q\in ES$, car, en raison de (3.4),

$$|x_{ij'}^* - H_{ij'}(t^*)|^2 - G_{ij'}^2(t^*) = \left[\frac{G_{ij'}(\tau)}{G_{ij'}(\hat{t})}\right]^2 |\hat{x}_{ij'} - H_{ij'}(\hat{t})|^2 - G_{ij'}^2(t^*) \leqslant 0,$$

$$\sum_{\delta=1}^{p_{i''}} |x_{i''\delta}^*|^2 - G_{i''}^2(t^*) = \left[\frac{G_{i''}(\tau)}{G_{i''}(\hat{t})}\right]^2 \sum_{\delta=1}^{p_{i''}} |\hat{x}_{i''\delta}|^2 - G_{i''}^2(\tau) \leqslant 0,$$

où l'égalité intervient au moins une fois.

Supposons que $\hat{P}\in ES$. Alors

$$\hat{t}=\tau, \qquad \hat{x}_{ij} = x_{ij}^0, \qquad \hat{x}_{i'\gamma} = x_{i'\gamma}^0,$$

$$|\hat{x}_{ij'} - H_{ij'}(\tau)|^2 - G_{ij'}^2(\tau) \leqslant 0, \qquad \sum_{\delta=1}^{p_{i''}} |\hat{x}_{i''\delta}|^2 - G_{i''}^2(\tau) \leqslant 0$$

où l'égalité intervient au moins une fois.

Il est facile de remarquer que $\Phi(\hat{P})=\hat{P}$, car

$$t^*=\tau=\hat{t}, \qquad x_{ij}^* = x_{ij}^0 = \hat{x}_{ij}, \qquad x_{i'\gamma}^* = x_{i'\gamma}^0 = \hat{x}_{i'\gamma},$$

$$x_{ij'}^* = H_{ij'}(\tau) + \frac{G_{ij'}(\tau)}{G_{ij'}(\hat{t})}[\hat{x}_{ij'} - H_{ij'}(\hat{t})] = \hat{x}_{ij'},$$

$$x_{i''\delta}^* = \frac{G_{i''}(\tau)}{G_{i''}(\hat{t})} x_{i''\delta} = x_{i''\delta}.$$

La transformation $\Phi(P)$ effectue une rétraction de S en ES, car elle est continue sur S et, comme nous venons de le démontrer, $\Phi(\hat{P})\in ES$ lorsque $\hat{P}\in S$ et $\Phi(\hat{P})=\hat{P}$ lorsque $\hat{P}\in ES$. L'ensemble ES est donc un rétracte de S.

Nous allons établir maintenant que ES n'est pas un rétracte de E. Remarquons à cet effet, qu'il existe une homéomorphie effectuant la transformation de l'ensemble E en une sphère fermée. L'ensemble ES, constituant la frontière de E, est transformé par cette homéomorphie en la frontière de cette sphère. ES n'est donc pas un rétracte de E, car, comme on le sait bien, la frontière de la sphère n'est pas un rétracte de la sphère.

§ 4. Définition 1. *La fonction vectorielle $f(t)=(f_1(t),\ldots,f_n(t))$ sera dite être de la croissance $V(a,k)$ lorsque*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\|f(t)\|}{e^{at}t^k}$$

(a — réel, k — nombre entier non négatif) existe, est finie et différente de zéro. Si $\beta>a$, ou $\beta=a$ et $p>k$, nous dirons que $V(\beta,p)$ surpasse la croissance de la fonction $f(t)$ et nous le désignerons brièvement: croissance de $f(t)<V(\beta,p)$.

Considérons le système d'équations différentielles

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4.1}$$

et supposons que

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ldots,(\lambda-\lambda_w)^{p_w}$$

constitue la suite complète de diviseurs élémentaires de la matrice $(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})$.

On sait, d'après la théorie des équations différentielles linéaires, que chaque intégrale non banale du système (4.1) a une croissance $V(a,k)$ bien déterminée et qu'il existe un indice i, $1\leqslant i\leqslant w$, tel que $a=\mathrm{Re}(\lambda_i)$, $0\leqslant k\leqslant p_i-1$.

THÉORÈME 1. *Considérons le système (4.1) et supposons, en tenant compte des notations introduites ci-dessus, que*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(\lambda_1)\geqslant\ldots\geqslant\mathrm{Re}(\lambda_{q-1})>\mathrm{Re}(\lambda_q)=\ldots\\ &\ldots=\mathrm{Re}(\lambda_{q+r-1})>\mathrm{Re}(\lambda_{q+r})\geqslant\ldots\geqslant\mathrm{Re}(\lambda_w)\end{aligned} \tag{4.2}$$ [10].

Désignons par

$$s=\max\{p_q-1,\ldots,p_{q+r-1}-1\} \tag{4.3}$$

et soit l un nombre entier tel que

$$0\leqslant l\leqslant s. \tag{4.4}$$

Posons

$$s_k=\min\{l,p_k-1\} \qquad (k=q,q+1,\ldots,q+r-1), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}p&=p_{q+r}+\ldots+p_w+s_q+\ldots+s_{q+r-1} &&\textit{lorsque}\quad q+r-1<w,\\ p&=s_q+\ldots+s_{q+r-1} &&\textit{lorsque}\quad q+r-1=w.\end{aligned} \tag{4.6}$$

[10]) Les cas extrêmes $q=1$ ou $q+r-1=w$ peuvent aussi être admis.

