О некоторых новых достижениях в комбинаторной топологии незамкнутых множеств

П. Александров (Москва)

Введение. Когда в докладе на Московской международной топологической конференции в 1935 году мною были сформулированы основные проблемы комбинаторной (гомологической) теории незамкнутых множеств, то было совсем не очевидно, что такая теория вообще существует, т. е. что столь обширный класс математических объектов, как всевозможные точечные множества евклидовых пространств допускает исследование методами комбинаторной топологии. Напомню соответствующее место своего доклада[1]).

„Значение и перспективы гомологической теории компактов основаны на том конкретном геометрическом познании, к которому нас привело понятие гомологии.

...Комбинаторной топологии некомпактных пространств в этом смысле не существует, и первый вопрос, который в связи с этим возникает — следующий: *Допускают ли вообще некомпактные пространства алгебраически-комбинаторное исследование в смысле теории гомологии?*

Положительный ответ на этот вопрос кажется мне, хотя и вероятным, но отнюдь не несомненным. Гипотетический положительный ответ означал бы прежде всего построение гомологической теории конечномерных пространств, т. е. практически говоря, точечных множеств евклидовых пространств, а именно

1. Теорию размерности этих множеств — в том[2]) направлении, как она построена сейчас для компактов.
2. Теоремы двойственности, или по крайней мере теоремы существования для зацепляющих циклов.
3. Теория непрерывных (повидимому, замкнутых) отображений.

Особенно теоремы двойственности являются решающими для плодотворности теории: *гомологическая теория без законов двойственности едва ли повела бы к важным новым познаниям.* Существуют ли для любого множества $M \subset R^n$ между M и $R^n \setminus M$ соотношения двойственности гомологического характера? — вот вопрос, имеющий решающее значение для всего дальнейшего развития теоретико-множественной топологии. Я воздерживаюсь пока от всяких предположений на этот счет. Может быть было бы целесообразно ставить этот вопрос сначала не в полной общности... Уже перенесение закона двойственности на случай F_σ- и G_δ-множеств, или установление невозможности такого перенесения было бы чрезвычайно важным".

Таким образом, в моем докладе 1935 г. была намечена вполне определенная программа. Сейчас можно сказать, что эта программа в ее основных чертах выполнена, причем в существенном это произошло за последние пять—шесть лет. Сомнения, высказывавшиеся мною, к счастью, не оправдались: комбинаторная топология незамкнутых множеств является в настоящее время сложившейся новой частью топологии; как всегда бывает при плодотворном развитии нового направления научной активности, решение первых, основных для данного направления задач, естественно вызвало к жизни новые вопросы, открывающие увлекательную перспективу дальнейших исследований.

Такое положение вещей достигнуто в несколько этапов. Прежде всего следует вспомнить о том, что основная теорема о нерве покрытия была освобождена от предположения компактности пространства Куратовским [13] в 1933 году и доказана методом, оказавшимся чрезвычайно плодотворным. Приблизительно в то же время Э. Чех положил понятие нерва покрытия в основу построению гомологической теории любых топологических пространств. Правда, гомологическая теория Чеха, основанная всецело на конечных покрытиях, не оказалась плодотворной при изучении некомпактных пространств, и в первую очередь незамкнутых множеств эвклидовых пространств, которыми мы только и будем заниматься в этом докладе.

Далее, Чогошвили [10], дав в 1945 году обобщение закона двойственности Понтрягина на (правда, очень специальный) класс незамкнутых множеств [10 а], с другой стороны далеко продвинул [10 б] систематическое исследование различных типов гомологических групп топологических пространств, и развил при этом весьма полезный алгебраический аппарат (прямые спектры бикомпактных групп, о чем мы будем говорить дальше).

Приблизительно в то же время (1946-1947) теорема об эквивалентности урысоновского и гомологического определения размерности была доказана мною [7 б] для всех незамкнутых множеств и даже для нормальных топологических пространств (аналог теоремы об ε-сдвигах и теорема о существенных отображениях были доказаны мною [7 а] еще в 1940 г.). В то же время Даукер (Dowker) [11] распространил на незамкнутые множества классификационную теорему Хопфа и вывел из нее новые следствия для теории размерности. Даукер и Хеммингсен (Hemmingsen) [12] показали законность привлечения бесконечных покрытий к теории размерности незамкнутых множеств.

* * *

[1]) Мат. Сборник, т. 1 (43), стр. 630.

[2]) Т. е. гомологическом.

В 1947 году мною была доказана в работе [1] первая общая теорема двойственности для любых множеств эвклидовых пространств и при доказательстве этой теоремы были применены также и алгебраические построения Чогошвили. В той же работе мною были исследованы широкие классы множеств, для которых закон двойственности сохраняет свою первоначальную форму, данную Л. С. Понтрягиным для замкнутых множеств[3]). Эти исследования были продолжены Мищенко [14] и никак не могут считаться законченными.

Решительный сдвиг во всей комбинаторной топологии незамкнутых множеств произошел в 1951 году, когда Ситников [2] доказал свой закон двойственности, столь же общий, но более сильный чем доказанная мною теорема.

Одновременно Ситников решает [3, a, б] и основную проблему теории размерности незамкнутых множеств, давая характеристику размерности незамкнутого множества через локально-гомологические свойства дополнительного множества, т. е. доказывая для незамкнутых множеств „теоремы о препятствиях". Любопытно, что доказательство этой теоремы, как и других теорем Ситникова, характеризующих размерность незамкнутых множеств, не опирается на гомологическое определение самой размерности (т. е. на доказанную мною [7] теорему о совпадении для любых незамкнутых множеств урысоновской и гомологической размерности), но дает новые геометрические определения урысоновской размерности — деформационного и гомологического характера.

§ 1. Ставя себе в этом докладе задачу охарактеризовать представляющиеся мне основными успехи в развитии комбинаторной топологии незамкнутых множеств, я хочу начать именно с общей теоремы о препятствиях Ситникова.

Теоремы о препятствиях в теории размерности формулируются для различных классов множеств всегда одним и тем же, а именно следующим образом:

Если $A \subset R^n$ *и размерность множества* A *равна* r, *то существует в* R^n *открытый шар* U^n, *обладающий тем свойством, что в* $U^n \setminus A$ *содержится цикл* z^{n-r-1} *размерности* $n-r-1$, *не гомологичный нулю в* $U^n \setminus A$; *с другой стороны, при* $q < n-r-1$ *и любом выборе шара* U^n *всякий лежащий в* $U^n \setminus A$ *цикл размерности* q *гомологичен в* $U^n \setminus A$ *нулю.*

Первая теорема этого рода доказана мною в 1932 году, в работе [8] для замкнутых множеств. При этом под циклом в $U^n \setminus A$ можно было понимать полиэдральные циклы, или циклы, лежащие на компактах $\Phi \subset U^n \setminus A$; если под размерностью понимать обычную урысоновскую размерность, то циклы и гомологии в $U^n \setminus A$ — целочисленные. В частности, если размерность замкнутого множества A равна $n-1$, то при надлежащем выборе шара U^n в $U^n \setminus A$ содержится не ограничивающий там нульмерный цикл, что означает (так как речь идет о полиэдральных цикла), что открытое множество $U^n \setminus A$ несвязно. Таким образом, среди всех замкнутых множеств, множества размерности $n-1$ характеризуются тем что они во-первых, не содержат внутренних по отношению к R^n точек и во-вторых, — разбивают некоторый шар $U^n \subset R^n$ или, как говорят, локально разбивают пространство R^n.

[3]) В связи с моей работой [1] следует еще упомянуть о работе Каплана [9], в которой доказываются некоторые интересные результаты, касающиеся гомологических свойств незамкнутых множеств, однако в отношении двойственности доказывается лишь равенство чисел Бетти надлежащих размерностей для взаимно дополнительных множеств, т. е. делается то, что для замкнутых множеств было сделано еще в 1927 году (см. напр. [3]). Никакой теоремы двойственности в современном смысле слова, т. е. теоремы, касающейся групп Бетти, а не их рангов, Каплан не доказывает.

