Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace

par J. Górski (Kraków)

1. Points extrémaux liés au problème. Soient D un domaine non borné de l'espace à trois dimensions, contenant le point à l'infini en son intérieur, F la frontière de D et $f(Q)$ une fonction continue du point Q, définie sur F. Désignons par $d(F)$ le diamètre transfini de l'ensemble F au sens de Pólya-Szegö [1], par $\lambda>0$ un paramètre réel et par $\omega_\lambda(P,Q)$ la fonction de deux points P, Q variables sur F, définie par la formule

$$\omega_\lambda(P,Q)=e^{\lambda[f(P)+f(Q)]-1/PQ},$$

où PQ est la distance des points P et Q. Lorsque $P=Q$, posons par définition $\omega_\lambda(P,Q)=0$. Nous supposerons dans la suite que $d(F)>0$.

Soient $Q^{(n)}$ un système de $n+1$ points quelconques $Q_0,Q_1,\ldots,Q_n$ situés sur F, et $v_{n\lambda}$ le maximum du produit

$$V_\lambda(Q^{(n)})=\prod_{0\leqslant j<k\leqslant n}\omega_\lambda(Q_j,Q_k)$$

lorsque le système $Q^{(n)}$ varie sur F. Un système $P^{(n)}$ de points de F

(1) $$P^{(n)}=\{P_0,P_1,\ldots,P_n\},$$

pour lesquels

(2) $$v_{n\lambda}=V_\lambda(P^{(n)})=\max_{Q^{(n)}\in F}V_\lambda(Q^{(n)}),$$

sera dit n-ième *système extrémal* de F (ou *système de points extrémaux*) par rapport à la fonction génératrice $\omega_\lambda(P,Q)$.

On sait (voir [2]) que la suite $\{v_{n\lambda}^{2/n(n+1)}\}$ n'est pas croissante et, par suite, la limite

$$\lim_{n\to\infty}[v_{n\lambda}]^{2/n(n+1)}=v_\lambda(F),$$

dite l'*écart* de l'ensemble F par rapport à la fonction $\omega_\lambda(P,Q)$ existe. Il est clair que $v_\lambda(F)\geqslant 0$.

Posons

(3) $$D(Q^{(n)})=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{0\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{Q_jQ_k},\qquad S(Q^{(n)})=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{0\leqslant j<k\leqslant n}[f(Q_j)+f(Q_k)]$$

et désignons par $\sigma_\lambda(P^{(n)})$ la différence

(4) $$\sigma_\lambda(P^{(n)})=\lambda S(P^{(n)})-D(P^{(n)}).$$

Puisque

$$v_{n\lambda}^{2/n(n+1)}=e^{\lambda S(P^{(n)})-D(P^{(n)})}\to V_\lambda(F)\geqslant 0,$$

la suite (4) n'est pas croissante et tend vers une limite finie ou vers l'infini négatif. Nous allons prouver que la limite

(5) $$\lim_{n\to\infty}\sigma_\lambda(P^{(n)})=\sigma_\lambda$$

est finie.

En effet, soient m le minimum de $f(Q)$ sur F et $R^{(n)}$ un système de points de F pour lesquels

$$D(R^{(n)})=\min_{Q^{(n)}\in F}D(Q^{(n)}).$$

On sait (voir [1]) que

$$D(R^{(n)})\to\frac{1}{d(F)}.$$

D'autre part, d'après (2) et (3),

$$\sigma_\lambda(P^{(n)})\geqslant\sigma_\lambda(R^{(n)})=\lambda S(R^{(n)})-D(R^{(n)}),$$

donc, étant $S(R^{(n)})\geqslant 2m$, on a

$$\sigma_\lambda(P^{(n)})\geqslant 2\lambda m-D(R^{(n)}),$$

d'où, en faisant tendre n vers l'infini, on trouve

$$\sigma_\lambda\geqslant 2\lambda m-\frac{1}{d(F)}.$$

Comme $d(F)>0$, la limite σ_λ est finie.