Supposons que les fonctions $f_i(t,y_1,\ldots,y_n)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ soient continues et qu'il existe pour $t\geqslant t_0>0$ une fonction $h(t)$ positive, continue et telle que

$$|f_i(t,y_1,\ldots,y_n)|\leqslant h(t)\sum_{j=1}^{n}|y_j| \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{4.7}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}h(t)t^s\,dt<\infty. \tag{4.8}$$

Supposons enfin que par chaque point $(t,y_1,\ldots,y_n)$ passe une intégrale unique du système

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+f_i(t,y_1,\ldots,y_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{4.9}$$

Ceci posé, à chaque intégrale y^* de (4.1) dont la croissance ne surpasse pas $V(\mathrm{Re}(\lambda_q),l)$, il existe, dans le cas $p>0$, une famille F dépendant de p paramètres essentiels au moins d'intégrales y du système (4.9) qui ont la propriété

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y-y^*}{t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}}=0. \tag{4.10}$$

La projection de l'ensemble des points appartenant aux sections des intégrales de la famille F par le plan $t=\tau$ (τ suffisamment grand) sur un certain hyperplan π à p dimensions contient la projection du point $y^*(\tau)$ comme le point intérieur. Dans le cas $p=0$, il existe au moins une intégrale ayant la propriété (4.10). Plus précisement, on a dans le deux cas ($p>0$ et $p=0$)

$$\frac{\|y-y^*\|}{t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q t)}}\leqslant\|U\|\frac{\|x-x^*\|}{t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q t)}}$$

où $\|U\|$ désigne le module[11]) *de la matrice U, introduite dans le § 2, et*

$$\frac{\|x-x^*\|}{t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q t)}}=O(\Phi(t))$$ [12]),

où $\Phi(t)$ est une fonction analytique tendant vers zéro lorsque $t\to\infty$. On l'obtient en utilisant les formules (4.25) dans lesquelles $\varphi_i,\varphi_{ij},\psi_i$ désignent certaines fonctions, introduites dans la démonstration du théorème 1, qui tendent vers zéro lorsque $t\to\infty$.

[11]) On appelle *module de la matrice* $U=(u_{ij})$ l'expression $\sqrt{\sum|u_{ij}|^2}$ que l'on désigne par $\|U\|$.

[12]) $f(t)=O(g(t))$ signifie que la fonction $f(t)/g(t)$ reste bornée lorsque $t\to\infty$.

Démonstration. La transformation $y=Ux$, introduite dans le § 2, transforme le système (4.1) en le système (2.5) et le système (4.9) en le système

$$(4.11)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_{i1}}{dt} &= \lambda_i x_{i1}+\varrho_i x_{i2}+\varkappa_{i1}(t,X),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_{i,p_i-1}}{dt} &= \lambda_i x_{i,p_i-1}+\varrho_i x_{ip_i}+\varkappa_{i,p_i-1}(t,X),\\ \frac{dx_{ip_i}}{dt} &= \lambda_i x_{ip_i}+\varkappa_{ip_i}(t,X), \end{aligned} \qquad (1,2,\ldots,w)$$

où $X=(x_{11},\ldots,x_{1p_1},\ldots,x_{w1},\ldots,x_{wp_w})$ et les fonctions $\varkappa_{ij}$ satisfont aux conditions analogues que les fonctions f_i. Cela veut dire qu'il existe une fonction positive $\chi(t)$ telle que

$$(4.12)\qquad |\varkappa_{ij}(t,X)|\leqslant\chi(t)\sum_{i,j}|x_{ij}|,\qquad \int_{t_0}^{\infty}\chi(t)t^s\,dt<\infty$$
$$(i=1,\ldots,w;\ j=1,\ldots,p_i).$$

Pour la démonstration de notre théorème, il suffit de prouver qu'à chaque intégrale x^* du système (2.5), c'est-à-dire du système

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_{i1}}{dt} &= \lambda_i x_{i1}+\varrho_i x_{i2},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_{i,p_i-1}}{dt} &= \lambda_i x_{i,p_i-1}+\varrho_i x_{ip_i},\\ \frac{dx_{ip_i}}{dt} &= \lambda_i x_{ip_i}, \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots,w)$$

il existe une famille dépendant au moins de p paramètres essentiels d'intégrales x du système (4.11) (dans le cas $p=0$ au moins une intégrale x de (4.11)), telles que

$$(4.14)\qquad \frac{\|x-x^*\|}{t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}}=O\big(\Phi(t)\big),$$

où $\Phi(t)$ est une fonction analytique tendant vers zéro lorsque t tend vers l'infini et que comme l'hyperplan π en question on peut prendre le plan $x_{ij'}=0$ $(i=q,\ldots,q+r-1;\ j'=s_i+1,\ldots,p_i)$, $x_{i''\delta}=0$ $(i''=1,\ldots,q-1;\ \delta=1,\ldots,p_{i''})$, $t=\tau$.

En réalité, remarquons que si l'intégrale y^* du système (4.1) a la croissance $\leqslant V\big(\mathrm{Re}(\lambda_q),l\big)$, l'intégrale $x^*=U^{-1}y^*$ du système (4.13) a aussi la croissance $\leqslant V\big(\mathrm{Re}(\lambda_q),l\big)$. L'évaluation du quotient $\|x-x^*\|/t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}$ donne aussi celle du quotient $\|y-y^*\|/t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}$, car

$$(4.15)\qquad \frac{\|y-y^*\|}{t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}}\leqslant\|U\|\frac{\|x-x^*\|}{t^l e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}},$$

où $\|U\|$ désigne le module de la matrice U.

Soit x^* une intégrale arbitraire du système (4.13) ayant la croissance $\leqslant V\big(\mathrm{Re}(\lambda_q),l\big)$. On a donc forcément

$$(4.16)\qquad \begin{aligned} x^*_{ij}&=0 &&(i=1,2,\ldots,q-1;\ j=1,2,\ldots,p_i),\\ x^*_{ij}&=e^{\lambda_i t}W_{ij}(t) &&(i=q,q+1,\ldots,w;\ j=1,2,\ldots,p_i), \end{aligned}$$

où $W_{ij}(t)$ sont des polynômes dont le degré $\leqslant l$ lorsque $q\leqslant i\leqslant q+r-1$.