Общая ситниковская теорема о препятствиях касается совершенно произвольных множеств в R^n и формулируется в точности так, как сказано выше; однако циклы и гомологии понимаются теперь в новом смысле, а именно в следующем. Под *r-мерным циклом* какого-либо множества $B \subset R^n$ Ситников понимает последовательность

$$z^r = \begin{pmatrix} z_1^r & z_2^r & \dots z_k^r & \dots \\ x_1^{r+1} & x_2^{r+1} & \dots x_k^{r+1} & \dots \end{pmatrix},$$

лежащих на некотором компакте $\psi \subseteq B$ ε_k-циклов z_k^r и ε_k-цепей x_k^{r+1}, $\varepsilon_k \to 0$, удовлетворяющих условиям $\Delta x_k^{r+1} = z_{k+1}^r - z_k^r$. Цикл z^r по определению *гомологичен нулю* („ограничивает") в B, если на некотором компакте ψ', $\psi \subseteq \psi' \subseteq B$, существуют ε'_k-цепи y_k^{r+1}, x_k^{r+2} ($\varepsilon'_k \to 0$), такие, что

$$\Delta y_k^{r+1} = z_k^r, \qquad \Delta x_k^{r+2} = y_{k+1}^{r+1} - y_k^{r+1} - x_k^{r+1}.$$

Заметим, чтобы не возвращаться к этому в дальнейшем, что *фактор-группа* $Z^r B - H^r B$ *группы* $Z^r B$ *всех r-мерных ситниковских циклов множества* B *по подгруппе ограничивающих циклов есть r-мерная ситниковская* Δ-группа $\Delta^r B$ множества B; если область коэффициентов бикомпактна (точнее, есть группа, допускающая бикомпактную топологию), то ситниковская группа изоморфна обычной группе Бетти „с компактными носителями" множества B, группе, которую мы будем обозначать через $\Delta_c^r B$[4]).

[4]) Группа $\Delta_c^r B$ есть фактор-группа группы $Z_c^r B$ всех циклов множества B с компактными носителями по подгруппе $H_c^r B$ циклов, компактно ограничивающих в B; при этом под *циклом с компактным носителем* в B понимается последовательность $z_\psi^r = (z_1^r, z_2^r, \dots, z_k^r, \dots)$ ε_k-циклов, $\varepsilon_k \to 0$, лежащих на некотором компакте $\psi \subseteq B$ и удовлетворяющих условию: к каждому $\varepsilon > 0$ существует такое h_ε, что для всех $h \geqslant h_\varepsilon$ цикл z_h^r ε-гомологичен на ψ всякому z_{h+k}^r; цикл $z^r = \{z_k^r\}$ компактно ограничивает в B, если существует компакт ψ', $\psi \subseteq \psi' \subseteq B$ и на нем ε'_k-цепи x_k^{r+1} ($\varepsilon'_k \to 0$) ограниченные соответственно циклами z_k^r. Другими словами, циклы и гомологии с компактными носителями — это так называемые *вьеторисовские циклы и вьеторисовские гомологии в* B.

Вернёмся к ситниковской теореме о препятствиях. Итак, она касается любых множеств $A\subset R^n$, и утверждает, что при $\dim A=r$ существует шар $U^n\subset R^n$ и в нем целочисленный ситниковский $(n-r-1)$-мерный цикл z^{n-r-1}, лежащий в $U^n\setminus A$ и не ограничивающий (также в ситниковском смысле) во множестве $U^n\setminus A$; с другой стороны, каков бы ни был шар $U^n\subset R$, при $q<n-r-1$ всякий ситниковский цикл размерности q (по любой области коэффициентов), лежащий в $U^n\setminus A$, ограничивает в $U^n\setminus A$.

При доказательстве этого предложения, принадлежащего к самым глубоким и трудным предложениям современной топологии, применяется следующая теорема [3a], представляющая и самостоятельный интерес:

Деформационная теорема. *Пусть в n-мерном пространстве R^n даны: произвольное множество A и ситниковский цикл z, лежащий на некотором компакте $\psi\subseteq B=R^n\setminus A$; пусть $g=\{g_\theta\}$ и $h=\{h_\theta\}$* $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$ *суть, соответственно, деформации множеств A и ψ, причем g_0A и $h_0\psi$ не имеют общих точек ни при каком значении θ. Тогда, если цикл h_1z гомологичен нулю в $R^n\setminus g_1A$, то и $z\sim 0$ в $R^n\setminus A$* (гомологии всё время в ситниковском смысле).

Займемся специально случаем $(n-1)$ мерных множеств пространства R^n. Из ситниковской общей теоремы о препятствиях вытекает, что для $(n-1)$-мерного $A\subset R^n$ существует при некотором выборе шара U^n нульмерный цикл, лежащий в $U^n\setminus A$ и не гомологичный в $U^n\setminus A$ нулю. Но ситниковские нульмерные циклы (как впрочем и обыкновенные нульмерные циклы с компактными носителями), лежащие в каком либо множестве, не сводятся к парам точек. Поэтому из наличия в $U^n\setminus A$ не гомологичного нулю нульмерного цикла еще не следует существование в $U^n\setminus A$ пары точек, которую нельзя связать в $U^n\setminus A$ континуумом. Скажем (напоминая давно известное понятие) что множество A *разрезает* шар U^n, если в $U^n\setminus A$ существует пара точек, не принадлежащая никакому лежащему в $U^n\setminus A$ континууму. Тогда следующий вопрос (восходящий ещё к Урысону) по прежнему остается нерешенным:

Всякое ли $(n-1)$-мерное множество $A\subset R^n$ разрезает некоторый лежащий в R^n шар U^n?

Задача дать тот или иной ответ на этот вопрос представляется мне одной из основных задач в теории размерности незамкнутых множеств [5]).

Простым следствием одной теоремы Мазуркевича (Mazurkiewicz) является следующая

Теорема. *Пусть в R^n лежат попарно непересекающиеся непустые замкнутые множества $A_1,A_2,\ldots,A_\nu,\ldots$ со всюду плотной суммой $A=\bigcup\limits_\nu A_\nu$.*

Тогда дополнительное множество $B=R^n\setminus A$ имеет размерность $n-1$.

[5]) (Примечание при чтении корректуры). Отрицательный ответ на вопрос получен К. Ситниковым в самое последнее время и опубликован в Докладах Академии Наук СССР 94 (6), (1954), стр. 1007-1011.

Эта теорема приводит Ситникова [3в] к построению следующего весьма интересного двумерного множества B, лежащего в трехмерном пространстве.

Рассмотрим для каждого $\nu=1,2,3,\ldots$ совокупность кубов, на которые трехмерное пространство R^3 разбивается всеми плоскостями $x=p/\nu$, $y=q/\nu$, $z=r/\nu$, где p,q,r пробегают независимо друг от друга все целые значения. Сумму ребер всех этих кубов при данном ν обозначим через K_ν. Положим теперь $Q_1=K_1$ и сдвинем бесконечный одномерный полиэдр K_2 как твердое тело таким образом, чтобы сдвинутый полиэдр — обозначим его через Q_2 — находился в общем положении с Q_1, т. е. не пересекался с Q_1. Точно так же, сдвинем полиэдр K_3, как твердое тело, в полиэдр Q_3, не пересекающийся с $Q_1\cup Q_2$ и т. д. Получим последовательность попарно не пересекающихся бесконечных одномерных полиэдров $Q_1,Q_2,\ldots,Q_\nu,\ldots$, сумма которых есть очевидно всюду плотное в R^3 множество A типа F_σ. Дополнительное множество B, будучи на основании только что сформулированной теоремы двумерным, в то же время при любом $\varepsilon>0$ может быть посредством ε-сдвига переведено в одномерный полиэдр (это следует из того, что $B\subset R^3\setminus Q_\nu$ при любом ν, и что $R^3\setminus Q_\nu$ переходит посредством $1/\nu$-сдвига в одномерный полиэдр).

Итак, *существует двумерное множество в трехмерном пространстве, которое сколь угодно малым сдвигом может быть переведено в одномерный полиэдр.* Перенося аналогичное построение в n-мерное пространство, можно получить $(n-1)$-мерное множество в R^n, допускающее сколь угодно малые сдвиги в полиэдры размерности $[n/2]$. *Вопрос о дальнейшем понижении размерности остается открытым.*

В связи с этим примером Ситников доказывает, что r-мерное множество $A\subset R^n$, имеющее r-мерное замыкание не может быть сколь угодно малым сдвигом переведено в полиэдр (а значит, вообще во множество) размерности $<r$.