2. Propriétés de σ_λ. La position des points extrémaux (1) sur F dépend de n et de λ. Désignons par Δ un ensemble borélien quelconque de points de F; soit $\mu_{n\lambda}(\Delta)$ la fonction d'ensemble égale à 0 lorsque Δ

ne contient aucun de points (1) et à $k/(n+1)$ lorsqu'il en contient k. Il est clair que, quel que soit $\Delta \epsilon F$, on a $0 \leqslant \mu_{n\lambda}(\Delta) \leqslant 1$, donc les fonctions $\mu_{n\lambda}(\Delta)$, $n=1,2,\ldots$, sont complètement additives, non négatives et uniformément bornées. Chaque $\mu_{n\lambda}(\Delta)$ représente une répartition de la masse unité sur la frontière F.

D'après un théorème de De la Vallée Poussin [3], de chaque suite illimitée de fonctions additives uniformément bornées on peut extraire une suite partielle convergente.

Soit $\{\mu_{n_k\lambda}\}$ une suite partielle de la suite $\{\mu_{n\lambda}(\Delta)\}$ tendant vers une limite et soit

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k\lambda}(\Delta) = \mu_\lambda^*(\Delta) = \mu_\lambda^*.$$

Posons

$$J(\mu_\lambda^*) = 2\lambda \int_F f(Q)\, d\mu_\lambda^*(\Delta_Q) - \iint_F \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P)\, d\mu_\lambda^*(\Delta_Q). \tag{5'}$$

Je vais démontrer que

$$\sigma_\lambda \leqslant J(\mu_\lambda^*). \tag{6}$$

Démonstration. Soit N un nombre naturel quelconque. Désignons par $\dfrac{1}{[PQ]_N}$ la fonction définie comme il suit

$$\frac{1}{[PQ]_N} = \begin{cases} \dfrac{1}{PQ} & \text{si } \dfrac{1}{PQ} < N, \\[2mm] N & \text{si } \dfrac{1}{PQ} \geqslant N. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{P_j P_k} &\geqslant \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{[P_j P_k]_N} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{[P_j P_k]_N} - \frac{N}{n+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Le premier terme du dernier membre peut être représenté par l'intégrale

$$\iint_F \frac{1}{[PQ]_N}\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_P)\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_Q).$$

D'autre part, l'expression

$$\frac{\lambda}{(n+1)^2} \sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{n} [f(P_j)+f(P_k)]$$

est égale à

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \Big\{ \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} [f(P_j)+f(P_k)] \Big\} &= \frac{\lambda}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \Big\{ \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} f(P_j) + \frac{n-1}{n+1} f(P_k) \Big\} \\ &= \frac{\lambda}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \Big\{ \int_F f(P)\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_P) + \frac{n-1}{n+1} f(P_k) \Big\} \\ &= \lambda \int_F f(P)\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_P) + \frac{(n-1)\lambda}{n+1} \int_F f(P)\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_P), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\lambda}{(n+1)^2} \sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{n} [f(P_j)+f(P_k)] = \frac{2n}{n+1} \lambda \int_F f(P)\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_P). \tag{8}$$

De (7) et (8), résulte l'inégalité

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n+1)^2} \Big\{ \sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{P_j P_k} - \lambda \sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{n} [f(P_j)+f(P_k)] \Big\} \\ &\geqslant \iint_F \frac{1}{[PQ]_N}\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_P)\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_Q) - \frac{N}{n+1} - \frac{2n}{n+1} \lambda \int_F f(P)\, d\mu_{n\lambda}(\Delta_P). \end{aligned}$$

Observons que le premier membre de cette inégalité est égal à

$$-\frac{n}{n+1} \sigma_\lambda(P^{(n)})$$

et faisons tendre n vers l'infini par les valeurs $n_1, n_2, \ldots$, en supposant que N soit fixe. La répartition $\mu_{n_k\lambda}$ tend alors vers la limite μ_λ^*, et, d'après (5), l'inégalité précédente donne

$$\sigma_\lambda \leqslant 2\lambda \int_F f(P)\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P) - \iint_F \frac{1}{[PQ]_N}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P)\, d\mu_\lambda^*(\Delta_Q).$$

Lorsque $N \to \infty$, on obtient l'inégalité (6)

