Une méthode d'estimation de l'erreur dans le procédé de Ritz

par K. Tatarkiewicz (Lublin)

1. Soient $p(x), q(x), f(x)$ trois fonctions définies et continues dans l'intervalle fermé $\langle 0,1\rangle$, telles que

$$q(x)\geqslant 0, \tag{1}$$

$$p(x)\geqslant \overline{p}>0 \qquad (\overline{p}=\text{const}). \tag{2}$$

Supposons en outre que $p(x)$ possède une dérivée continue (cette dernière hypothèse peut être affaiblie).

Il est bien connu qu'il existe alors une solution unique $y_0(x)$ de l'équation différentielle

$$[p(x)y']'-q(x)y=f(x) \tag{3}$$

et que cette solution vérifie les conditions aux limites

$$y(0)=y(1)=0. \tag{4}$$

On peut démontrer facilement que le problème aux limites (3), (4) est équivalent au problème variationnel consistant à rendre minimum l'intégrale

$$I[y]=\int\limits_0^1 (py'^2+qy^2+2fy)\,dx \tag{5}$$

avec la condition (4).

Soient

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x) \tag{6}$$

n fonctions quelconques ayant une deuxième dérivée continue, et telles que

$$g_k(0)=g_k(1)=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n). \tag{7}$$

Soit

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$$

un système de constantes qui rend minimum la fonction de n variables indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n)=I[a_1g_1+a_2g_2+\ldots+a_ng_n].$$

Un tel système existe moyennant nos hypothèses et il est unique. Posons

$$y_n(x)=\overline{a}_1g_1(x)+\overline{a}_2g_2(x)+\ldots+\overline{a}_ng_n(x).$$

La fonction y_n étant une solution approchée du problème variationnel (5), (4), elle est aussi une solution approchée du problème aux limites (3), (4). Nous appelons cette méthode de solution approchée des équations différentielles du second ordre procédé de W. Ritz[1]). Cette méthode numérique est bien commode, les constantes $\overline{a}_k$ se calculant presque toujours aisément et l'erreur du procédé, c'est-à-dire la différence entre $y_n(x)$ et $y_0(x)$ — la solution exacte de (3), (4), étant petite même pour des petites valeurs de n. Son défaut consiste en ce qu'il n'existe pas jusqu'ici de formule, facilement applicable, qui permette d'apprécier cette erreur:

$$r_n \overset{\text{df}}{=} \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |y_0(x)-y_n(x)|. \tag{8}$$

Nous connaissons — il est vrai — une centaine de formules[2]) qui permettent de majorer r_n, mais elles sont toutes d'une assez petite utilité pour les applications pratiques[3]). Ce travail a pour but de donner une formule simple qui permette d'apprécier r_n avec une majoration suffisamment petite.

Le § 2 est consacré à la démonstration de la formule de majoration (formule (21), où M_n est donné par (19)), qui contient pourtant une constante numérique K indéterminée. Les paragraphes suivants sont consacrés à l'estimation de cette constante. Dans le § 3 nous le faisons en introduisant l'hypothèse supplémentaire qu'il existe une constante $\overline{q}$ telle que $q(x)\geqslant\overline{q}>0$ dans $\langle 0,1\rangle$. Dans le § 4 nous estimons la constante K en rejetant cette hypothèse, ce qui fournit pourtant une formule moins commode pour les calculs.

Dans le dernier paragraphe nous trouvons quelles sont les constantes K dont l'application est la plus avantageuse dans les conditions données.

---

[1]) Voir, par exemple, [1] ou bien [2].

[2]) Voir par exemple [3].

[3]) Voir [1], p. 252-253, qui indique des méthodes illusoires de l'estimation de l'erreur.

2. Supposons que y_n ne soit pas la solution exacte de (3), (4), c'est-à-dire que $y_n(x) \neq y_0(x)$ pour certains x, donc que $r_n \neq 0$. Ceci n'est pas une restriction à la généralité des raisonnements, étant donné qu'il est facile de vérifier si une fonction donnée satisfait à l'équation (3) ou non. (La condition (4) est verifiée automatiquement grâce à l'hypothèse (7).)