En vertu de (4.5) et de la seconde des relations (4.16) on peut choisir les nombres positifs t_1 et A si grands que

$$(4.17)\qquad n+\sum_{i,j}{}'\big(t^{s_i}+|W_{ij}|\big)<At^l\qquad\text{pour}\quad t\geqslant t_1,$$

où la sommation est étendue sur les valeurs des indices $i=q,\ldots,q+r-1$, $j=1,2,\ldots,p_i$.

Nous allons définir maintenant les fonctions φ_i $(i=1,2,\ldots,q-1)$, ψ_i $(i=q+r,\ldots,w)$, φ_{ij} $(i=q,\ldots,q+r-1,\ j=1,2,\ldots,p_i)$.

En posant

$$\sigma_i(t)=\mathrm{Re}(\lambda_i-\lambda_q)-\varrho_i,\qquad \delta(t)=An\chi(t)t^l$$

nous définissons la fonction φ_i $(i=1,2,\ldots,q-1)$ comme la solution de l'équation différentielle

$$zz'-\sigma_i(t)z^2+\delta(t)=0,$$

définie dans le lemme 1, ce qui est possible en vertu des hypothèses (4.4), (4.12) et (2.3). Les mêmes hypothèses nous permettent de définir la fonction ψ_i (pour $i=q+r,q+r+1,\ldots,w$) comme la solution, considérée dans le lemme 2, de l'équation

$$z'-\gamma(t)z-\alpha(t)=0$$

où $\alpha(t)=An\chi(t)t^l$ et $\gamma(t)=\varrho_i-\mathrm{Re}(\lambda_q-\lambda_i)$.

Je vais définir les fonctions φ_{ij} $(i=q,q+1,\ldots,q+r-1,\ j=p_i,p_i-1,\ldots,s_i+1)$ au moyen des relations

$$(4.18)\qquad \begin{aligned}\varphi_{ip_i}&=A\int_t^\infty t^l\chi(t)\,dt,\\ \varphi_{,p_i-\nu}&=A\int_t^\infty t^l\chi(t)\,dt+\int_t^\infty\varphi_{i,p_i-\nu+1}(t)\,dt\quad(\nu=1,2,\ldots,p_i-s_i-1),\end{aligned}$$

qui ont un sens en vertu du lemme 3, des hypothèses (4.12) et du fait que $l+p_i-s_i-1\leqslant s$ $(i=q,q+1,\ldots,q+r-1)$ (cf. (4 3)-(4.5)).

Il est facile de vérifier que les fonctions (4.18) sont positives, tendent vers zéro lorsque $t\to\infty$ et qu'elles vérifient les équations différentielles

$$(4.19)\qquad \varphi'_{ip_i}+At^l\chi(t)=0,\qquad \varphi'_{i,p_i-\nu}+At^l\chi(t)+\varphi_{i,p_i-\nu+1}(t)=0.$$

Si $s_i\geqslant 1$, nous définissons par récurrence les fonctions φ_{ij}, pour les indices $j=s_i,s_i-1,\ldots,1$, comme les solutions considérées dans le lemme 2 de l'équation (1.3) dans laquelle il faut poser, pour $t\geqslant t_0>0$,

$$D=-\frac{1}{s_i+1-j},\qquad \alpha(t)=A\chi(t)t^{j-1+l-s_i},\qquad \beta(t)=\varphi_{i,j+1},\qquad \gamma(t)=\frac{1}{Dt}$$

respectivement.

Ce procédé est admissible, car la fonction φ_{i,s_i+1}, déjà définie, tend vers zéro lorsque $t\to\infty$.

Choisissons un nombre $T\geqslant\max(t_1,t_0)$ (cf. (4.8) et (4.17)) si grand que

$$(4.20)\qquad \max\{|\varphi_i(t)|,|\psi_i(t)|,|\varphi_{ij}(t)|\}<1\quad\text{lorsque}\quad t\geqslant T.$$

En désignant, comme dans le lemme 4, par $X_i=(x_{i1},\ldots,x_{ip_i})$, je définis l'ensemble ω par les inégalités (cf. (4.16)):

$$(4.21)\qquad \begin{aligned}&T-t<0,\\ &|X_i|^2-\varphi_i^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}<0 && (i=1,2,\ldots,q-1),\\ &|x_{ij}-x_{ij}^*|^2-\varphi_{ij}^2t^{2(s_i+1-j)}e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}<0 && (i=q,\ldots,q+r-1,\ j=1,2,\ldots,s_i),\\ &|x_{ij}-x_{ij}^*|^2-\varphi_{ij}^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}<0 && (i=q,\ldots,q+r-1,\ j=s_i+1,\ldots,p_i).\\ &|X_i|^2-\psi_i^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}<0 && (i=q+r,\ldots,w),\end{aligned}$$

On a dans l'ensemble ω en vertu de (4.17) et (4.20)

$$(4.22)\qquad \sum_{i,j}|x_{ij}|<At^le^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}.$$

En posant

$$\begin{aligned}&\varphi_ie^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}=G_i(t) && (i=1,2,\ldots,q-1),\\ &x_{ij}^*=H_{ij},\quad \varphi_{ij}t^{s_i+1-j}e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}=F_{ij}(t) && (i=q,\ldots,q+r-1,\ j=1,2,\ldots,s_i),\\ &x_{ij}^*=H_{ij},\quad \varphi_{ij}e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}=G_{ij}(t) && (i=q,\ldots,q+r-1,\ j=s_i+1,\ldots,p_i),\\ &\psi_ie^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}=F_i(t) && (i=q+r,\ldots,w)\end{aligned}$$

et en définissant les fonctions $m, m^{i'}, m^{ij}, l^{i''}, l^{ij'}$ par les formules (3.2)[13]) on voit que l'ensemble ω est le polyfacial régulier, défini dans le § 3.