3. Propriétés de σ_λ (suite). Je vais prouver maintenant que, *quelle que soit la répartition $\tau(\Delta)$ de la masse unité sur F, on a l'inégalité*

$$\sigma_\lambda \geqslant J(\tau). \tag{9}$$

Démonstration. Soit $Q^{(n)}$ un système de $n+1$ points $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ quelconques, situés sur F. D'après (2), (3) et (4), on a

$$(10)\qquad \binom{n+1}{2}\sigma_\lambda(P^{(n)}) \geqslant \lambda \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n} [f(Q_j)+f(Q_k)] - \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{Q_jQ_k}.$$

Fixons arbitrairement les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sur la frontière F et partageons F en s ensembles boréliens $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$. Supposons tout d'abord que $Q_0 \epsilon \Delta_1$ et multiplions l'inégalité (10) par $\tau(\Delta_1)$. Supposons ensuite que $Q_1 \epsilon \Delta_2$ et multiplions l'inégalité (10) par $\tau(\Delta_2)$. Supposons enfin Q_0 appartienne à l'ensemble Δ_s, multiplions l'inégalité (10) par $\tau(\Delta_s)$ et formons le somme de s inégalités ainsi obtenues. Il est claire que

$$\tau(\Delta_1)+\tau(\Delta_2)+\ldots+\tau(\Delta_s)=1.$$

Lorsque s tend vers l'infini et le diamètre de tous les ensembles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$ tend vers zéro, on obtient l'inégalité

$$(10_1)\qquad \binom{n+1}{2}\sigma_\lambda(P^{(n)}) \geqslant n\lambda \int_F f(Q)\,d\tau(\Delta_Q) + n\lambda\sum_{j=1}^{n} f(Q_j) - \sum_{k=1}^{n}\int_F \frac{1}{Q_kQ}\,d\tau(\Delta_Q) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{Q_jQ_k},$$

dont le membre droit dépend des points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Fixons maintenant les points $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ et supposons que le point Q_1 appartienne successivement à $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$. Multiplions l'inégalité (10_1) par $\tau(\Delta_1)$ lorsque $Q_1 \epsilon \Delta_1$, par $\tau(\Delta_2)$ lorsque $Q_1 \epsilon \Delta_2, \ldots,$ et enfin par $\tau(\Delta_s)$ lorsque $Q_1 \epsilon \Delta_s$, et formons la somme des s inégalités ainsi obtenues. En passant à la limite lorsque $s\to\infty$ et le diamètre de tous les ensembles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$ tend vers zéro, on obtient l'inégalité

$$(10_2)\qquad \binom{n+1}{2}\sigma_\lambda(P^{(n)}) \geqslant 2n\lambda \int_F f(Q)\,d\tau(\Delta_Q) - \iint_F \frac{1}{PQ}\,d\tau(\Delta_P)\,d\tau(\Delta_Q) - 2\sum_{k=2}^{n}\int_F \frac{1}{Q_kQ}\,d\tau(\Delta_Q) + n\lambda\sum_{j=2}^{n} f(Q_j) - \sum_{2\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{Q_jQ_k},$$

dont le membre droit ne dépend que des points $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$. Supposons que, pour $0\leqslant r\leqslant n-1$, on ait

$$(10_3)\qquad \binom{n+1}{2}\sigma_\lambda(P^{(n)}) \geqslant (r+1)n\lambda \int_F f(Q)\,d\tau(\Delta_Q) + n\lambda\sum_{j=r+1}^{n} f(Q_j) - \frac{r(r+1)}{2}\iint_F \frac{1}{PQ}\,d\tau(\Delta_P)\,d\tau(\Delta_Q) - (r+1)\sum_{k=r+1}^{n}\int_F \frac{1}{Q_kQ}\,d\tau(\Delta_Q) - \sum_{r+1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{Q_jQ_k},$$

et observons que cette inégalité se réduit à (10_1) ou à (10_2), lorsque $r=0$ ou $r=1$, et que le membre droit ne dépend que des points $Q_{r+1}, \ldots, Q_n$. Par un procédé analogue aux deux précédents on déduit de l'inégalité (10_3) la suivante

$$(10_4)\qquad \binom{n+1}{2}\sigma_\lambda(P^{(n)}) \geqslant (r+2)n\lambda \int_F f(Q)\,d\tau(\Delta_Q) + n\lambda\sum_{j=r+2}^{n} f(Q_j) - \frac{(r+1)(r+2)}{2}\iint_F \frac{1}{PQ}\,d\tau(\Delta_P)\,d\tau(\Delta_Q) - (r+2)\sum_{k=r+2}^{n}\int_F \frac{1}{Q_kQ}\,d\tau(\Delta_Q) - \sum_{r+2\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{Q_jQ_k}.$$