Soit U l'ensemble des fonctions u définies et ayant une dérivée continue dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ et telles que

$$u(0)=u(1)=0, \tag{9}$$

$$\max_{x\in\langle 0,1\rangle}|u(x)|=1. \tag{10}$$

Alors, pour un nombre réel quelconque $\varepsilon>0$ et pour une fonction quelconque $u\in U$, nous avons

$$G_n(\varepsilon,u)\overset{\mathrm{df}}{=}I[y_n+\varepsilon u]$$

$$=\int_0^1[py_n'^2+2\varepsilon py_n'u'+\varepsilon^2pu'^2+qy_n^2+2\varepsilon qy_nu+\varepsilon^2qu+2fy_n+2\varepsilon fu]\,dx \tag{11}$$

$$=I[y_n]+2\varepsilon\int_0^1(py_n'u'+qy_nu+fu)\,dx+\varepsilon^2\int_0^1(pu'^2+qu^2)\,dx.$$

Posons

$$a(u)=\int_0^1(pu'^2+qu^2)\,dx, \tag{12}$$

$$b_n(u)=\int_0^1(py_n'u'+qy_nu+fu)\,dx, \tag{13}$$

$$c_n=I[y_n].$$

La formule (11) prend alors la forme suivante:

$$G_n(\varepsilon,u)=a(u)\varepsilon^2+2b_n(u)\varepsilon+c_n. \tag{14}$$

Supposons que r_n soit définie par (8) et soit

$$u_n\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{y_0-y_n}{r_n}.$$

Nous aurons $u_n\in U$ et $y_0=y_n+r_nu_n$. Donc

$$I[y_0]=I[y_n+r_nu_n]=G_n(r_n,u_n). \tag{15}$$

Pour une fonction déterminée u soit $\varepsilon(u)$ la valeur minimum de $G_n(\varepsilon,u)$. Pour $u\in U$, nous avons $a(u)\neq 0$, donc

$$\varepsilon(u)=-\frac{b_n(u)}{a(u)}.$$

La définition de y_0 et la formule (15) montrent que

$$G_n(r_n,u_n)=\inf_{u\in U,\ r\in R}G(r,u)$$

(où R est *l'ensemble de tous les nombres réels*), donc, en particulier, la fonctionnelle $I[y]$ étant continue dans l'espace C^1

$$G_n(r_n,u_n)=\inf_{r\in R}G_n(r,u_n). \tag{16}$$

Des propriétés du trinôme carré et de (16) il résulte que

$$r_n=\varepsilon(u_n)=-\frac{b_n(u_n)}{a(u_n)}. \tag{17}$$

Or

$$\int_0^1 py_n'u_n'\,dx=py_n'u_n\Big|_1^0-\int_0^1(py_n')'u_n\,dx=-\int_0^1(py_n')'u_n\,dx,$$

donc, de (13) et du fait que $|u_n(x)|\leqslant 1$, il s'ensuit que

$$|b_n(u_n)|=\left|\int_0^1[-(py_n')'+qy_n+f]\,u_n\,dx\right|\leqslant\int_0^1|(py_n')'-qy_n-f|\,dx. \tag{18}$$

Posons

$$M_n\overset{\mathrm{df}}{=}\int_0^1|(py_n')'-qy_n-f|\,dx, \tag{19}$$

et supposons que $K>0$ soit une constante qui vérifie la condition

$$\frac{1}{K}\leqslant a(u_n), \tag{20}$$

(s'il existe de telles constantes).

Alors les relations (17), (18), (19) et (20) donnent

$$r_n=|\varepsilon(u_n)|=\frac{|b_n(u_n)|}{a(u_n)}\leqslant\frac{M_n}{1/K}=KM_n.$$

Donc

$$r_n\leqslant KM_n. \tag{21}$$

C'est la formule cherchée[4]).