Soit

$$X(t)=\big(x_{11}(t),\ldots,x_{1p_1}(t),\ldots,x_{w1}(t),\ldots,x_{wp_w}(t)\big)$$

l'intégrale du système (4.11). Nous désignons par $D_{(4.11)}\mu(t,X)$ la dérivée de la fonction composée $\mu(t,X(t))$ par rapport à t (sous l'hypothèse que cette dérivée existe). On a donc

$$D_{(4.11)}\mu(t,X)=\frac{d}{dt}\mu\big(t,X(t)\big).$$

Nous allons démontrer que

$$(4.23)\qquad \begin{aligned}&\tfrac12D_{(4.11)}m(t,X)<0\quad\text{lorsque}\quad(t,X)\in M,\\ &\tfrac12D_{(4.11)}m^k(t,X)<0\quad\text{lorsque}\ (t,X)\in M^k && (k=q+r,\ldots,w),\\ &\tfrac12D_{(4.11)}m^{kh}(t,X)<0\quad\text{lorsque}\ (t,X)\in M^{kh}\\ &&& (k=q,\ldots,q+r-1,\ h=1,2,\ldots,s_i),\\ &\tfrac12D_{(4.11)}l^{kh}(t,X)>0\quad\text{lorsque}\ (t,X)\in L^{kh}\\ &&& (k=q,\ldots,q+r-1,\ h=s_i+1,s_i+2,\ldots,p_i),\\ &\tfrac12D_{(4.11)}l^k(t,X)>0\quad\text{lorsque}\ (t,X)\in L^k && (k=1,2,\ldots,q-1).\end{aligned}$$

La première de ces inégalités étant évidente, nous passons à la démonstration de la seconde. En vertu de (4.12), (4.22) et de ce que $\chi(t)>0$, on a pour $(t,X)\in M^k$

$$\frac12D_{(4.11)}m^k(t,X)=\frac12D_{(4.11)}\{|X_k|^2-\psi_k^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}\}$$

$$=\sum_{s=1}^{p_k}\mathrm{Re}(\lambda_kx_{ks}\bar x_{ks}+\varkappa_{ks}\bar x_{ks})+\sum_{s=1}^{p_k-1}\mathrm{Re}(\varrho_kx_{k,s+1}\bar x_{ks})-\psi_ke^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}(\psi'_k+\psi_k\mathrm{Re}(\lambda_q))$$

$$<-\psi_ke^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}\{\psi'_k+\psi_k[\mathrm{Re}(\lambda_q-\lambda_k)-\varrho_k]-nA\chi(t)t^l\}=0,$$

[13]) Cf. la convention 1.

l'égalité ayant lieu d'après la définition de la fonction ψ_k. D'une façon analogue on obtient, d'après la définition de la fonction φ_k,

$$\frac{1}{2}D_{(4.11)}l^k(t,X) > -e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}\{\varphi_k\varphi_k'-\varphi_k^2[\mathrm{Re}(\lambda_k-\lambda_q)-\varrho_k]+nA\chi(t)t^l\}=0.$$

En vertu de (4.19)

$$\frac{1}{2}D_{(4.11)}l^{kp_k}(t,X)=\frac{1}{2}D_{(4.11)}\{|x_{kp_k}-x_{kp_k}^*|^2-\varphi_{kp_k}^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}\}$$
$$>-\varphi_{kp_k}e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}\{\varphi_{kp_k}'+A\chi(t)t^l\}=0,$$

et, pour $s_k<h<p_k$, on a (cf. (2.3))

$$\frac{1}{2}D_{(4.11)}l^{kh}(t,X)=\frac{1}{2}D_{(4.11)}\{|x_{kh}-x_{kh}^*|^2-\varphi_{kh}^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}\}$$
$$=\mathrm{Re}\{(\bar{x}_{kh}-\bar{x}_{kh}^*)(\lambda_kx_{kh}+x_{k,h+1}+\varkappa_{kh}-\lambda_kx_{kh}^*-x_{k,h+1}^*)\}-\varphi_{kh}\varphi_{kh}'e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}$$
$$-\varphi_{kh}^2\mathrm{Re}(\lambda_q)e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}>\mathrm{Re}(\lambda_k)\varphi_{kh}^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}-\varphi_{kh}\varphi_{k,h+1}e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}$$
$$-\varphi_{kh}e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}A\chi(t)t^l-\varphi_{kh}\varphi_{kh}'e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}-\varphi_{kh}^2\mathrm{Re}(\lambda_q)e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}$$
$$\geqslant-\varphi_{kh}e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}\{\varphi_{kh}'+\varphi_{k,h+1}+A\chi(t)t^l\}=0.$$

Enfin, grâce à la définition des fonctions φ_{kh} pour $h\leqslant s_k$, on a

$$\frac{1}{2}D_{(4.11)}m^{kh}(t,X)=\frac{1}{2}D_{(4.11)}\{|x_{kh}-x_{kh}^*|^2-\varphi_{kh}^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}t^{2(s_k+1-h)}\}$$
$$<\varphi_{kh}\varphi_{k,h+1}e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}t^{2(s_k+1-h)}\frac{1}{t}+\varphi_{kh}A\chi(t)e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}t^{s_k+1-(h+l)}$$
$$-\varphi_{kh}\varphi_{kh}'e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}t^{2(s_k+1-h)}-\frac{s_k+1-h}{t}\varphi_{kh}^2e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}t^{2(s_k+1-h)}$$
$$\leqslant-\varphi_{kh}e^{2\mathrm{Re}(\lambda_q)t}t^{2(s_k+1-h)}\left\{\varphi_{kh}'+\frac{s_k+1-h}{t}\varphi_{kh}-\left[A\chi(t)t^{l+h-s_k-1}+\frac{\varphi_{k,h+1}}{t}\right]\right\}=0.$$