L'inégalité (10_3) pour $r=n-1$, se réduit à l'inégalité

$$(10_5)\qquad \binom{n+1}{2}\sigma_\lambda(P^{(n)}) \geqslant n^2\lambda \int_F f(Q)\,d\tau(\Delta_Q) + n\lambda f(Q_n) - \frac{n(n-1)}{2}\iint_F \frac{1}{PQ}\,d\tau(\Delta_P)\,d\tau(\Delta_Q) - n\int_F \frac{1}{Q_nQ}\,d\tau(\Delta_Q),$$

dont le membre droit ne dépend que de Q_n. Multiplions (10_5) par $\tau(\Delta_1)$ lorsque $Q_n \epsilon \Delta_1$, par $\tau(\Delta_2)$ lorsque $Q_n \epsilon \Delta_2, \ldots$ et enfin par $\tau(\Delta_s)$ lorsque $Q_n \epsilon \Delta_s$, et formons la somme des s inégalités ainsi obtenues. En passant comme plus haut à la limite, on obtient

$$\binom{n+1}{2}\sigma_\lambda(P^{(n)}) \geqslant n(n+1)\lambda \int_F f(Q)\,d\tau(\Delta_Q) - \frac{n(n+1)}{2}\iint_F \frac{1}{PQ}\,d\tau(\Delta_P)\,d\tau(\Delta_Q).$$

Il suffit de diviser les deux membres de cette inégalité par $\binom{n+1}{2}$ et de faire tendre n vers l'infini pour obtenir l'inégalité (9).

De (6) et (9), résulte l'égalité

$$(11)\qquad \sigma_\lambda = J(\mu_\lambda^*),$$

et on voit d'après (9) que la distribution de la masse unité définie par la fonction μ_λ^* réalise la borne supérieure de l'expression $J(\tau)$, où $\tau(\Delta)$ est une distribution de la masse unité quelconque sur F. On a donc

$$(12)\qquad J(\mu_\lambda^*) = \sup_\tau J(\tau).$$

4. Introduction de la fonction $u_\lambda(P)$. Désignons par F_λ le *noyau de la masse* relatif à la distribution μ_λ^*, c'est-à-dire l'ensemble de tous ceux points de F, dont chaque entourage contient une masse non nulle. L'ensemble F_λ est évidemment fermé. Désignons encore par $u_\lambda(P)$ la fonction du point P, définie par la formule

$$u_\lambda(P) = \int_F \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_Q) - \lambda f(P). \tag{13}$$

THÉORÈME 1. *En tout point de F_λ sauf, au plus, dans un sous-ensemble de diamètre transfini nul, la fonction $u_\lambda(P)$ est constante.*

Démonstration. Posons

$$\int_F u_\lambda(P)\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P) = \gamma_\lambda,$$

et soit ε un nombre positif quelconque. La fonction $u_\lambda(P)$ ne peut être constamment $\leqslant \gamma_\lambda - \varepsilon$, car dans le cas contraire, on aurait

$$\gamma_\lambda = \int_F u_\lambda(P)\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P) \leqslant \gamma_\lambda - \varepsilon.$$