[4]) Le sens de ces raisonnements est très simple, ce n'est que la forme arithmétique des calculs qui les rend peu évidents. (5) représente un „paraboloïde elliptique" dans le produit cartésien de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ et d'une droite. Soit un point $y_n\in\mathfrak{H}$. Nous voulons trouver la distance entre y_n et y_0 — la projection du „sommet" du „paraboloïde" sur $\mathfrak{H}$. Pour cela nous envisageons les plans „verticaux" passant par y_n. Ils aurons un commun avec le „paraboloïde" des paraboles (leurs équations sont données par (14)). Nous trouvons la distance entre les projections des sommets de ces paraboles et y_n, et nous majorons la borne supérieure de cette distance (car un de ces sommets a pour projection sur $\mathfrak{H}$ exactement y_0).

Remarque. La forme de cette formule montre bien qu'une fonction, approximant „bien" $y_0(x)$ au point de vue de la norme donnée par l'intégrale (5), peut approximer $y_0(x)$ „mal" au point de vue de la norme donnée par (8).

Soit une suite infinie $\{g_k(x)\}$ de fonctions qui vérifient les conditions (7). Formons la suite $y_n(x)$ de Ritz approximant $y_0(x)$. On peut montrer[5]) que dans le cas où $q(x)$ est différentiable et la suite $\{g_k(x)\}$ est complète, on a

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

3. Si nous voulons appliquer la formule (21) à l'estimation effective de l'erreur r_n, il faut faire effectivement la majoration (20), c'est-à-dire il faut pouvoir trouver une constante (ou plusieurs constantes) K qui vérifient (20) — en montrant en même temps que de telles constantes existent. (Les formules (12) et (20) montrent que K peut dépendre de $p(x)$ et de $q(x)$; mais pour une équation donnée (3), donc pour des fonctions $p(x)$ et $q(x)$ bien déterminées, on peut considérer K comme une constante).

Supposons de plus qu'il existe une constante $\bar{q}$ telle que, pour tous les $x\in\langle 0,1\rangle$, nous ayons

$$q(x)\geqslant \bar{q}>0. \tag{22}$$

(La condition (22) implique évidemment la condition (1).) Nous avons

$$\begin{aligned} a(u) &= \int_0^1 p(x)[u'(x)]^2+q(x)[u(x)]^2\,dx \\ &\geqslant \int_0^1 \bar{p}[u'(x)^2+\bar{q}[u(x)]^2\,dx = \bar{p}\int_0^1 [u'(x)]^2+h^2[u(x)]^2\,dx, \end{aligned} \tag{23}$$

où $h^2=\bar{q}/\bar{p}$.

Posons

$$S(u,s,t)=\int_s^t [u'(x)]^2+h^2[u(x)]^2\,dx. \tag{24}$$

Supposons que la constante $K>0$ vérifie la condition

$$\frac{1}{K}\leqslant \bar{p}\inf_{u\in U} S(u,0,1). \tag{25}$$

Alors, de (23) et de (24), il s'ensuivra

$$\frac{1}{K}\leqslant \inf_{u\in U} a(u)\leqslant a(u_n),$$

donc K vérifiera la condition (20).

[5]) Voir par exemple [3], p. 24.

Nous voyons que, pour trouver une constante qui vérifie (20), il suffit de trouver une constante positive, plus petite que $\bar{p}\inf_{u\in U} S(u,0,1)$. Le reste de ce paragraphe aura pour but de résoudre ce problème.

Si $u\in U$, il résulte de (10) et de (9) qu'il existe un α appartenant à l'intervalle ouvert $(0,1)$, tel que $|u(\alpha)|=1$. Or, si $u\in U$, alors $-u\in U$ et $a(u)=a(-u)$, donc, pour trouver la borne inférieure de $S(u,0,1)$ dans la classe U, il suffit de considérer exclusivement les éléments de U pour lesquels il existe un $\alpha\in(0,1)$ tel que $u(\alpha)=1$.