В свете этих результатов особый интерес приобретает следующая даваемая Ситниковым [3в] новая характеристика размерности незамкнутых множеств посредством непрерывных деформаций:

Теорема. *Пусть в R^n дано произвольное r-мерное множество A. Тогда, каково бы ни было открытое в R^n множество Γ, множество $\Gamma\cap A$ можно внутри Γ продеформировать в (бесконечный) r-мерный полиэдр* [6]) *так, что эта деформация затухает при приближении к границе Γ. С другой стороны, существует такой шар U^n, что множество $U^n\cap A$ нельзя продеформировать внутри U^n в $(r-1)$-мерный полиэдр так, чтобы эта деформация затухала при приближении к границе шара U^n.*

На данной Ситниковым гомологической характеристике размерности посредством ∇-циклов взятых на бесконечных покрытиях я, за недостатком места, здесь останавливаться не буду.

[6]) Точное определение полиэдра дается в начале следующего параграфа.

§ 2. Перехожу к другому кругу вопросов: к теоремам инвариантности и двойственности для различных типов гомологических групп („групп Бетти") незамкнутых множеств и к лежащей в основе этих теорем очень простой и может быть несколько неожиданной геометрической теореме (теорема 1). Всё, о чем я буду говорить, по существу содержится в [1], § 3 и в [2].

Мы будем рассматривать конечные и бесконечные комплексы K, элементами которых являются попарно не пересекающиеся открытые симплексы, лежащие в n-мерном сферическом пространстве S^n. Всегда будут предполагаться выполненными условия полноты (грань какого-либо симплекса $t \in K$ сама есть элемент K)[7]. Точечное множество, являющееся суммой всех элементов комплекса K называется, как известно, *телом* этого комплекса и обозначается через $\tilde{K}$. Полный комплекс K называется *триангуляцией*, если каждая точка его тела имеет окрестность (относительно S^n), пересекающуюся лишь с конечным числом элементов комплекса K. Тела триангуляций называются *полиэдрами*. Полиэдры являются всегда локально-компактными пространствами; среди них компактны лишь конечные полиэдры (тела конечных триангуляций).

Легко видеть, что тела открытых подкомплексов триангуляций K открыты в полиэдре $\tilde{K}$. В частности, открытыми множествами полиэдра $\tilde{K}$ являются все открытые звезды его элементов (т. е. тела звезд $O_K t$ элементов $t \in K$); при этом *главными звездами* триангуляции K будем называть открытые звезды вершин этой триангуляции.

Известным фактом является так называемая *теорема Рунге* ([4], стр. 143), утверждающая, что всякое открытое в S^n множество есть полиэдр. Нам понадобится следующее усиление этой теоремы, доказательство которого приведено в [1], стр. 186, и при всей его кропотливости не представляет затруднений:

Пусть в S^n дана произвольная система $\mathfrak{S}$ открытых множеств. Существует такая триангуляция суммы этих открытых множеств, что каждая открытая звезда этой триангуляции содержится по крайней мере в одном открытом множестве системы $\mathfrak{S}$.

Напомним, наконец, следующее определение, сформулированное в [1], § 3, и имеющее основное значение во всех современных исследованиях по топологии незамкнутых множеств: триангуляция K_β называется *следующей за триангуляцией* K_α (что будем записывать просто: $\beta > \alpha$), если каждый симплекс $t \in K_\beta$ лежит на некотором (очевидно единственном) симплексе триангуляции K_α (на своем *носителе* в K_α). Это понятие следования позволяет рассматривать всякое множество триангуляций (лежащих в данном S^n) как частично

[7]) Однако, мы будем рассматривать и подкомплексы полного комплекса, не удовлетворяющие условию полноты, а именно открытые подкомплексы $G \subset K$ (в которых, вместе с произвольным симплексом t, содержится и всякий симплекс $t' \in K$, имеющий симплекс t одной из своих граней).

упорядоченное. В частности, мы будем рассматривать направленные[8]) множества триангуляций, предполагая (если не оговорено противное), что отношение порядка между триангуляциями, являющимися элементами этого множества, есть именно то отношение порядка („следования"), которое мы только что определили.

Если триангуляция K_β следует за триангуляцией K_α, то ставя в соответствие каждому симплексу $t \in K_\beta$ его носитель в K_α, получим отображение комплекса K_β в комплекс K_α называемое *естественной* или *геометрической проекцией*[9]) $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ комплекса K_β в K_α. Заметим, что эти проекции обладают свойством транзитивности: если $\gamma > \beta > \alpha$, то $\tilde{\omega}_\alpha^\gamma = \tilde{\omega}_\alpha^\beta \tilde{\omega}_\beta^\gamma$.

Ставя в соответствие каждой вершине $e_\beta \in K_\beta$ какую-нибудь вершину $\sigma_\alpha^\beta e_\beta$ носителя $\tilde{\omega}_\alpha^\beta e_\beta \in K_\alpha$ вершины e_β, получим симплициальное отображение — *естественный сдвиг* комплекса K_β в K_α; два различных естественных сдвига являются комбинаторно близкими симплициальными отображениями в том смысле, что образы любого симплекса t_β при двух различных сдвигах являются гранями одного и того же симплекса — носителя симплекса t_β в K_α.

Определение. *Всякое направленное множество триангуляций, лежащих в данном S^n, вместе с геометрическими проекциями этих триангуляций, называется геометрическим спектром в данном S^n.*

Заметим, что всякая конфинальная часть геометрического спектра сама, очевидно, является геометрическим спектром.

Приведем несколько примеров геометрических спектров.

1° Пусть дано произвольное множество A. *Полным геометрическим спектром* множества A называется геометрический спектр, элементами которого являются все триангуляции, покрывающие множество A (в том смысле, что их тела содержат множество A).

2° Если A — компакт, то в полном геометрическом спектре множества A конечные комплексы образуют конфинальную часть.

3° Если A — полиэдр, то все триангуляции этого полиэдра образуют конфинальную часть его полного геометрического спектра; эти триангуляции конечны.

Переходим к чрезвычайно важному понятию *канонических триангуляций* и *канонических покрытий*[10]).

[8]) *Направленным множеством* называется, как известно, такое частично упорядоченное множество, в котором ко всяким двум элементам имеется третий элемент, следующий за данными двумя.

[9]) Комплексы суть множества симплексов; речь идет, очевидно, об отображении одного такого множества в другое.

[10]) Под *покрытием* множества A понимаем всегда систему открытых в A подмножеств множества A, дающих в сумме всё множество A. Мы будем рассматривать (не оговаривая этого в дальнейшем) лишь *звездно-конечные покрытия*, т. е. такие покрытия, в которых каждый элемент пересекается лишь с конечным числом элементов того же покрытия.

Говорим, что *покрытие β следует за покрытием α* если β вписано в α, т. е. если каждый элемент покрытия β содержится в некотором элементе покрытия α.

Триангуляция называется *канонической* (относительно множества A), если она покрывает множество A и если каждый ее главный симплекс[11]) содержит хотя бы одну точку множества A. Легко видеть, что каждая каноническая триангуляция K_α является нервом некоторого покрытия множества A, а именно покрытия, элементами которого являются пересечения главных звезд триангуляции K_α с множеством A. Такие покрытия называются *каноническими покрытиями* множества A.

Имеют место следующие факты, доказанные в [1], § 3:

а. Всякая триангуляция, покрывающая множество A, содержит в качестве подкомплекса некоторую каноническую триангуляцию[12]), так что канонические относительно множества A триангуляции образуют конфинальную часть полного геометрического спектра множества.

Рассмотрим теперь множество всех канонических покрытий как подмножество направленного множества всех покрытий множества A. Из упомянутой выше так называемой усиленной теоремы Рунге сразу же вытекает:

б. Множество всех канонических покрытий множества A является конфинальной частью направленного множества всех покрытий множества A.

Пусть каноническая триангуляция K_β следует за канонической триангуляцией K_α. При всяком естественном сдвиге K_β в K_α звезда какой либо вершины $e_\beta \in K_\beta$ отображается в звезду образа вершины e_β в K_α. Отсюда следует:

в. Если рассматривать канонические триангуляции как нервы соответствующих канонических покрытий, то естественные сдвиги этих триангуляций оказываются обычными проекциями[13]) нервов.

