As the series $\sum_q b_{sq_1, sq_2, \dots, sq_n}^{(1)}$ diverges for $s=1, 2, 3, \dots$, there is such a sequence of positive integers $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$, $s_i \rightarrow \infty$ with $i \rightarrow \infty$, that the series

$$\sum_q b_{s_{\|q\|}, s_{\|q\|}, \dots, s_{\|q\|}}^{(1)} q_n$$

diverges. Let

$$b_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{(2)} = b_{s_{\|q\|}, q_1, s_{\|q\|}, q_2, \dots, s_{\|q\|}, q_n}^{(1)}.$$

It is apparent that $\{b_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{(2)}\} \in B_{n,s}$ and that

$$\frac{b_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{(2)}}{b_{q_1+q'_1, q_2+q'_2, \dots, q_n+q'_n}} \rightarrow 0$$

if q' is a fixed point and $\|q\| \rightarrow \infty$. Consequently we have

$$\mu \left(\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\|q\| \geq k} C[q_1 \eta^{(1)} + q_2 \eta^{(2)} + \dots + q_n \eta^{(n)}, b_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{(2)}] \right) > 0$$

according to lemma 16.

Further if

$$\xi \in \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\|q\| \geq k} C[q_1 \eta^{(1)} + q_2 \eta^{(2)} + \dots + q_n \eta^{(n)}, b_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{(2)}],$$

then

$$\xi + q'_1 \eta^{(1)} + \dots + q'_n \eta^{(n)} \in \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\|q\| \geq k} C[q_1 \eta^{(1)} + \dots + q_n \eta^{(n)}, b_{q_1, q_2, \dots, q_n}].$$

According to lemma 14 the set $q'_1 \eta^{(1)} + q'_2 \eta^{(2)} + \dots + q'_n \eta^{(n)}$ where q' runs over all points with n integral coordinates is dense in K_s , and we finish the proof of lemma 17 applying lemma 13. As lemma 17 is equivalent to the inclusion $Y_{n,s} \subset \alpha\{B_{n,s}\}$ theorem 5 is completely proved.

References

- [1] V. Jarník, *Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen*, Prace matematyczno-fizyczne 36 (1928-29), p. 91-906.
- [2] A. Khintchine, *Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximation*, Mathematische Zeitschrift 24 (1926), p. 706-794.
- [3] J. Kurzweil, *A contribution to the metric theory of Diophantine Approximations*, Czechoslovak Mathematical Journal 9 (76) (1951), p. 149-178.
- [4] S. Saks, *Theory of the Integral*, Warszawa 1937.

Reçu par la Rédaction le 10. 3. 1954

Sur le mouvement plan d'un liquide visqueux compressible

par

A. KRZYWICKI (Wrocław)

1. Je présente dans ce mémoire les formules qui expriment les composantes de la force exercée sur un courbe S par un liquide visqueux, compressible, entourant cette courbe. Ces formules sont une généralisation des résultats de W. Wołibner [2] concernant le cas du liquide visqueux incompressible¹).

Soit S une courbe plane, simple, fermée qui sans se déformer se déplace parallèlement à une droite avec une vitesse constante, égale à U dans un liquide visqueux, compressible, remplissant tout le plan à l'extérieur de S . J'admets pour simplifier que la courbe S possède partout une tangente continue. Soit XY un système de coordonnées liées à la courbe S , ayant l'axe X parallèle à la vitesse de S ; soient u, v les composantes de la vitesse du liquide par rapport au système immobile $\bar{X}\bar{Y}$, parallèle au système XY ; soient p, ϱ, μ, ν la pression, la densité et les coefficients de viscosité du liquide. J'admets que les forces extérieures n'existent pas.

Les équations du mouvement et l'équation de continuité ont la forme

$$\begin{aligned} \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u-U) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \Delta u, \\ \varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (u-U) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \mu \Delta v, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\varrho(u-U)] + \frac{\partial}{\partial y} (\varrho v) = 0,$$

où

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

¹ Cf [1]. P. Udeschini a démontré qu'il n'existe pas de mouvement permanent d'un liquide visqueux, compressible, entourant un corps solide et y adhérent, qui serait régulier à l'intérieur du liquide et tel qu'à l'infini serait satisfaite la condition $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2(v - v_\infty) = 0$.