Désignons par $U_1(\alpha)$ l'ensemble des fonctions u vérifiant les conditions:

1⁰ *u est définie et différentiable dans $\langle 0,\alpha\rangle$,*

2⁰ $u(0)=0$, $u(\alpha)=1$,

3⁰ $\max_{x\in\langle 0,1\rangle}|u(x)|=1$,

et désignons par $U_2(\alpha)$ l'ensemble des fonctions u vérifiant les conditions:

1⁰ *u est définie et différentiable dans $\langle \alpha,1\rangle$,*

2⁰ $u(\alpha)=1$, $u(1)=0$,

3⁰ $\max_{x\in\langle 0,1\rangle}|u(x)|=1$.

Soit $U(\alpha)$ l'ensemble de toutes les fonctions $u(x)$ ayant la forme

$$u(x)=\begin{cases} u_1(x) & \text{pour } x\in\langle 0,\alpha\rangle,\ u_1\in U_1(\alpha),\\ u_2(x) & \text{pour } x\in(\alpha,1\rangle,\ u_2\in U_2(\alpha),\end{cases}$$

et posons $U^*=\sum_{\alpha\in(0,1)} U(\alpha)$.

Nous avons

$$\inf_{u\in U} S(u,0,1)=\inf_{u\in U^*} S(u,0,1).$$

En effet, nous avons $U\subset U^*$ et pour chaque fonction $u\in U^*$ — donc pour une fonction différentiable dans $\langle 0,1\rangle$, sauf en un point α au plus — il existe une suite de fonctions $\{v_k\}\subset U$ uniformément convergentes vers $u(x)$ et telle que, dans $\langle 0,1\rangle-\{\alpha\}$, les fonctions $v'(x)$ soient presque uniformément convergentes vers $u'(x)$, donc

$$\lim_{k\to\infty} S(v_k,0,1)=S(u,0,1).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \inf_{u\in U^*} S(u,0,1) &= \inf_{\alpha\in(0,1)}\ \inf_{u\in U(\alpha)} S(u,0,1) \\ &= \inf_{\alpha\in(0,1)}\Big[\inf_{u\in U_1(\alpha)} S(u,0,\alpha)+\inf_{u\in U_2(\alpha)} S(u,\alpha,1)\Big]. \end{aligned} \tag{26}$$

Nous pouvons démontrer[6]) que, pour un a fixe, $\inf_{u\in U_1(a)} S(u,0,a)$ est atteint pour la solution de l'équation d'Euler du problème consistant à rendre minimum la fonctionnelle $S(u,0,a)$ avec les conditions

$$(27)\qquad u(0)=0, \qquad u(a)=1.$$

Cette équation d'Euler a dans ce cas la forme $u''-h^2u=0$. Sa solution, avec les conditions aux limites (27), est

$$u_a(x)=\frac{\sinh hx}{\sinh ha}.$$

Nous avons donc

$$\inf_{u\in U_1(a)} S(u,0,a)=S(u_a,0,a)=\int_0^a \frac{h^2\cosh^2 hx+h^2\sinh^2 hx}{\sinh^2 ha}\,dx$$

$$=\frac{h^2}{\sinh^2 ha}\int_0^a \cosh 2hx\,dx=h\coth ha.$$

Pareillement

$$\inf_{u\in U_2(a)} S(u,a,1)=h\coth h(1-a).$$

Posons

$$f(a)=\coth ha+\coth h(1-a).$$

Alors (26) nous donne

$$(28)\qquad \inf_{u\in U} S(u,0,1)=h\inf_{a\in(0,1)} f(a).$$

Or, nous trouvons aisément que

$$\inf_{a\in(0,1)} f(a)=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

donc, en appliquant les formules (23), (25) et (28), nous aurons

$$a(u_n)\geqslant 2\sqrt{\bar p\bar q}\coth\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar q}{\bar p}}.$$

Nous voyons que, si nous posons

$$(29)\qquad K_1=\frac{\tanh\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar q}{\bar p}}}{2\sqrt{\bar p\bar q}},$$

cette constante K_1 vérifiera (20). En même temps nous avons démontré l'existence de constantes qui vérifient la condition (20).