И наконец — последнее замечание: каждый (бесконечный) полиэдр является ретрактом некоторой своей окрестности, которую можно выбрать произвольно тесной. Отсюда вытекает: тело каждой канонической триангуляции, возникшей посредством выметания некоторой триангуляции данной окрестности λ множества A, является ретрактом некоторой окрестности $\lambda' \subseteq \lambda$ множества A.

[11]) *Главным симплексом* какого-либо комплекса называется симплекс этого комплекса, не являющийся собственной гранью никакого симплекса того же комплекса.

[12]) В самом деле, пусть K данная триангуляция, покрывающая множество A; назовем *лишним симплексом триангуляции* K всякий главный симплекс этой триангуляции, не содержащий никакой точки множества A. Удаляя из K все лишние симплексы, получим триангуляцию $K_1 \subseteq K$. Удаляя из K_1 все лишние симплексы, получим триангуляцию K_2, и т. д. При этом всякий лишний симплекс комплекса K_1 является собственной гранью некоторого лишнего симплекса комплекса K. Поэтому процесс перехода от K к K_1, от K_1 к K_2, и т. д. („процесс выметания") обрывается после конечного числа шагов на канонической триангуляции K_ζ. Этот однозначно определенный множеством A и покрывающей его триангуляцией K комплекс K_ζ мы будем, когда нужно, обозначать через $\sigma(K, A)$.

[13]) Если покрытие β следует за покрытием α то, ставя в соответствие каждому элементу β какой-либо содержащий его элемент α, получаем симплициальное отображение нерва β в нерв α, называемое *проекцией*.

Подводя итоги всему сказанному, получаем следующий результат:

Теорема 1. *В направленном множестве всех триангуляций, покрывающих данное множество A („в полном геометрическом спектре множества A") существует конфинальная часть, состоящая из канонических триангуляций, которая является вместе с тем конфинальной частью направленного множества нервов всех покрытий множества A; при этом, если каноническая триангуляция K_β следует за канонической триангуляцией K_α, то соответствующее каноническое покрытие β вписано в каноническое покрытие α и естественный сдвиг K_β в K_α порождает обычную проекцию нерва β в нерв α.*

Тело каждой канонической триангуляции является ретрактом некоторой окрестности множества A, причем эти окрестности могут быть выбраны так, что их совокупность будет составлять конфинальную часть направленного (по включению) множества всех окрестностей множества A.

§ 3. Предположим, что для каждого звездно конечного комплекса K, в частности, для каждой триангуляции, определена некоторая группа $X(K)$, причем предполагается, что при симплициальном отображении комплекса K_β в комплекс K_α либо $X(K_\beta)$ гомоморфно отображается в $X(K_\alpha)$ — в этом случае мы будем говорить, что группа $X(K)$ есть группа Δ-типа, либо $X(K_\alpha)$ гомоморфно отображается в $X(K_\beta)$ — тогда говорим, что $X(K)$-группа ∇-типа. В обоих случаях предполагается, что комбинаторно-близкие отображения порождают один и тот же гомоморфизм.

В этих предположениях, рассматривая группы $X(K)$ для всех триангуляций K, покрывающих данное множество A мы получим (в Δ-случае обратный, а в ∇-случае прямой) спектр групп, предельная группа которого „внешняя X-группа множества A", обозначаемая через $X_{\text{ext}}A$, в силу теоремы 1 изоморфна предельной группе $X(A)$ соответствующего спектра X-групп, построенных для нервов всевозможных покрытий множества A; группу $X(A)$ естественно назвать *истинной X-группой* множества A. Итак, имеет место[14])

Теорема 2 (общая теорема инвариантности). *Внешняя X-группа множества A изоморфна истинной X-группе этого множества и поэтому является топологическим инвариантом множества A.*

Предположим теперь, что группы $X(K)$ обладают свойством „комбинаторной инвариантности", т. е. что имеет место следующее предложение: Если триангуляция K_β есть подразделение (в обычном элементарном смысле)

[14]) Можно в случае групп Δ-типа дополнительно поставить условие их бикомпактности и потребовать непрерывность связывающих их гомоморфизмов. Тогда только что определенные предельные группы также будут бикомпактными и изоморфизм, утверждаемый теоремой 2, будет топологическим.

триангуляции K_α, то всякий естественный сдвиг комплекса K_β в K_α порождает изоморфное отображение группы $X(K_\beta)$ в $X(K_\alpha)$, (соотв. $X(K_\alpha)$ и $X(K_\beta)$).

Из общей теоремы инвариантности и того, что было раньше сказано о геометрических спектрах полиэдров, легко вытекает предложение:

Если группы $X(K)$ обладают свойством комбинаторной инвариантности, то они обладают и свойством топологической инвариантности, т. е. для любой триангуляции K полиэдра $A=\widetilde{K}$ группы $X(K)$ изоморфны группам $X(A)$.

Если группы $X(K)$ обладают свойством комбинаторной (и значит топологической) инвариантности, то для них определены, в $\varDelta$-случае, гомоморфизмы вложения, а в ∇-случае, гомоморфизмы высечения: если $P_\beta=\widetilde{K}_\beta$ и $P_\alpha=\widetilde{K}_\alpha$ суть полиэдры, причем $P_\beta \subseteq P_\alpha$, то всегда можно предположить, что триангуляция K_β следует за триангуляцией K_α; тогда естественный сдвиг K_β в K_α и порождает в $\varDelta$-случае гомоморфизм группы $X(K_\beta)$ в $X(K_\alpha)$ (гомоморфизм вложения) [и в ∇-случае гомоморфизм $X(K_\alpha)$ в $X(K_\beta)$ (гомоморфизм высечения).

Предположим, наконец, что группы $X(K)$ обладают, кроме свойства комбинаторной инвариантности, еще и инвариантностью при ретрагировании полиэдра на полиэдр. Мы потребуем даже немного больше, а именно — выполнение следующего условия:

Пусть даны полиэдры $P_\beta \subseteq Q_\beta$, $P_\alpha \subseteq Q_\alpha$, причем Q_β ретрагируется на P_β, а Q_α на P_α; пусть $P_\beta \subseteq P_\alpha$, $Q_\beta \subseteq Q_\alpha$. Тогда мы требуем, чтобы ретрагирующие отображения Q_β на P_β и Q_α на P_α порождали изоморфизмы X-групп, коммутирующие с *натуральными гомоморфизмами* (т. е. гомоморфизмами вложения, соотв. высечения) этих групп.

В этих условиях мы можем дополнить теорему инвариантности следующим предложением:

Добавление к общей теореме инвариантности. Если группы $X(K)$ обладают комбинаторной инвариантностью и инвариантностью при ретрагировании, то X — группа множества A изоморфна окрестностной X-группе множества A, т. е. предельной группе спектра X-групп всевозможных окрестностей множества A, связанных между собою гомоморфизмами вложения (в $\varDelta$-случае) и высечения (в ∇-случае).

Среди гомологических групп комплексов две наиболее важные удовлетворяют всем перечисленным условиям, включая инвариантность при ретрагировании: это группы $\varDelta^r(K,\mathfrak{A})$ и $\nabla^r(K,\mathfrak{B})$, где область коэффициентов $\mathfrak{A}$ есть дискретная группа (т. е. группа, рассматриваемая без топологии), а $\mathfrak{B}$ — бикомпактная группа[15]). При этом $\varDelta^r(K,\mathfrak{A})$ есть $\varDelta$-группа Бетти, основанная на

[15]) Все рассматриваемые в дальнейшем группы коммутативны; через $\mathfrak{A}$ мы всегда обозначаем дискретные, а через $\mathfrak{B}$ бикомпактные группы; если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ рассматриваются одновременно, то обычно предполагается, что они двойственны между собою в смысле Понтрягина, что записывается так: $\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{B}$.