Il existe donc un point $P_0 \epsilon F_\lambda$, où $u_\lambda(P_0) > \gamma_\lambda - \varepsilon$. Observons que la fonction $u_\lambda(P)$ est semi-continue inférieurement, donc il existe un voisinage $V(P_0)$ du point P_0, dans lequel $u_\lambda(P) > \gamma_\lambda - \varepsilon$. Ceci étant, supposons que $u_\lambda(P)$ soit $\leqslant \gamma_\lambda - 2\varepsilon$ en tout point d'un ensemble $E \subset F_\lambda$ de diamètre transfini positif, et soit m la masse contenue dans $V(P_0)$. Transportons cette masse à l'ensemble E et répartissons la sur E de manière que son potentiel soit borné. Dans ce but désignons par $\sigma(\Delta)$ la fonction d'ensemble définie comme il suit

$$\sigma(\Delta) \equiv -\mu_\lambda^*(\Delta) \quad \text{dans } V(P_0),$$

$$\sigma(\Delta) > 0 \quad \text{dans } E, \qquad \sigma(E) = \mu_\lambda^*[V(P_0)] = m,$$

$$\sigma(\Delta) \equiv 0 \quad \text{en dehors de } E + V(P_0)$$

et satisfaisant à la condition

$$A = \iint_F \frac{1}{PQ}\, d\sigma(\Delta_P)\, d\sigma(\Delta_Q) < \infty.$$

La somme $\mu_\lambda^*(\Delta) + \sigma(\Delta)$ définit la nouvelle répartition de masse dans F. Pour tout nombre h, $0 < h \leqslant 1$, la fonction $\mu_\lambda^* + h\sigma$ est non négative et exprime une répartition de la masse unité dans F. D'après (5'), on a

$$\delta J = J(\mu_\lambda^* + h\sigma) - J(\mu_\lambda^*) = \int_F \Big[-\int_F \frac{1}{PQ}(d\mu_\lambda^* + h\,d\sigma) + 2\lambda f(P)\Big](d\mu_\lambda^* + h\,d\sigma)$$

$$- \int_F \Big[-\int_F \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda^* + 2\lambda f(P)\Big] d\mu_\lambda^*$$

$$= -h^2 \iint_F \frac{1}{PQ}\, d\sigma\, d\sigma + 2h\Big[-\iint_F \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda^*\, d\sigma + \lambda \int_F f(P)\, d\sigma\Big]$$

$$\geqslant -h^2 A - 2h(\gamma_\lambda - 2\varepsilon)m + 2h(\gamma_\lambda - \varepsilon)m = -h^2 A + 2hm\varepsilon.$$

Pour h suffisamment petit, on a $\delta J > 0$ ce qui reste en contradiction avec (12).

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on a $u_\lambda(P) \geqslant \gamma_\lambda$ en tout point de F_λ à l'exception au plus d'un ensemble de diamètre transfini nul.

D'autre part, $u_\lambda(P)$ ne peut être $> \gamma_\lambda$ en aucun point $P \epsilon F_\lambda$. En effet, si l'on avait en un point $P_1 \epsilon F_\lambda$, $u_\lambda(P_1) > \gamma_\lambda$, l'inégalité $u_\lambda(P) > \gamma_\lambda$ serait satisfaite dans un entourage de P_1 et l'intégrale

$$\int_F u_\lambda(P)\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P)$$

deviendrait $> \gamma_\lambda$, ce qui est impossible; donc γ_λ est la borne supérieure de la fonction $u_\lambda(P)$ dans F_λ.

Nous allons calculer la valeur de la constante γ_λ. A cet effet désignons par $\bar{\mu}_\lambda$ la *distribution d'équilibre* de la masse unité sur F_λ, c'est-à-dire une distribution dont le potentiel est constant sur F_λ, à l'exception, au plus, d'un ensemble de diamètre transfini nul. Puisque $u_\lambda(P) = \gamma_\lambda$ dans F_λ, on a

$$\gamma_\lambda = \int_{F_\lambda} u_\lambda(P)\, d\bar{\mu}_\lambda(\Delta_P) = \int_{F_\lambda}\Big\{\int_{F_\lambda} \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_Q) - \lambda f(P)\Big\}\, d\bar{\mu}_\lambda(\Delta_P)$$

$$= \int_{F_\lambda}\Big\{\int_{F_\lambda} \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)\Big\}\, d\bar{\mu}_\lambda(\Delta_P) - \lambda \int_{F_\lambda} f(P)\, d\bar{\mu}_\lambda(\Delta_P).$$