[6]) Voir [4], vol. II, p. 440.

Or, si $0<t$, alors $0<\tanh t<1$, donc, si nous posons

$$(30)\qquad K_2=\frac{1}{2\sqrt{\bar p\bar q}},$$

nous aurons une seconde constante vérifiant (20).

Par une simple transformation algébrique, la relation (29) donne

$$K_1=\frac{1}{4\bar p}\cdot\frac{\tanh\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar q}{\bar p}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar q}{\bar p}}}.$$

Or, si $0<t$, alors $0<\tanh t<t$, donc, si nous posons

$$(31)\qquad K_3=\frac{1}{4\bar p}$$

nous aurons encore une constante vérifiant (20).

Les constantes K_2 et K_3 sont plus faciles à calculer que K_1, mais elles donnent une estimation moins précise de l'erreur r_n. (L'étude de leurs relations se trouve ci-dessous au § 5).

Dans les problèmes pratiques nous avons souvent $p(x)\equiv\bar p=1$. Nous pouvons alors poser simplement

$$(32)\qquad K_4=\frac{1}{4}.$$

Dans ce cas, cette constante vérifiera aussi la condition (20).

4. Nous allons trouver maintenant une constante vérifiant (20) en rejetant la condition supplémentaire (22) (c'est-à-dire seulement sous les hypothèses (1) et (2)).

Nous avons

$$a(u)=\int_0^1 p(x)[u'(x)]^2+q(x)[u(x)]^2\,dx\geqslant\int_0^1 p(x)[u'(x)]^2\,dx.$$

Posons

$$T(u,s,t)=\int_s^t p(x)[u'(x)]^2\,dx.$$

Le procédé est identique à celui du paragraphe précédent. Il eset bien connu[7]) que la borne inférieure de $T(u,0,a)$ pour $u\in U_1(a)$ est atteint pour la solution de l'équation (équation d'Euler de ce problème)

$$(33)\qquad [p(x)u'(x)]'=0,$$

avec les conditions aux limites

$$(34)\qquad u(0)=0, \qquad u(a)=1.$$

[7]) Voir [4], vol. II, p. 326.

Il s'ensuit que

$$p(x)u'(x)=c \qquad (c=\text{const}).$$

Posons

$$\bar{u}(x)=c\int_0^x \frac{dt}{p(t)}.$$

Or

$$\bar{u}'(x)=\frac{c}{p(x)}, \tag{35}$$

donc $\bar{u}(x)$ vérifiera (33). Pour que (34) soit vérifié, il faut et il suffit que

$$c\int_0^a \frac{dt}{p(t)}=1.$$

(La condition $\bar{u}(0)=0$ sera vérifiée automatiquement, grâce à la définition de $\bar{u}(x)$.) C'est de cette condition que nous obtenons la valeur de c. En la substituant dans (35) nous obtenons

$$\bar{u}'(x)=\frac{1}{p(x)\int_0^a [p(t)]^{-1}dt}.$$

Mais alors

$$\inf_{u\in U_1(a)} T(u,0,a)=T(\bar{u},0,a)=\int_0^a p(t)[\bar{u}'(t)]^2\,dt$$

$$=\int_0^a \frac{p(t)}{[p(t)]^2\left[\int_0^a [p(x)]^{-1}dx\right]^2}\,dt=\frac{\int_0^a [p(t)]^{-1}dt}{\left[\int_0^a [p(x)]^{-1}dx\right]^2}=\frac{1}{\int_0^a [p(t)]^{-1}dt}.$$

D'une façon analogue

$$\inf_{u\in U_2(a)} T(u,a,1)=\frac{1}{\int_a^1 [p(t)]^{-1}dt}.$$

Soit

$$g(a)=\frac{1}{\int_0^a [p(t)]^{-1}dt}+\frac{1}{\int_a^1 [p(t)]^{-1}dt}. \tag{36}$$