рассмотрении лишь конечных цепей комплекса K. Группа $\nabla^r(K,\mathfrak{B})$ есть ∇-группа, основанная на рассмотрении бесконечных ∇-циклов. При этих обозначениях группы $\nabla^r(K,\mathfrak{B})$ и $\varDelta^r(K,\mathfrak{A})$ двойственны между собою:

$$\varDelta^r(K,\mathfrak{A})\,|\,\nabla^r(K,\mathfrak{B}).$$

Так как группа $\varDelta^r(K,\mathfrak{A})$ очевидно инвариантна по отношению к ретрагированию, и гомоморфизмы, испытываемые группами $\varDelta^r(K,\mathfrak{A})$ и $\nabla^r(K,\mathfrak{B})$ при каком-либо симплициалном отображении, являются сопряженными, то группа $\nabla^r(K,\mathfrak{B})$ также инвариантна при ретрагировании.

Этим обстоятельством мы существенно воспользуемся в следующем параграфе.

§ 4. Существуют два способа перенесения основных гомологических понятий на случай незамкнутых множеств. Первый из них заключается в рассмотрении компактов, содержащихся в данном незамкнутом множестве и в рассмотрении, в связи с этим, циклов и гомологий „с компактными носителями”. Второй способ заключается в том, что гомологическая теория множества строится как гомологическая теория системы нервов всевозможных покрытий этого множества с установленным выше отношением порядка между ними.

Рассмотрим сначала первый способ. Пусть B произвольное множество в S^n. Множество всех компактов $\Psi \subseteq B$ частично упорядочено по включению и является направленным множеством. При этом, если $\Psi \subset \Psi'$, то тождественное отображение Ψ в Ψ' порождает, как известно, гомоморфизм вложения $E^{\psi}_{\psi'}$, отображающий $\varDelta^r(\Psi,\mathfrak{B})$ в $\varDelta^r(\Psi',\mathfrak{B})$ и сопряженный ему гомоморфизм высечения $I^{\psi'}_{\psi}$, отображающий $\nabla^r(\Psi',\mathfrak{A})$ в $\nabla^r(\Psi,\mathfrak{A})$ (см., например, [1], стр. 181). Таким образом получаем два сопряженных между собою спектра:

$$\{\varDelta^r(\Psi,\mathfrak{B});E^{\psi}_{\psi'}\},\qquad \{\nabla^r(\Psi,\mathfrak{A}),I^{\psi'}_{\psi}\},$$

предельные группы которых суть: ранее определенная нами *группа* $\varDelta^r_c(B,\mathfrak{B})$ и *группа* $\nabla^r_c(B,\mathfrak{A})$ — это $\varDelta$- и ∇-*группы множества* B *с компактными носителями.*

Как упоминалось в предыдущем[16]), Ситников [2] видоизменил понятие компактного цикла и компактной гомологии, и пришел таким образом к своим группам $\varDelta^r(B,\mathfrak{A})$ — по любой области коэффициентов[17]).

Переходим к гомологической теории, основывающейся на покрытиях. Она имеет два варианта. Первый, данный мною ещё в 1928 г. в [5] и впоследствии

[16]) § 1, стр. 71.

[17]) Топология в группе коэффициентов для ситниковских групп значения не имеет, поэтому группу коэффициентов в данном случае естественно считать без топологии, т. е. дискретной.

разработанный Чехом [6], пользуется лишь конечными покрытиями, второй исходит из бесконечных звездно-конечных покрытий [18]).

Построенная на основе конечных покрытий гомологическая теория данного множества совпадает с гомологической теорией максимального („чеховского") бикомпактного расширения этого множества и, как я показал в [7б], приводит к определению гомологической размерности, совпадающей с урысоновской (при надлежащем выборе области коэффициентов — а именно, непрерывной циклической группы K в Δ-случае и группы целых чисел в ∇-случае). Этот факт тем более замечателен, что сами группы Бетти, основанные на конечных покрытиях незамкнутых множеств в S^n не соответствуют наглядным требованиям, которые естественно предъявлять к определению групп Бетти.

Теперь мы будем под покрытием какого-либо множества $A \subset S^n$ всегда понимать звездно-конечное (счетное) покрытие. Если покрытие β вписано в покрытие α, то естественно определяющиеся в таком случае симплициальные отображения („проекции") нерва β в нерв α ставят в соответствие каждой конечной цепи нерва β конечную же цепь нерва α; что же касается сопряженного гомоморфизма, то он ставит в соответствие каждой бесконечной цепи нерва α бесконечную цепь нерва β, причем конечная цепь нерва α переходит, вообще говоря, в бесконечную. Отсюда следует, что *для получения обратного спектра Δ-групп надо брать конечные циклы и вообще конечные цепи, а для получения прямого спектра ∇-групп — бесконечные цепи.*

Итак, рассмотрим группы $\Delta^r(\alpha, \mathfrak{A})$ для нервов всевозможных покрытий α множества A; они образуют обратный спектр, предельная группа которого есть дискретная группа, обозначаемая через $\delta^r(A, \mathfrak{A})$. Пусть теперь A и B произвольные взаимно-дополнительные множества в S^n, а p и q неотрицательные целые числа с суммой $p+q=n-1$. В силу общей теоремы инвариантности, группа $\delta^p(A, \mathfrak{A})$ изоморфна соответствующей „окрестностной" группе. т. е. предельной группе $D^p(A, \mathfrak{A})$ обратного спектра $\{\Delta^p(\lambda, \mathfrak{A}), E_\lambda^{\lambda'}\}$, где $\lambda, \lambda', \ldots$ суть всевозможные окрестности множества A, и $E_\lambda^{\lambda'}$ — гомоморфизм вложения [19]). Но

$$\Delta^p(\lambda, \mathfrak{A}) \mid \Delta^q(\Psi, \mathfrak{B}) \mid \nabla^q(\Psi, \mathfrak{A}),$$

где $\Psi = S^n \setminus \lambda \subset \Psi' = S^n \setminus \lambda'$; гомоморфизмы вложения $E_{\psi'}^{\psi}$ групп $\Delta^q(\Psi, \mathfrak{B})$ (как групп характеров групп $\Delta^p(\lambda, \mathfrak{A})$) и $\nabla^q(\Psi, \mathfrak{A})$ очевидно сопряжены как гомоморфизмам вложения $E_\lambda^{\lambda'}$ групп $\Delta^p(\lambda, \mathfrak{A})$ так и гомоморфизмам высечения $I_\psi^{\psi'}$ групп $\nabla^q(\Psi, \mathfrak{A})$. Поэтому спектр $\{\nabla^q(\Psi, \mathfrak{A}), I_\psi^{\psi'}\}$ (по всем компактам $\Psi \subseteq B$) имеет предельную группу $\nabla^q(B, \mathfrak{A})$, изоморфную предельной группе спектра $\{\Delta^p(\lambda, \mathfrak{A}), E_\lambda^{\lambda'}\}$, т. е. группе $\delta^p(A, \mathfrak{A})$; итак:

Группы $\delta^p(A, \mathfrak{A})$ и $\nabla_c^q(B, \mathfrak{A})$ изоморфны между собой.

Это и есть общая теорема двойственности, доказанная мною в [1].

Но можно отправляться не от групп $\Delta^p(\alpha, \mathfrak{A})$, а от двойственных им групп $\nabla^p(\alpha, \mathfrak{B})$. Это дает нам для канонического α и ретрагирующейся на его нерв окрестности λ_α, $\Psi_\alpha = S^n \setminus \lambda_\alpha$ топологический изоморфизм

$$\nabla^p(\alpha, \mathfrak{B}) = \nabla^p(\lambda_\alpha, \mathfrak{B}),$$

представляющий собою лишь другую запись двойственности

$$\Delta^p(\lambda_\alpha, \mathfrak{A}) \mid \Delta^q(\Psi_\alpha, \mathfrak{B}).$$

Рассматривая прямой спектр $\{\nabla^p(\lambda, \mathfrak{B}), I_{\lambda'}^{\lambda}\}$ или, что ведет к той же предельной группе, прямой спектр $\{\Delta^q(\Psi, \mathfrak{B}), E_{\lambda'}^{\lambda}\}$, в которых мы берем группы $\nabla^p(\lambda, \mathfrak{B})$, $\Delta^q(\Psi, \mathfrak{B})$ без топологии, заключаем, что *предельная группа*

$$\nabla^p(A, \mathfrak{B}) = \varinjlim \nabla^p(\alpha, \mathfrak{B}) = \varinjlim \nabla^p(\lambda, \mathfrak{B})$$

изоморфна предельной группе

$$\Delta^q(B, \mathfrak{B}) = \varinjlim \Delta^q(\Psi, \mathfrak{B}),$$

что дает нам для области коэффициентов $\mathfrak{B}$, допускающей бикомпактную топологию, теорему двойственности Ситникова:

Группы $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$ и $\Delta_c^q(B, \mathfrak{B})$ изоморфны между собою [20]).