On constate facilement, en vertu des propriétés des fonctions m, $m^{i'}$, m^{ij}, $l^{ij'}$, $l^{i''}$ et des relations (4.23), que toutes les premisses de l'hypothèse H du théorème de T. Ważewski (cf. [8], § 2) sont satisfaites. Soit W l'ensemble de points P appartenant à la section du tuyau ω par le plan $t=\tau$ tels que la demie intégrale droite issue de P soit située dans ω. En vertu du lemme 4 et du théorème mentionné ci-dessus de T. Ważewski, la projection de l'ensemble W sur le plan $x_{ij'}=0$ ($i=q$, $q+1,\dots,q+r-1$, $j'=s_i+1,\dots,p_i$), $x_{i''\delta}=0$ ($i''=1,\dots,q-1$, $\delta=1,\dots,p_{i''}$), $t=\tau$, constitue un ensemble contenant dans le cas $p>0$ la projection du point $y^*(\tau)$ comme le point intérieur. D'un autre théorème de T. Ważewski[14]) il s'ensuit que le nombre des dimensions de l'ensemble W est au moins égal à p, ce qui veut dire que la famille des intégrales asymptotiquement associées avec l'intégrale y^* dépend au moins de p paramètres essentiels. Dans le cas $p=0$, il existe au moins une intégrale y asymptotiquement associée avec y^*.

Pour chaque intégrale x_{ij} située dans ω, les relations

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_{ij}-x_{ij}^*}{t^le^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}}=0 \tag{4.24}$$

sont des conséquences de (4.16) et (4.21). Plus précisément, on a

(4.25)
$$\frac{|x_{ij}-x_{ij}^*|}{e^{\mathrm{Re}(\lambda)_qt}}<\varphi_i \qquad (i=1,2,\dots,q-1,\ j=1,2,\dots,p_i),$$
$$\frac{|x_{ij}-x_{ij}^*|}{t^{s_i+1-j}e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}}<\varphi_{ij} \qquad (i=q,\dots,q+r-1,\ j=1,2,\dots,s_i),$$
$$\frac{|x_{ij}-x_{ij}^*|}{e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}}<\varphi_{ij} \qquad (i=q,\dots,q+r-1,\ j=s_i+1,\dots,p_i),$$
$$\frac{|x_{ij}-x_{ij}^*|}{e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}}<\psi_i+e^{\mathrm{Re}(\lambda_i-\lambda_q)t}|W_{ij}(t)| \qquad (i=q+r,\dots,w,\ j=1,2,\dots,p_i),$$

ce qui donne l'évaluation de la vitesse avec laquelle les quotients intervenant dans (4.24) tendent vers zéro. Notre théorème se trouve ainsi demontré.

COROLLAIRE 1. *Considérons le système d'équations différentielles*

$$y_i'=\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{4.26}$$

et désignons par $\mu+1$ le maximum de tous les exposants des diviseurs élémentaires de la matrice $(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})$.

Supposons que les fonctions $f_i(t,y_1,\dots,y_n)$ soient continues et qu'il existe, pour tout $t\geqslant t_0>0$, une fonction $h(t)$ positive, continue et telle que

$$|f_i(t,y_1,\dots,y_n)|\leqslant h(t)\sum_{j=1}^n|y_j|, \qquad \int_{t_0}^{\infty}h(t)t^\mu dt<\infty \qquad (i=1,2,\dots,n). \tag{4.27}$$

---

[14]) Cf. [4], théorème 1. Dans ce travail s'est faufilée une erreur. Au lieu de $X=(x_1,\dots,x_p)$, $Y=(y^1,\dots,y_q)$ à la page 3 il faut mettre $X=(x_1,\dots,x_q)$, $Y=(y_1,\dots,y_p)$.

Supposons enfin que par chaque point passe une intégrale unique du système :

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{4.28}$$

Dans ces hypothèses, à chaque intégrale non banale y^* du système (4.26), *il existe au moins une intégrale y du système* (4.28) *telle que*

$$y = y^* + o(\|y^*\|). \tag{4.29}$$

Remarque 2. Le corollaire 1 résulte du théorème 1, car l'hypothèse (4.8) est une conséquence de (4.27). En se rapportant donc au théorème 1 on peut obtenir pour chaque intégrale y^* séparément des renseignements plus précis sur le nombre des paramètres essentiels desquels dépend la famille d'intégrales y remplissant (4.29), de même que sur la vitesse avec laquelle le rapport $\|y-y^*\|/\|y^*\|$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

THÉORÈME 2. *Remplaçons dans le théorème 1 l'hypothèse* (4.8) *par l'hypothèse plus forte*

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t) t^{s+l} dt < \infty \tag{4.30}$$

et laissons sans modification les autres hypothèses. Posons

$\beta = p_{q+r} + \ldots + p_w$ *lorsque* $q+r-1 < w$ *et* $\beta = 0$ *lorsque* $q+r-1 = w$.

À chaque intégrale y^* du système (4.1) *de la croissance* $\leqslant V(\mathrm{Re}(\lambda_q), l)$, *il existe, dans le cas $q+r-1<w$, une famille dépendant de β paramètres essentiels au moins, et dans le cas $q+r-1=w$ au moins une intégrale du système* (4.9) *telle que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y-y^*}{e^{\mathrm{Re}(\lambda_q)t}} = 0.$$

Démonstration. Posons $s_k = 0$ $(k=q, q+1, \ldots, q+r-1)$ au lieu de la définition (4.5) du théorème 1. Nous définissons les fonctions φ_{ij} $(i=q, q+1, \ldots, q+r-1)$ pour toutes les valeurs possibles des indices j (c'est-à-dire pour $j=1,2,\ldots,p_i$) au moyen des formules (4.18), ce qui est possible, car

$$\int_t^{\infty} \left\{ \int_{u_{p_k}}^{\infty} \ldots \left[\int_{u_2}^{\infty} u_1^l \chi(u_1)\, du_1 \right] \ldots \right\} du_{p_k} < \infty \qquad (k=q, q+1, \ldots, q+r-1)$$

en vertu de (4.3), de l'hypothèse (4.30)[15]) et du lemme 3.