Des raisonnements analogues à ceux du paragraphe précédent nous montrent que

$$\inf_{u\in U} T(u,0,1)=\inf_{u\in U^*} T(u,0,1)$$

$$=\inf_{a\in(0,1)}\left[\inf_{u\in U_1(a)} T(u,0,a)+\inf_{u\in U_2(a)} T(u,a,1)\right]=\inf_{a\in(0,1)} g(a). \tag{37}$$

La fonction $g(a)$ est positive et continue dans $(0,1)$. Étant donné qu'elle n'est pas bornée dans les voisinages des points 0 et 1, elle doit avoir au moins un minimum à l'intérieur de l'intervalle $(0,1)$. Dans un de ces minima la fonction $g(a)$ atteint sa borne inférieure. Donc, pour trouver cette borne inférieure, il suffit de trouver les minima de $g(a)$, ce qui est très facile, étant donné que cette fonction est différentiable.

Nous avons

$$g'(a)=-\frac{1/p(a)}{\left[\int_0^a [p(t)]^{-1}dt\right]^2}+\frac{1/p(a)}{\left[\int_a^1 [p(t)]^{-1}dt\right]^2}$$

$$=\frac{1}{p(a)}\cdot\frac{\left[\int_0^a [p(t)]^{-1}dt\right]^2-\left[\int_a^1 [p(t)]^{-1}dt\right]^2}{\left[\int_0^a [p(t)]^{-1}dt\right]^2\left[\int_a^1 [p(t)]^{-1}dt\right]^2}.$$

Or, de l'hypothèse (2), il résulte que, pour $a\in(0,1)$ le dénominateur de ce quotient est différent de 0. Le quotient s'annulera que pour les nombres a vérifiant l'équation

$$\int_0^a \frac{dt}{p(t)}=\pm\int_a^1 \frac{dt}{p(t)}. \tag{38}$$

Le signe „—" mène à une contradiction ($p(t)$ est une fonction positive et $a\in(0,1)$). Il doit donc être

$$2\int_0^a \frac{dt}{p(t)}=\int_0^1 \frac{dt}{p(t)}.$$

La fonction $g(a)$ peut donc avoir dans $(0,1)$ des extrêma seulement en des points vérifiant l'équation

$$\int_0^a \frac{dt}{p(t)}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{p(t)}. \tag{39}$$

De l'hypothèse (2), il s'ensuit que la fonction

$$F(a)=\int_0^a \frac{dt}{p(t)}$$

est une fonction de la variable a, définie, croissante et continue dans $\langle 0,1\rangle$. Donc $0=F(0)<F(a)<F(1)$ pour $a\in(0,1)$ et la fonction prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0,F(1))$. Or, comme elle est croissante, elle ne les prend qu'une fois. Il existe donc un nombre réel, et un seul, $\bar{a}\in(0,1)$ tel que $F(\bar{a})=F(1/2)$.

$\bar{a}$ est la solution unique de (39) — nous avons donc $g'(\bar{a})=0$ et $g'(a)\neq 0$ pour $a\neq\bar{a}$. La fonction $g(a)$ a donc au point $\bar{a}$ son extrêmum unique. Nous avons remarqué antérieurement que la fonction $g(a)$ doit avoir dans $(0,1)$ *un minimum au moins*. Elle a donc au point $\bar{a}$ son minimum unique et la valeur $g(\bar{a})$ *est égale à sa borne inférieure*.