§ 5. Теорема двойственности Ситникова по бикомпактной области коэффициентов и доказанная мною теорема являются предложениями, как бы взаимными: в доказанной мною теореме утверждается изоморфизм между группами $\delta^p(A, \mathfrak{A})$ и $\nabla_c^q(B, \mathfrak{A})$ (слева — конечные Δ-циклы на покрытиях, справа — ∇-группы с компактными носителями); в теореме Ситникова утверждается изоморфизм групп $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$ и $\Delta_c^q(B, \mathfrak{B})$ (слева — бесконечные ∇-циклы на покрытиях, справа — Δ-группы с компактными носителями).

Однако эта „взаимность" между двумя названными теоремами является в значительной степени кажущейся и отчасти недостаточно выясненной. В са-

[18]) Само определение групп Бетти происходит в обоих вариантах совершенно одинаково: берутся нервы того или иного класса покрытий (конечных или звездно-конечных); они образуют направленное множество. Проекции нервов порождают соответствующие гомоморфизмы их Δ- и ∇-групп, что дает обратный спектр Δ-групп и прямой спектр ∇-групп; предельные группы этих спектров и суть Δ- и ∇-группы множества. О том, какие именно циклы (конечные или бесконечные) могут быть положены — в случае бесконечных покрытий — в основу этого построения, будет сказано потом.

[19]) При этом в открытых множествах рассматриваются лишь конечные полиэдральные цепи (в частности, лишь конечные полиэдральные циклы).

[20]) Для общего случая дискретной области коэффициентов закон двойственности Ситникова выражается изоморфизмом

$$\nabla^p(A, \mathfrak{A}) = \Delta^q(B, \mathfrak{A}),$$

где $\Delta^q(B, \mathfrak{A})$ есть ситниковская ∇-группа.

мом деле, во-первых, бикомпактность области коэффициентов $\mathfrak{B}$, в предположении которой ведется изложенное выше доказательство теоремы Ситникова в самой этой теореме в сущности — не при чем: теорема Ситникова (с заменой $\Delta_c^q B$ на $\Delta^q B$) верна для совершенно произвольной области коэффициентов, а не только для областей коэффициентов, допускающих бикомпактную топологию. Но для доказательства ситниковского закона двойственности в его общей форме:

$$\nabla^p(A, \mathfrak{A}) = \Delta^q(B, \mathfrak{A})$$

приведенные выше рассуждения, параллельные доказательству моей теоремы, недостаточны, и надо воспользоваться первоначальным доказательством К. Ситникова.

Во-вторых, несмотря на параллелизм в приведенных выше доказательствах обеих теорем, даже в случае бикомпактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$ теорема Ситникова оказывается более сильной, чем моя теорема (доказанная соответственно для области коэффициентов $\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{B}$). Это становится ясным из следующих соображений.

Из рассуждений Г. С. Чогошвили (приведенных, например, в [1], § 1) вытекает возможность определить для каждого прямого спектра

$$\{Y_\alpha, \pi_\beta^\alpha\} \tag{1}$$

бикомпактных групп Y_α с непрерывными гомоморфизмами π_β^α бикомпактную группу Y, называемую *полным пределом* спектра (1) и обозначаемой через

$$Y = \underset{\rightarrow}{\mathrm{lc}}\,\{Y_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}.$$

Эта группа определяется так. Обозначим через X_α (дискретную) группу характеров группы Y_α и рассматриваем наряду со спектром (1) однозначно определенный этим последним обратный спектр

$$\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\} \tag{2}$$

с гомоморфизмами $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$, сопряженными гомоморфизмам π_β^α. Предельные группы спектров (1) и (2), определенные обычным путем (игнорируя топологию в группах Y_α) обозначим соответственно через Y_c и X. Для элементов x и y групп X и Y_c естественно определяется скалярное произведение, и в группе Y_c выделяется подгруппа Y_0 тех элементов, которые со всяким элементом группы X имеют нулевое скалярное произведение. Фактор-группа $Y' = Y_c - Y_0$, как замечает Чогошвили, получает естественную топологию (так, чтобы элементы группы X при скалярном умножении давали непрерывные характеры топологической группе Y'), и эта топологическая группа Y' имеет бикомпактное пополнение $\overline{Y}$. *Бикомпактная топологическая группа $\overline{Y}$, однозначно определенная спектром* (1) *и называется полным пределом этого спектра.*

Применим эти построения к прямым спектрам

$$\{(\nabla^p\alpha, \mathfrak{B}), \pi_\beta^\alpha\}^{21)}, \tag{3}$$

$$\{(\Delta^q\Psi, \mathfrak{B}), E_{\Psi'}^{\Psi}\} \tag{4}$$

состоящим из бикомпактных групп. Алгебраическими предельными группами этих спектров являются, очевидно, группы $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$ и $\Delta_c^q(B, \mathfrak{B})$ без топологии в них. В группе $\Delta_c^q(B, \mathfrak{B})$ при этом выделяется подгруппа $\Delta_0^q(B, \mathfrak{B})$ тех элементов, которые со всеми элементами группы $\delta^p(A, \mathfrak{A})$ имеют нулевое скалярное произведение. Другими словами, *элементы группы $\Delta_0^q(B, \mathfrak{B})$ суть такие гомологические классы циклов с компактными носителями в B, которые имеют равный нулю коэффициент зацепления со всяким проекционным* (*со всяким скользящим*) *циклом*[22]) *множества A*. Поэтому группа $\Delta_0^q(B, \mathfrak{B})$ называется *q-мерной группой (Δ-) незацепляемости множества B по области коэффициентов* $\mathfrak{B}$. Аналогично, в группе $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$, определяется подгруппа $\nabla_0^p(A, \mathfrak{B})$, состоящая из элементов, также имеющих нулевое скалярное произведение со всеми элементами группы $\delta^p(A, \mathfrak{A})$. Группа $\nabla_0^p(A, \mathfrak{B})$ называется *группой p-мерной ∇-незацепляемости множества A* (также по бикомпактной группе коэффициентов $\mathfrak{B}$). Полный предел спектра (3) обозначается через $\overline{\nabla}^p(A, \mathfrak{B})$, а полный предел спектра (4) через $\overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B})$. Очевидно, бикомпактные группы $\overline{\nabla}^p(A, \mathfrak{B})$ и $\overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B})$, будучи двойственными одной и той же дискретной группе $\delta^p(A, \mathfrak{A})$, топологически изоморфны между собою; этот изоморфизм представляет собою лишь другую форму доказанной мною теоремы двойственности. Однако доказанная мною теорема была первоначально сформулирована в виде двойственности

$$\delta^p(A, \mathfrak{A})\,|\,\overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B}) \tag{5}$$

(ясной из предыдущего; эта двойственность в известном смысле и является основной формой моей теоремы).

Но вернемся к занимающей нас в настоящий момент задаче сравнения доказанной мною теоремы с теоремой двойственности Ситникова. Итак, группа $\delta^p(A, \mathfrak{A})$, участвующая в моей теореме, двойственна не самой (надлежаще топологизированной[23])) группе $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$, а дополнению, некоторой топологизированной фактор-группы группы $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$. С другой стороны, группа $\overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B})$ также является дополнением некоторой фактор-группы группы $\Delta_c^q(B, \mathfrak{B})$. Таким образом, и в правой и в левой части двойственности (5), выражающей доказанную мною теорему, стоят группы, более бедные чем группы, изоморфизм которых составляет содержание закона двойственности Ситникова.

---

[21]) Здесь π_β^α — гомоморфизм группы ∇_α^p в $\nabla^p\beta$, сопряженной проекции $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ покрытия β в покрытие α.

[22]) См. Александров [1], § 0:3.

[23]) Неизвестно, допускает ли вообще группа $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$ бикомпактную топологию.