En introduisant ces modifications dans la démonstration du théorème 1, on obtient la démonstration du théorème 2.

[15]) La fonction $\chi(t)$ satisfait aux mêmes conditions que la fonction $h(t)$ (cf. le commencement de la démonstration du théorème 1).

§ 5. Posons $X_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip_i})$ $(i=1,\ldots,w)$ et soit $X = (X_1, \ldots, X_w)$. Supposons que pour un certain q $(1 \leqslant q \leqslant w)$, $p_q = 1$ et désignons pour abréger $x_{q1} = x_q$. Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dX_i}{dt} = H_i(t, X) + F_i(t, X) \qquad (i=1,2,\ldots,w), \tag{5.1}$$

dans lequel $H_i(t,X)$, $F_i(t,X)$ $(i=1,2,\ldots,w)$ désignent des vecteurs p_i — dimensionnels, continus dans l'espace Ω des points $P=(t,X)$ et

$$H_q(t,X) = \lambda(t) x_q.$$

Supposons que par chaque point passe une intégrale unique de ce système. Désignons par Γ_i l'ensemble des points dans lesquels $|X_i| = 0$ et soit

$$s_i(P) = \frac{1}{|X_i|^2} \mathrm{Re}(\bar{X}_i H_i) - \mathrm{Re}(\lambda(t)) \quad \text{dans} \quad \Omega - \Gamma_i. \tag{5.2}$$

THÉORÈME 3. *Supposons qu'ils existent des fonctions continues $\sigma_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,q)$ telles que*

$$\sigma_i(t) \leqslant s_i(P) \quad \text{lorsque} \quad P \in \Omega - \Gamma_i \qquad (i=1,2,\ldots,q) \tag{5.3}$$

et que, pour un certain $c>0$,

$$\int_A^B \sigma_i(t)\, dt > -c \quad \text{pour tout} \quad B > A\,^{16)} \qquad (i=1,2,\ldots,q).$$

Supposons en outre qu'ils existent des fonctions continues $\sigma_i(t)$ $(i=q+1, q+2, \ldots, w)$ telles que

$$\sigma_i(t) \geqslant s_i(P) \quad \text{lorsque} \quad P \in \Omega - \Gamma_i,$$

(5.4)

$$\lim_{B\to\infty} \int_A^B \sigma_i(t)\, dt = -\infty \qquad (i=q+1, q+2, \ldots, w)$$

et que l'on ait

$$\int_A^B \sigma_i(t)\, dt < c \quad \text{pour tout} \quad B > A.$$

Admettons encore l'hypothèse

$$|F_i(t,X)| \leqslant h(t)|X|, \qquad \int_{t_0}^{\infty} h(t)\, dt < \infty, \tag{5.5}$$

$h(t)$ continue et positive pour $t \geqslant t_0$, et posons $p = p_{q+1} + \ldots + p_w$ lorsque $q<w$ et $p=0$ lorsque $q=w$.

[16]) Dans le cas $i=q$ notre hypothèse est satisfaite par la fonction $\sigma_q(t) \equiv 0$.

Ceci étant admis, le système (5.1) *possède dans le cas* $p>0$ *une famille dépendant de* p *paramètres essentiels au moins d'intégrales* $X=(x_{ij})$ *ayant la propriété*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_{ij}}{e^{\mathrm{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)\,d\tau)}}=0 \quad \textit{lorsque} \quad i\neq q,$$

$$(5.6)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{x_q-e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)\,d\tau}}{e^{\mathrm{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)\,d\tau)}}=0.$$

Dans le cas $p=0$, *il existe au moins une intégrale*[17]) *ayant cette propriété.*

Démonstration. La méthode topologique employée dans la démonstration du théorème 1 nous conduit, dans le cas considéré ci-dessus, à une démonstration moins compliquée qu'auparavant. C'est pourquoi je vais me borner à l'esquisser.

Je définis les fonctions $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,q)$ en vertu du lemme 1 en y posant

$$\sigma(t)=\sigma_i(t),\qquad \delta(t)=\sqrt{w+3}\,h(t)$$

et les fonctions $\psi_i(t)$ $(i=q+1,q+2,\ldots,w)$ en vertu du lemme 2 en posant

$$D=0,\qquad \gamma(t)=\sigma_i(t),\qquad \alpha(t)=\sqrt{w+3}\,h(t).$$

Soit T un nombre si grand que

$$(5.7)\qquad |\varphi_i(t)|<1,\quad |\psi_i(t)|<1 \quad \text{lorsque} \quad t\geqslant T.$$

Posons

$$m(t,X)=T-t,\qquad m^i(t,X)=|X_i|^2-\psi_i^2 e^{2\,\mathrm{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau)}\qquad (i=q+1,q+2,\ldots,w),$$

$$l^i(t,X)=|X_i|^2-\varphi_i^2 e^{2\,\mathrm{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)\,d\tau)}\qquad (i=1,2,\ldots,q-1),$$

$$l^q(t,x)=\Big|x_q-e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)\,d\tau}\Big|^2-\varphi_q^2 e^{2\,\mathrm{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)\,d\tau)}$$

et définissons les ensembles ω, M, M^j $(j=q+1,\ldots,w)$, L^j $(j=1,2,\ldots,q)$ comme dans le § 3.

On constate d'abord, en vertu de (5.7), que

$$(5.8)\qquad |X|<\sqrt{w+3}\,e^{\mathrm{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)\,d\tau)}\quad \text{dans l'ensemble } \omega.$$

---

[17]) On obtient aussi l'évaluation de la vitesse avec laquelle les quotients intervenant dans (5.6) tendent vers zéro (cf. (5.9)).