Si $\bar{a}$ vérifie (39), la relation (38) montre qu'il vérifiera aussi l'équation

$$\int_a^1 \frac{dt}{p(t)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{p(t)}. \tag{40}$$

En mettant les valeurs de (39) et de (40) dans (36), nous obtenons

$$\inf_{a\in(0,1)} g(a) = \frac{2}{\frac{1}{2}\int_0^1 [p(t)]^{-1}\,dt} = \frac{4}{\int_0^1 [p(t)]^{-1}\,dt}.$$

Cette dernière formule et la relation (37) montrent que la constante

$$K_5 = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{p(x)} \tag{41}$$

vérifiera aussi la condition (20)[8])

Remarquons que l'hypothèse (2) entraîne $1/p(x)\leqslant 1/\overline{p}$, donc

$$K_5 = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{p(x)} \leqslant \frac{1}{4\overline{p}} = K_3. \tag{42}$$

Étant donné que K_5 vérifie (20) il en résulte que K_3 vérifie la même condition, ce que nous avons déjà vu au paragraphe précédent, mais ici nous avons obtenu ce résultat sans l'hypothèse supplémentaire (22)

---

[8]) Remarquons que la formule (41) aura un sens précis même si nous ne supposons que

$$p(x)>0 \quad \text{pour} \quad x\in(0,1), \qquad \int_0^1 \frac{dx}{p(x)} < \infty. \tag{2'}$$

Nous pouvons montrer que si nous supposons (1) et (2') le problème aux limites (3), (4) a une solution et une seule. Pour cette solution l'intégrale (5) avec la condition (4) atteint son minimum absolu.

La méthode de Ritz peut être appliquée moyennant ces hypothèses. On peut facilement montrer (en changeant convenablement quelques raisonnements au § 2 et au § 4) que la formule (41) restera vraie et que la constante K_5 sera non seulement finie, mais aussi qu'elle vérifiera (20).

Dans ce cas la formule obtenue est particulièrement intéressante, étant donné que nous ne connaissons pas jusqu'ici de formules valables si nous faisons l'hypothèse (2') (au lieu de (2)).

5. La démonstration, donnée ci-dessus, que les constantes K_i $(i=1,2,3,4,5)$ vérifient (20) s'appuie sur des théorèmes assez profonds du Calcul des variations. Il est donc intéressant de constater qu'on puisse montrer par un raisonnement élémentaire que la constante K_3 vérifie (20).

Il suit immédiatement de l'inégalité de Schwarz que

$$\left[\int_a^b f\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2\,dx.$$

Posons

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = A,$$

alors

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx \geqslant \frac{\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2}{b-a} = A^2(b-a) = \int_a^b A^2\,dx;$$

nous voyons que, dans la classe V des fonctions v vérifiant la condition

$$\int_a^b v(x)\,dx = A(b-a),$$

on a

$$\inf_{u\in V}\int_a^b v^2\,dx = A^2(b-a)$$

(et cette valeur minimale est atteinte pour la fonction constante $u(x)\equiv A$).

Si $u\in U_1(a)$ il doit être $u(0)=0$ et $u(a)=1$, donc

$$\int_0^a u'(x)\,dx = 1 = \frac{1}{a}\,a \qquad \text{et} \qquad \inf_{u\in U_1(a)}\int_0^a [u'(x)]^2\,dx = \frac{1}{a^2}\,a = \frac{1}{a}.$$

Pareillement

$$\inf_{u\in U_2(a)}\int_a^1 [u'(x)]^2\,dx = \frac{1}{1-a}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\inf_{u\in U}\int_0^1 [u'(x)]^2\,dx = \min_{a\in(0,1)}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}\right] = 4$$

et nous voyons que

$$a(u) = \int_0^1 pu'^2 + qu^2\,dx \geqslant \overline{p}\int_0^1 u'^2\,dx \geqslant 4\overline{p}.$$

Nous avons démontré que la constante K_3 vérifie la condition (20).

6. Nous avons trouvé cinq constantes vérifiant la condition (20). Nous allons trouver quelles sont les constantes K_i dont l'application est la plus avantageuse dans les conditions données.