Заметим в связи с только что сказанным, что из изоморфизма между $\nabla^p(A,\mathfrak{B})$ и $\Delta_c^q(B,\mathfrak{B})$, сохраняющего скалярное произведение элементов каждой из этих групп с группой $\delta^p(A,\mathfrak{A})$ следует изоморфизм групп $\nabla_0^p(A,\mathfrak{B})$ и $\Delta_0^q(B,\mathfrak{B})$, чем доказано (впервые Ситниковым в [2]), что *q-мерная группа ∇-незацепляемости множества B* (будучи, как известно еще из [1], топологическим инвариантом множества B) *изоморфна p-мерной группе ∇-незацепляемости множества A и, следовательно, является инвариантом по отношению к топологическим преобразованиям множества A.* Аналогичное утверждение имеет, разумеется, место и для групп ∇-незацепляемости. Наконец из закона двойственности Ситникова для бикомпактной области коэффициентов:

$$\nabla^p(A,\mathfrak{B}) = \Delta_c^q(B,\mathfrak{B})$$

непосредственно следует, что группа $\Delta_c^q(B,\mathfrak{B})$, т. е. *группа с компактными носителями множества B по бикомпактной области коэффициентов является топологическим инвариантом дополнительного множества A* — вопреки тому, что ошибочно утверждалось в моей работе [1] (стр. 165 и 204).

Как уже было сказано, общий закон двойственности Ситникова (для любой или хотя бы только для целочисленной области коэффициентов) требует более тонких методов доказательства, чем те, которыми мы пользовались в [1] и пользуемся сейчас. В отличие от этого, мы видим, что обе только что приведенные теоремы инвариантности (впервые сформулированные и доказанные также Ситниковым), как и закон двойственности Ситникова для бикомпактной области коэффициентов, не требуют для своего доказательства никаких методов, кроме тех, которые даны в моей работе [1].

Тот факт, что закон двойственности Ситникова является результатом более сильным, чем доказанная мною теорема, весьма убедительно виден на конкретных примерах.

Возьмем, например, множество A, состоящее их всех точек полусегментов $-2 \leqslant y < 0$ и $0 < y \leqslant 1$ оси ординат, из точек кривой $y = \sin(1/x)$, $(0 < x \leqslant 1/\pi)$, из точек отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1/\pi$ прямой $y = -2$ и из точек $-2 \leqslant y \leqslant 0$ прямой $x = 1/\pi$. Можно показать, что группа $\delta^1 A$ есть нуль-группа (по любой области коэффициентов), в соответствии с чем вся группа $\Delta_c^0 B$ совпадает с группой незацепляемости. Между тем и группа $\nabla^1 A$ и группа $\Delta_c^0 B$ отличны от нуля (даже если взять за область коэффициентов группы второго порядка).

§ 6. В сущности говоря, закон двойственности Ситникова для бикомпактной области коэффициентов состоит не из одного, а из двух изоморфизмов:

$$\nabla^p(A,\mathfrak{B}) = \Delta_c^q(B,\mathfrak{B}) \quad \text{и} \quad \nabla_0^p(A,\mathfrak{B}) = \Delta_0^q(B,\mathfrak{B})$$

и утверждает таким образом эквивалентность двух пар групп:

$$\nabla^p(A,\mathfrak{B});\quad \nabla_0^p(A,\mathfrak{B}) \quad \text{и} \quad \Delta_c^q(B,\mathfrak{B});\quad \Delta_0^q(B,\mathfrak{B}).$$

Входящие в эти пары группы незацепляемости (∇ и Δ) представляют собою явление специфическое для топологии незамкнутых множеств, и их более детальное исследование является, как мне кажется, важной задачей дальнейшего развития гомологической теории незамкнутых множеств.

Заметим, что пара групп $\nabla^p(A,\mathfrak{B})$ и $\nabla_0^p(A,\mathfrak{B})$ определяет фактор-группу $\nabla'^p(A,\mathfrak{B}) = \nabla^p(A,\mathfrak{B}) - \nabla_0^p(A,\mathfrak{B})$ с ее естественной топологией, а следовательно, и бикомпактные группы $\overline{\nabla}^p(A,\mathfrak{B})$ и $\overline{\Delta}^q(B,\mathfrak{B})$, изоморфные между собою и двойственны группе $\delta^p(A,\mathfrak{A})$, которая поэтому также определена парой групп $\nabla^p(A,\mathfrak{B})$, $\nabla_0^p(A,\mathfrak{B})$.

Точно так же, пара групп $\Delta_c^q(B,\mathfrak{B})$, $\Delta_0^q(B,\mathfrak{B})$, определяя пары групп $\nabla^p(A,\mathfrak{B})$, $\nabla_0^p(A,\mathfrak{B})$, определяет и группы $\delta^p(A,\mathfrak{A})$, $\overline{\nabla}^p(A,\mathfrak{B})$, $\overline{\Delta}^q(B,\mathfrak{B})$.

В связи с этим возникает несколько вопросов. Прежде всего, *определяет ли пара групп $\nabla^p(A,\mathfrak{B})$, $\nabla_0^p(A,\mathfrak{B})$ хотя бы одну из групп $\Delta_c^p(A,\mathfrak{B})$, $\Delta_0^p(A,\mathfrak{B})$, $\overline{\Delta}^p(A,\mathfrak{B})$, или группы данного множества, основанные на покрытиях и группы этого же множества, основанные на лежащих в нем компактах никак не сводятся друг к другу?*

Второй вопрос касается непонятной роли, которую в только что сделанных рассмотрениях играет бикомпактность области коэффициентов $\mathfrak{B}$ при определении гомологических групп, которые сами никак не топологизируются! *Или существует, быть может, какая нибудь возможность ввести топологию в группу $\nabla^p(A,\mathfrak{B})$ и тем сделать эту группу бикомпактной?* Аналогичный вопрос возникает и по отношению к группам $\nabla_c^q(B,\mathfrak{B})$. Но положительный ответ на этот вопрос кажется мало вероятным. Может быть знание групп $\nabla^p(A,\mathfrak{B})$, $\nabla_0^p(A,\mathfrak{B})$ по бикомпактным группам коэффициентов $\mathfrak{B}$ определяет группы $\nabla^p(A,\mathfrak{A})$ по всем вообще группам коэффициентов? И что соответствует в случае произвольной области коэффициентов группам незацепляемости, определенным лишь для бикомпактных областей коэффициентов? Всё это — совершенно тёмные вопросы.

Мы уже говорили о том, в каком смысле теорема двойственности Ситникова сильнее доказанной мной теоремы. В конце концов *в случае бикомпактной области коэффициентов можно сказать, что теорема Ситникова имеет дело с парами групп $\nabla^p(A,\mathfrak{B})$; $\nabla_0^p(A,\mathfrak{B})$, соответственно $\Delta_0^q(B,\mathfrak{B})$, $\Delta_0^q(B,\mathfrak{B})$ и доказывает изоморфизм обоих этих пар, тогда так я рассматриваю лишь соответствующие фактор-группы с надлежащими их топологизациями и пополнениями.* В этом вопросе основным является факт неравноправия, в случае незамкнутых множеств, ∇- и Δ-групп данного незамкнутого множества (в пределах данной размерности и данного способа определения: покрытия, или содержащиеся во множестве компакты). При этом оказывается, и это само по себе неожиданно и интересно, что ∇-грyппы, основанные на покрытиях (и на бесконечных цепях, на них лежащих) дают больше чем Δ-группы, основанные на тех же покрытиях (и лежащих на них — естественно — конечных цепях); для групп с компактными носителями положение как раз обратное: группы Δ_c дают больше чем ∇_c! В теореме Ситникова группы разных типов размещены удачнее, чем у меня: у Ситникова ∇-группы по покрытиям и Δ-группы с компактными носителями; у меня — менее богатые Δ-группы на покрытиях и ∇-группы с компактными носителями. Но есть еще одна сторона дела: доказанная мною теорема двойственности, записанная в виде двойственности зацепления

$$\delta^p(A, \mathfrak{A}) \mid \overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B}) \tag{5}$$

касается лишь (тем или иным способом определенных) Δ-групп. В настоящее время неизвестно никакого соотношения двойственности между гомологическими группами взаимно дополнительных множеств A и B, являющееся двойственностью зацепления, и отличного от (5). Вопрос о существовании таких соотношений, и прежде всего, *вопрос о возможности извлечения из закона двойственности Ситникова некоторой новой двойственности зацепления очевидно приводит к задаче о придании закону двойственности Ситникова чистой Δ-формы*, т. е. о приведении его в такой вид, в котором и справа, и слева будут тем или иным образом определенные Δ-группы. Но в настоящее время не видно никаких путей к решению этой задачи. Неизвестно также, существует ли чистая ∇-форма теоремы Ситникова.