Puis par des calculs simples, en utilisant les hypothèses (5.3), (5.4), (5.5) et les relations (5.7) et (5.8), on établit les inégalités

$$\tfrac{1}{2}D_{(5.1)}m(t,X)<0 \quad \text{lorsque} \quad (t,X)\in M,$$

$$\tfrac{1}{2}D_{(5.1)}m^j(t,X)<0 \quad \text{lorsque} \quad (t,X)\in M^j \quad (j=q+1,q+2,\ldots,w),$$

$$\tfrac{1}{2}D_{(5.1)}l^j(t,X)>0 \quad \text{lorsque} \quad (t,X)\in L^j \quad (j=1,2,\ldots,q).$$

En vertu du théorème de T. Ważewski (cf. [4]) il existe dans le cas $p>0$ une famille dépendant de p paramètres essentiels au moins d'intégrales du système (5.1) situées dans ω. Dans le cas $p=0$ il existe au moins une intégrale ayant cette propriété. Ces intégrales vérifient les relations (5.6) en raison de la définition de l'ensemble ω. Plus précisément, on obtient

$$\frac{x_{ij}}{e^{\mathrm{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau)}}=O[\varphi_i(t)]\qquad (1\leqslant i<q,\quad j=1,2,\ldots,p_i),$$

$$(5.9)\qquad \frac{x_q-e^{(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau)}}{e^{\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau}}=O[\varphi_q(t)],$$

$$\frac{x_{ij}}{e^{\mathrm{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau)}}=O[\psi_i(t)]\quad (q+1\leqslant i\leqslant w,\ j=1,2,\ldots,p_i).$$

Exemple. Considérons le système

$$\frac{dx_1}{dt}=[\lambda(t)+g(t,x_1,x_2,x_3)]x_1+F_1(t,x_1,x_2,x_3),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\lambda(t)x_2+F_2(t,x_1,x_2,x_3),$$

$$\frac{dx_3}{dt}=\Big[\lambda(t)-\frac{1}{t}f(t,x_1,x_2,x_3)\Big]x_3+F_3(t,x_1,x_2,x_3),$$

et supposons que les seconds membres sont continus dans l'espace Ω des points $P(t,x_1,x_2,x_3)$ et que par chaque point passe une intégrale unique de ce système. Soit $\mathrm{Re}[g(t,x_1,x_2,x_3)]\geqslant 0$, $\mathrm{Re}[f(t,x_1,x_2,x_3)]\geqslant 1$,

$$|F_i(t,x_1,x_2,x_3)|\leqslant h(t)\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2},$$

où $h(t)$ est une fonction continue et telle que

$$\int_{t_0}^{\infty}h(t)\,dt<\infty.$$

Posons $\sigma_1(t)=\sigma_2(t)=0$, $\sigma_3(t)=-1/t$. On vérifie facilement, que toutes les prémisses du théorème 3 $(p_1=p_2=p_3=1,\ q=2,\ H_1=(\lambda+g)x_1,\ H_3=(\lambda-f/t)x_3)$ sont satisfaites. Il existe donc une famille, dépendant d'un paramètre essentiel au moins, d'intégrales $x=(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ ayant la propriété

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_i}{e^{\operatorname{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau)}}=0\qquad(i=1,3),\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{x_2-e^{\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau}}{e^{\operatorname{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau)}}=0.$$

Voici maintenant un théorème étant une simple conséquence du théorème 3.

THÉORÈME 4. *Supposons que les seconds membres du système d'équations différentielles*

$$\frac{dx_i}{dt}=\lambda_i(t)x_i+f_i(t,X)\qquad(i=1,2,\dots,n)\tag{5.10}$$

soient continus et que par chaque point passe une intégrale unique de ce système. Supposons que les perturbations $f_i(t,X)$ satisfassent aux conditions

$$|f_i(t,X)|<h(t)|X|\qquad(i=1,2,\dots,n),$$

$$\int_{t_0}^{\infty}h(t)\,dt<\infty,\qquad h(t)\ \textit{continue lorsque}\ t\geqslant t_0.$$

Soit q un nombre naturel, $1\leqslant q\leqslant n$. Posons

$$\sigma_i(t)=\operatorname{Re}[\lambda_i(t)-\lambda_q(t)]\qquad(i=1,2,\dots,n).\tag{5.11}$$

Supposons que, pour une certaine constante $c>0$,

$$\int_{A}^{B}\sigma_i(t)\,dt>-c,\qquad \textit{lorsque}\quad B>A,\quad 1\leqslant i\leqslant q\ ^{18})$$

et que $\lim\limits_{B\to\infty}\int_{t_0}^{B}\sigma_i(t)\,dt=-\infty$, $\int_{A}^{B}\sigma_i(t)\,dt<c$ *pour* $B>A$ $(q+1\leqslant i\leqslant n)$.

Dans ces hypothèses le système (5.10) *a une famille dépendant de $p=n-q$ paramètres essentiels au moins d'intégrales ayant la propriété*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_i}{e^{\operatorname{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda_q(\tau)d\tau)}}=0\qquad(i\neq q),\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{x_q-e^{\int_{t_0}^{t}\lambda_q(\tau)d\tau}}{e^{\operatorname{Re}(\int_{t_0}^{t}\lambda_q(\tau)d\tau)}}=0.$$

Dans le cas où $q=n$, il existe au moins une intégrale ayant cette propriété.

[18]) Pour $i=q$ cette condition est satisfaite automatiquement, car on a alors $\sigma_q(t)\equiv 0$ en vertu de la définition (5.11).

Ce théorème résulte immédiatement du théorème 4 et de la remarque qu'en vertu de (5.11), (5.2) et (5.10), l'on a

$$s_i(P)=\sigma_i(t)\qquad(i=1,2,\dots,n).$$

Remarque 3. Le théorème 4 englobe comme cas particulier le théorème 1 de N. Levinson [7], dans lequel les perturbations $f_i(t,X)$ étaient linéaires.

Remarquons que le théorème 3 permet d'obtenir un théorème un peu plus général que le théorème 4. Voici son énoncé.