Les constantes K_5 et K_3 ont été déduites sous des plus faibles hypothèses. Comme le calcul de K_5 exige une quadrature, il est le plus compliqué. Mais cette constante peut être d'une importance (il suffit de la calculer approximativement par une méthode numérique), même quand la condition (22) est vérifiée, étant donné que, quand

$$\frac{\sup_{x\epsilon(0,1)} p(x)}{\overline{p}}$$

est un grand nombre et $\overline{p}\overline{q}$ est petit, K_5 peut être beaucoup plus petit que les autres constantes. (Remarquons que (42) nous montre que $K_5 \leqslant K_3$, mais il peut arriver que ces deux constantes diffèrent peu.)

Les constantes K_1, K_2, K_3 (et K_4) se calculent facilement (voir (29), (30), (31) et (32)). Si la supposition (22) est vérifiée, elles existent toutes les quatre et nous avons

$$K_1 \leqslant K_2, \qquad K_1 \leqslant K_3.$$

Donc la constante K_1 est toujours la plus petite, mais son calcul est le plus compliqué, car il exige l'usage de tables des fonctions hyperboliques, ou des calculs transcendants. (La calcul de K_2 et de K_3 n'exige que des opérations arithmétiques.)

Vu cette difficulté il ne vaut pas — le plus souvent — la peine de calculer K_1, car, en comparant les graphiques représentant les K_i en fonction de $\overline{p}$ et de $\overline{q}$, nous voyons que,

$$\text{pour} \quad 4\overline{p} \leqslant \overline{q} \quad \text{nous avons} \quad |K_1 - K_2| < \frac{K_1}{3} \quad \text{et} \quad K_2 \leqslant K_3,$$

$$\text{pour} \quad 4\overline{p} \geqslant \overline{q} \quad \text{nous avons} \quad |K_1 - K_3| < \frac{K_1}{3} \quad \text{et} \quad K_3 \leqslant K_2.$$

En employant donc la plus petite des constantes K_2 et K_3 au lieu de K_1, nous obtenons une constante qui est plus grande de 25% au plus.

La valeur pratique de la formule (21), qui nous permet de trouver „l'erreur calculée" $\varrho_n = KM_n$, dépend essentiellement du degré de majoration qu'elle fait subir à „l'erreur vraie" r_n (donnée par la formule (8)), c'est-à-dire de la valeur du rapport ϱ_n/r_n.

En employant des équations pour lesquelles nous pouvons trouver des solutions exactes, et en leur applicant le procédé de Ritz avec des différents systèmes de fonctions (6), nous pouvons montrer que ce rapport peut varier entre les valeurs 1 (qui est à priori la meilleure) et ∞ (qui est a priori la moins bonne).

Ces exemples montrent aussi que, si $p(x)$ est une constante (par exemple $p(x)\equiv 1$), $q(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions assez régulières et les fonctions $g_i(x)$ vérifient la condition de Lipschitz avec une constante L qui est petite par rapport à $\max_{x\epsilon\langle 0,1\rangle}|g_i(x)|$ (par exemple les polynômes algébriques et trigonométriques de degrés m pas très hauts sont de telles fonctions), alors le rapport ϱ_n/r_n n'est pas très grand (par exemple pour $L=1$, $m\leqslant 5$ il est probable qu'il soit contenu dans l'intervalle $(3,30)$).

En employant d'autres formules, connues jusqu'ici, pour la majoration de l'erreur, nous obtenons des valeurs qui sont des centaines et des milliers de fois plus grandes que la valeur donnée par la formule (21), bien que le plus souvent elles exigent des calculs beaucoup plus longs. Remarquons encore que ces formules connues jusqu'ici, sont le plus souvent valables non pour des fonctions (6) quelconques, mais pour des fonctions déterminées (le plus souvent pour des polynômes ou pour des fonctions trigonométriques).

Publications citées

[1] Ch. Blanc, *Les équations différentielles de la technique*, Neufchâtel 1947.

[2] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Москва-Ленинград 1952.

[3] N. Kryloff, *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique*, Mémorial des Sc. Math. 49, Paris 1931.

[4] L. Tonelli, *Fundamenti di calcolo delle variazioni*, Bologna 1923.