Эти вопросы, а также вопрос о возможности введения в ситниковские группы $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$ или $\Delta^q(B, \mathfrak{B})$ той или иной топологии упираются в основную алгебраическую трудность, возникающую при построении комбинаторной топологии незамкнутых множеств: в отсутствие двойственности между ∇- и Δ-группами (данной размерности и данного способа построения) незамкнутого множества, по двойственным областям коэффициентов; наличие такой двойственности для компактов и бикомпактов происходит от того, что топология бикомпактов основана на конечных покрытиях, тогда как при исследовании незамкнутых множеств мы вынуждены привлекать бесконечные, звездно-конечные покрытия. Мы вправе рассматривать как весьма удачное обстоятельство то, что (для множеств, лежащих в эвклидовых пространствах) размерность одинаковым образом может быть определена как при помощи конечных, так и при помощи бесконечных покрытий; это обстоятельство дает нам возможность перенести на незамкнутые множества гомологическое определение размерности при помощи циклов и гомологий на конечных покртытиях. Ситников дал — и это очень важно — гомологическое определение размерности в ∇-форме, основанное на бесконечных покрытиях, и этим связал размерность незамкнутых множеств с гомологическими построениями, участвующими в законах двойственности. Но *гомологического определения размерности незамкнутых множеств, основывающегося на бесконечных покрытиях, и имеющего Δ-форму, мы не имеем до сих пор!*

Сделаем в заключение следующее замечание. Применяя доказанную мною теорему двойственности к случаю, когда множество $A \subset S^n$ является компактом,

мы получаем новый, так называемый второй закон двойственности для компактов:

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{A}) \mid \overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B})$$

или

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{A}) = \nabla_c^q(B, \mathfrak{A})$$

(отличающийся от закона двойственности Понтрягина тем, что на компакте A берется группа по дискретной области коэффициентов[24]).

Таким образом, *доказанная мною теорема дает впервые возможность утверждать, что взятая по любой* (а не только по бикомпактной) *области коэффициентов группа $\Delta_c^p A$ компакта A топологически-инвариантно связана с дополнительным множеством B.*

Возникает общий вопрос: *Является ли для любого множества $A \subset S^n$ и для любой, прежде всего, для целочисленной области коэффициентов $\mathfrak{A}$ группа $\Delta_c^p(A, \mathfrak{A})$ топологическим инвариантом дополнительного множества?*

Положительный ответ на этот вопрос в значительной степени завершил бы те исследования об инвариантности групп Бетти множества $A \subset S^n$ по отношению к топологическим отображениям его дополнения B, которые явились истоком теорем двойственности.

Кажущийся мне более вероятным отрицательный ответ на этот вопрос должен был бы служить, по моему мнению, основанием для того, чтобы считать ситниковские Δ-группы „настоящими" Δ-группами „с компактными носителями", и полагать обычные „виеторисовские" группы Δ_c заслуживающими внимания в основном лишь в случае бикомпактной области коэффициентов, когда они совпадают с ситниковскими группами; так что проблему инвариантности, хоть и в другом смысле, но снова пришлось бы считать решенной.

Цитированная литература

[1] П. Александров, *Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств.* Мат. Сборн. 21 (1947), стр. 161-232.

[2] К. Ситников, *Закон двойственности для незамкнутых множеств n-мерного пространства*, Доклады Академии Наук СССР 81 (1951), вып. 3, стр. 359-362.

[3] К. Ситников, a) *О непрерывных деформациях незамкнутых множеств*, Доклады Академии Наук СССР 82 (1952), вып. 6, стр. 845-848.

— б) *О размерности незамкнутых множеств*, там же 83 (1952), вып. 1, стр. 31-34.

— в) *Пример двумерного множества в трехмерном евклидовом пространстве, допускающего сколь угодно малые деформации в одномерный полиэдр, и некоторая новая характеристика размерности множеств в евклидовых пространствах*, Доклады Академии Наук СССР 88, № 1 (1953), стр. 21-24.

[4] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*. Berlin 1935.

[24]) Закон двойственности Ситникова в случае компактов переходит в известные теоремы Понтрягина и Стинрода.

[5] P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Annals of Math. (2), 30 (1928), S. 101-187.

[6] E. Čech, *Théorie générale de l'Homologie*, Fund. Math. 19 (1932), p. 149-183.

[7] П. Александров, а) *О размерности бикомпактных пространств*, Доклады Академии Наук СССР 26 (1940), стр. 627-630.

— б) *On the dimension of normal spaces*, Proceed. of the Royal Society of London, A., 189 (1947), p. 11-39.

[8] P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Annalen 106 (1932), S. 161-238, или *О размерности замкнутых множеств*, Успехи Матем. Наук 4, вып. 6 (1950), стр. 17-88.

[9] S. Kaplan, *Homology properties of arbitrary subsets of euclidean spaces*, Transactions of the Amer. Math. Soc. 62 (1947), p. 248-271.

[10] Г. С. Чогошвили, а) *Закон двойственности для ретрактов*, Доклады Академии Наук СССР 51, № 2 (1946), стр. 90-97.

— б) *О гомологических аппроксимациях и законах двойственности множеств*, Мат. Сборн. 28 (1951), стр. 89-118 (и цитированные там более ранние работы — 1945 и последующих лет).

[11] C. H. Dowker, *Mapping theorems for non compact spaces*, Amer. Journ. of Math. 69 (1947), p. 200-242.

[12] E. Hemmingsen, *Some theorems in dimension theory for normal Hausdorff spaces*, Duke Math. Journ. 13 (1946), p. 495-504.

[13] C. Kuratowski, *Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles*, Fund. Math. 20 (1933), p. 191-196 (см. также C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952 (Edition troisième), p. 202 и след.).

[14] Е. Ф. Мищенко, а) *К гомологической теории незамкнутых множеств*, Мат. Сборн. 29 (1951), стр. 587-592.

— б) *О некоторых вопросах комбинаторной топологии незамкнутых множеств*, Мат. Сборн. 32 (1953), стр. 219-224.

Reçu par la Rédaction le 5. 9. 1953

Boolean representation through propositional calculus [1])

by

L. Henkin (Los Angeles)

By the *boolean representation theorem* we mean the proposition, first proved by Marshall Stone [1], that every boolean algebra is isomorphic to a boolean algebra of sets. By the *Gödel-Malcev (functional) theorem* we shall mean the metamathematical result stating that every formally consistent set of sentences of a first-order functional calculus is simultaneously satisfiable [2]). Each of these two theorems has been proved with the aid of the axiom of choice [3]), but neither one seems to be as strong as that axiom.

Although the boolean representation theorem and the Gödel-Malcev theorem appear to deal with very different subjects, the two have recently been shown to be quite closely related. Rasiowa and Sikorski [7] have given a proof of the Gödel-Malcev theorem using some of the same techniques which Stone employed in establishing the boolean representation theorem. By a slight change in their argument, it can be turned into a proof that the boolean representation theorem *implies* the Gödel-Malcev theorem. On the other hand, it has also been shown [4]) that the boolean representation theorem follows from the Gödel-Malcev theorem. In short, the two theorems are equivalent. Furthermore, although it appears necessary to employ the axiom of choice in order to establish

[1]) This work was supported in part by a grant from the National Science Foundation.

[2]) Gödel [2] and Malcev [3].

[3]) The Gödel-Malcev theorem is often stated for a first-order functional calculus containing only a countable number of symbols. This is the form in which it was first established by Gödel, and in this form it is not necessary to use the axiom of choice. It was Malcev, in the case of formulas of the propositional calculus, who first considered this theorem in connection with formal systems containing a non-denumerable number of symbols. The first statement or proof of the Gödel-Malcev theorem for first-order functional calculi with a non-denumerable number of symbols seems to occur in Henkin [4]. Subsequently, and independently, the theorem appeared and was proved in Robinson [6].

[4]) Henkin [5]. This paper contains some discussion of the relative strength of the axiom of choice and the Gödel-Malcev theorem.