En appliquant le théorème de Tonelli

$$\int_{F_\lambda}\Big\{\int_{F_\lambda} \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)\Big\}\, d\bar{\mu}_\lambda(\Delta_P) = \int_{F_\lambda}\Big\{\int_{F_\lambda} \frac{1}{PQ}\, d\bar{\mu}_\lambda(\Delta_P)\Big\}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P)$$

et le résultat connu ([4], p. 16)

$$\int_{F_\lambda} \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda(\Delta_P) = \text{const} = \frac{1}{d(F_\lambda)},$$

où $d(F_\lambda)$ est le diamètre transfini de l'ensemble F_λ, on trouve

$$\int_{F_\lambda} \left\{ \int_{F_\lambda} \frac{1}{PQ}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P) \right\} d\bar{\mu}_\lambda(\Delta_P) = \int_{F_\lambda} \frac{1}{d(F_\lambda)}\, d\mu_\lambda^*(\Delta_P) = \frac{1}{d(F_\lambda)},$$

et, par suite,

$$\gamma_\lambda = \frac{1}{d(F_\lambda)} - \lambda \int_F f(P)\, d\bar{\mu}_\lambda.$$

5. Une propriété du noyau F_λ. Désignons par $\varrho(z_0, F_\lambda)$ la distance du point z_0 à l'ensemble F_λ et soit F_0 un ensemble fermé ayant les propriétés suivantes:

1° $F_0 \subset F$,

2° $d(F_0) = d(F)$,

3° *K étant une sphère quelconque dont le centre est situé sur F_0, le diamètre transfini du proudit $F_0 K$ est positif.*

Je vais prouver le

THÉORÈME 2. *A chaque $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un nombre $\lambda(\varepsilon)$ tel que, pour tout point $z_0 \epsilon F_0$ et tout λ, $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$, on ait*

$$\varrho(z_0, F_\lambda) < \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $z_0 \epsilon F_0$ tel que la distance $\varrho(z_0, F_\lambda)$ ne tende pas vers zéro lorsque $\lambda \to 0$. Dans ce cas, tous les points de la suite triangulaire des points extrémaux

$$\{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où chaque P_k dépend de λ et de n, seraient situés sur une partie fermée E de F à une distance positive de z_0. Soit M et m la borne supérieure et inférieure de la fonction $f(P)$. Il résulte de (2) qu'on a

$$(13) \qquad v_{n\lambda} = \exp\left\{ -\sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{P_j P_k} + \lambda \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} [f(P_j) + f(P_k)] \right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{ Mn(n+1)\lambda - \min_{Q^{(n)} \epsilon E} \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{Q_j Q_k} \right\}.$$

D'autre part

$$(14) \qquad v_{n\lambda} = \max_{Q^{(n)} \epsilon F} \left\{ \exp\left[-\sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{Q_j Q_k} + \lambda \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} [f(Q_j) + f(Q_k)] \right] \right\}$$

$$\geqslant \exp\left\{ mn(n+1)\lambda - \min_{Q^{(n)} \epsilon F} \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{Q_j Q_k} \right\}.$$

D'après (13) et (14), on a

$$n(n+1)[M - m]\lambda \geqslant \min_{Q^{(n)} \epsilon E} \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{Q_j Q_k} - \min_{Q^{(n)} \epsilon F} \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{Q_j Q_k}.$$

Divisons par $2/n(n+1)$ et passons à la limite quand $n \to \infty$. On obtient l'inégalité suivante

$$2(M - m)\lambda \geqslant \frac{1}{d(E)} - \frac{1}{d(F)} > 0,$$

d'où il résulte que $\lambda > 0$ ne peut être arbitrairement petit.

6. Problème de Dirichlet pour le domaine D_λ. Désignons par D_λ le domaine non borné dont la frontière est l'ensemble F_λ et soit m_λ une masse répartie sur l'ensemble F_λ, dont le potentiel d'équilibre est égal à γ_λ presque partout[1]) dans F_λ. On a $m_\lambda = \gamma_\lambda d(F_\lambda)$. Désignons par $\bar{\mu}_\lambda^*$ la répartition d'équilibre de la masse m_λ sur F_λ et formons la fonction

$$\omega_\lambda(P) = \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} - \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{d\bar{\mu}_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ}.$$

THÉORÈME 3. *La fonction $\omega_\lambda(P)$ est la résolution du problème de Dirichlet généralisé pour le domaine D_λ avec la valeur $f(P)$ sur F_λ et 0 à l'infini.*