THÉORÈME 4 bis. *Considérons le système d'équations*

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_{i1}}{dt}=\lambda_i(t)x_{i1}+\varrho_i(t)x_{i2}+f_{i1}(t,X),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dx_{i,p_i-1}}{dt}=\lambda_i(t)x_{i,p_i-1}+\varrho_i(t)x_{ip_i}+f_{i,p_i-1}(t,X)\qquad(i=1,2,\dots,q-1,q+1,\dots,n),\\
&\frac{dx_{ip_i}}{dt}=\lambda_i(t)x_{ip_i}+f_{ip_i}(t,X),\\
&\frac{dx_{q1}}{dt}=\lambda_q(t)x_{q1}+f_{q1}(t,X)
\end{aligned}\tag{5.12}$$

dont les seconds membres sont continus.

Posons

$$\sigma_i(t)=\operatorname{Re}[\lambda_i(t)-\lambda_q(t)]-|\varrho_i(t)|\qquad \textit{lorsque}\quad 1\leqslant i\leqslant q,$$

$$\sigma_i(t)=\operatorname{Re}[\lambda_i(t)-\lambda_q(t)]+|\varrho_i(t)|\qquad \textit{lorsque}\quad q+1\leqslant i\leqslant n,$$

$$p=p_{q+1}+\dots+p_n\quad \textit{lorsque}\quad q<n\quad \textit{et}\quad p=0\quad \textit{lorsque}\quad q=n$$

et laissons sans modification toutes les autres hypothèses du théorème 4.

Ceci étant admis, il existe dans le cas $p>0$ une famille dépendant de p paramètres essentiels au moins d'intégrales du système (5.12) *ayant les propriétés* (5.6). *Dans le cas $p=0$, il existe au moins une intégrale ayant cette propriété.*

La démonstration du théorème 4 bis s'appuie sur le théorème 3 et sur la remarque que

$$s_i(P)=\frac{1}{|X_i|^2}\operatorname{Re}[\bar{x}_{i1}(\lambda_i x_{i1}+\varrho_i x_{i2})+\dots+\bar{x}_{i,p_i-1}(\lambda_i x_{i,p_i-1}+\varrho_i x_{ip_i})+x_{ip_i}\lambda_i x_{ip_i}]-\operatorname{Re}\lambda_q(t)$$

$$\geqslant\operatorname{Re}[\lambda_i(t)-\lambda_q(t)]-|\varrho_i(t)|=\sigma_i(t)\qquad\text{pour}\quad i=1,2,\dots,q$$

et pareillement

$$\varepsilon_i(P)\leqslant\operatorname{Re}[\lambda_i(t)-\lambda_q(t)]+|\varrho_i(t)|=\sigma_i(t)\qquad\text{pour}\quad i=q+1,\dots,n.$$

Publications citées

[1] S. Faedo, *Proprietà asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (4) 26 (1947), p. 207-215.

[2] E. Levi, *Sul comportamento asintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Cl. Sci. Fis. Nat. (8) 8 (1950), p. 465-470, (8) 9 (1950), p. 26-31.

[3] T. Ważewski, *Sur le principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 279-313.

[4] T. Ważewski, *Sur l'évaluation du nombre des paramètres éssentiels dont dépend la famille des intégrales d'un système d'équations différentielles ayant une propriété asymptotique*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe troisième 1 (1953), p. 3-5.

[5] В. А. Якубович, *Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений*, Доклады Академии наук С. С. С. Р. (Новая серия) 63 № 4 (1948), стр. 363-366.

[6] В. А. Якубович, *Об асимптотическом поведении решений системы дифференциальных уравнений*, Математический сборник (Новая серия) 28 (70), № 1 (1951), стр. 217-240.

[7] N. Levinson, *The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations*, Duke Mathematical Journal 15 (1948), p. 111-126.

[8] T. Ważewski, *Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles tangentes aux hyperplans caractéristiques issues du point singulier*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 21 (1948), p. 277-297.

[9] Z. Szmydt, *Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 24, fasc. II (1951).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles au voisinage d'un point asymptotiquement singulier

par Z. Mikołajska (Kraków)

§ 1. Introduction. Soit $\Phi(t)$ une intégrale du système

$$\frac{dz_i}{dt} = f^i(t, z_1, \ldots, z_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1.1}$$

dont les deuxièmes membres sont continus dans l'ensemble de points $(t, z_1, \ldots, z_n)$ pour lesquels

$$t \in (a, b), \qquad (z_1, \ldots, z_n) \in \Theta,$$

où Θ est un ensemble ouvert. Admettons l'unicité pour les intégrales de ce système.

Définition 1. Soit (α, β) le plus grand intervalle dans lequel $\Phi(t)$ existe. Nous disons que *l'intégrale $\Phi(t)$ atteint l'extrémité droite* de l'intervalle (a, b) lorsque $\beta = b$.

Soit Δ un intervalle partiel de (α, β). Nous désignons par

$$\Phi(\Delta) \tag{1.2}$$

l'ensemble des points $z = \Phi(t)$ correspondant aux valeurs $t \in \Delta$.

Les symboles $[\gamma, \delta]$, et (γ, δ) désignant respectivement les intervalles fermés et ouverts, les symboles $[\gamma, \delta)$, et $(\gamma, \delta]$ — respectivement les intervalles fermés du côté de γ et fermés du côté de δ, la signification de

$$\Phi([\gamma, \delta]), \qquad \Phi((\gamma, \delta)), \qquad \Phi([\gamma, \delta)), \qquad \Phi((\gamma, \delta]) \tag{1.3}$$

est évidente.

Définition 2. Soit

$$z_0 \in \Theta, \qquad \omega \subset \Theta \tag{1.4}$$

et supposons que $\Phi(t)$ atteine b. Nous disons que $\Phi(t)$ est *asymptotique relativement à l'ensemble* ω lorsqu'il existe un t_0, tel que

$$\Phi([t_0, b)) \subset \omega. \tag{1.5}$$