Démonstration. 1° Pour les points $P_0 \epsilon F_\lambda$, on a presque partout

$$(15) \qquad \omega_\lambda(P_0) = \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{P_0 Q} - \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{d\bar{\mu}_\lambda^*(\Delta_Q)}{P_0 Q} = f(P_0) + \frac{\gamma_\lambda}{\lambda} - \frac{\gamma_\lambda}{\lambda} = f(P_0).$$

De la semi-continuité inférieure du potentiel engendré par la masse positive résulte l'inégalité suivante

$$(16) \qquad \lim_{P \to P_0} \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} \geqslant \frac{1}{\lambda} \int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{P_0 Q}.$$

1) Nous convenons de dire „presque partout“ au lieu de „à l'exception d'un ensemble de diamètre transfini nul“.

D'autre part, on a dans tout l'espace

$$\frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\bar{\mu}_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} \leqslant \frac{\gamma_\lambda}{\lambda},$$

donc

$$\overline{\lim_{P\to P_0}} \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\bar{\mu}_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} \leqslant \frac{\gamma_\lambda}{\lambda}. \tag{17}$$

Il résulte de (15), (16) et (17) qu'on a

$$\underline{\lim_{P\to P_0}}\, \omega(P) \geqslant \underline{\lim_{P\to P_0}} \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} - \overline{\lim_{P\to P_0}} \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\bar{\mu}_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} \geqslant f(P_0). \tag{18}$$

2° On a presque partout dans F_λ

$$\lim_{\substack{P\to P_0\epsilon F_\lambda \\ P\epsilon D_\lambda}} \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\bar{\mu}_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} = \frac{\gamma_\lambda}{\lambda}.$$

D'autre part [4]

$$\overline{\lim_{\substack{P\to P_0\epsilon F_\lambda \\ P\epsilon F_\lambda}}} \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} \geqslant \overline{\lim_{\substack{P\to P_0\epsilon F_\lambda \\ P\epsilon D_\lambda}}} \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ},$$

on a donc presque partout dans F_λ

$$\overline{\lim_{\substack{P\to P_0\epsilon F_\lambda \\ P\epsilon D_\lambda}}}\, \omega_\lambda(P) \leqslant \overline{\lim_{\substack{P\to P_0\epsilon F_\lambda \\ P\epsilon F_\lambda}}} \frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} - \frac{\gamma_\lambda}{\lambda}.$$

Puisque

$$\frac{1}{\lambda}\int_F \frac{d\mu_\lambda^*(\Delta_Q)}{PQ} \leqslant f(P) + \frac{\gamma_\lambda}{\lambda}$$

dans F_λ, on obtient l'inégalité

$$\overline{\lim_{\substack{P\to P_0\epsilon F_\lambda \\ P\epsilon D_\lambda}}}\, \omega_\lambda(P) \leqslant f(P_0). \tag{19}$$

De (18) et (19) il résulte que presque partout dans F_λ, on a

$$\lim_{\substack{P\to P_0\epsilon F_\lambda \\ P\epsilon D_\lambda}} \omega_\lambda(P) = f(P_0). \tag{20}$$

3° La fonction $\omega_\lambda(P)$ est harmonique en dehors de l'ensemble F_λ et tend vers zéro quand $P\to\infty$. Lorsque $P\to P_0 \epsilon F_\lambda$, $P\epsilon D_\lambda$, la limite (20) existe pour les points $P_0 \epsilon F_\lambda$ presque partout. Par suite, $\omega_\lambda(P)$ est la solution du problème posé dans le théorème.

Publications citées

[1] G. Pólya et G. Szegö, *Über den transfiniten Durchmesser von ebenen und räumlichen Punktmengen*, Journ. de Crelle 165 (1931), p. 4-49.

[2] F. Leja, *Une généralisation de l'écart et du diamètre transfini d'un ensemble*, Ann. Soc. Polon. de Math. 22 (1949), p. 35-42.

[3] C. De la Vallée Poussin, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet*, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 2 (1932), p. 169-232.

[4] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Meddel. f. Lunds Univ. Mat. Sem. 3, p. 1-118.