J'admets que:

I. Le liquide adhère à la courbe S ; on aura donc sur cette courbe

$$(2) \quad u = U, \quad v = 0.$$

II. L'énergie cinétique du mouvement E est finie:

$$(3) \quad E = \frac{1}{2} \iint \varrho (u^2 + v^2) d\sigma < +\infty,$$

l'intégration étant étendue sur tout le plan à l'extérieure de la courbe S .

III. Il existe une suite de nombres positifs infiniment croissante a_n telle que

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a_n}^{8a_n} \varrho r dr \leq M a_n^2,$$

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a_n}^{8a_n} \varrho^{-1} r dr \leq M a_n^2;$$

r et φ désignent les coordonnées polaires par rapport au système XY et M est une constante²⁾.

IV. u, v, p, ϱ et les dérivées de ces fonctions, qui apparaissent dans (1), sont continues³⁾.

Je vais démontrer qu'il existe deux suites infiniment croissantes, r_n et r'_n , telles que

$$(6) \quad P_x = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\iint_{H_{r_n}} \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} d\sigma + r_n^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t} \sin \varphi d\varphi \right],$$

$$(7) \quad P_y = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\iint_{H_{r_n}} \frac{\partial(\varrho v)}{\partial t} d\sigma - r_n'^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t} \cos \varphi d\varphi \right];$$

P_x et P_y désignent les composantes de la force exercée sur la courbe S par le liquide, u_r et u_φ — les composantes radiale et transversale de la vitesse du liquide par rapport au système $\bar{X}\bar{Y}$ et H_r — la région contenue entre la courbe S et le cercle K_r à rayon r et dont le centre est l'origine du système XY .

²⁾ Il suffit de poser $(1+\varepsilon)a_n$ au lieu de $8a_n$ dans les formules (4) et (5), ε étant une constante positive arbitraire.

³⁾ Les conditions concernant la courbe S et les fonctions u, v, p, ϱ peuvent être affaiblies pourvu que subsistent les formules (8), (9), (21), (30) et une formule analogue à (12), nécessaire pour démontrer la formule (7).

Les composantes P_x et P_y s'expriment par les formules

$$(8) \quad P_x = \int_S p n_x dl - \mu \int_S \frac{\partial u}{\partial n} dl - \nu \int_S \Theta n_x dl,$$

$$(9) \quad P_y = \int_S p n_y dl - \mu \int_S \frac{\partial v}{\partial n} dl - \nu \int_S \Theta n_y dl;$$

n_x et n_y désignent les cosinus directeurs de la normale intérieure de la courbe de l'intégration.

Il suffit de démontrer la formule (6), la démonstration de (7) étant complètement analogue. En intégrant la première équation de (1) sur H_r , puis tenant compte de (2) et de (8), on obtient

$$(10) \quad \iint_{H_r} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} d\sigma = \int_{K_r} \varrho u [(u-U)n_x + v n_y] dl + \iint_{H_r} u \left[\frac{\partial[\varrho(u-U)]}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} \right] d\sigma + \int_{K_r} p n_x dl - \nu \int_{K_r} \Theta n_x dl - \mu \int_{K_r} \frac{\partial u}{\partial n} dl - P_x.$$

En intégrant sur H_r le côté gauche de la troisième équation de (1) multipliée par u , et en ajoutant cette intégrale au côté gauche de (10), on a

$$(11) \quad \iint_{H_r} \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} d\sigma + P_x = \int_{K_r} \varrho u [(u-U)n_x + v n_y] d\sigma + \int_{K_r} (p n_x - \nu \Theta n_x - \mu \frac{\partial u}{\partial n}) dl.$$

En introduisant les coordonnées polaires et tenant compte des identités

$$\int_{K_r} p n_x dl = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin \varphi d\varphi, \quad \int_{K_r} \Theta n_x dl = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \sin \varphi d\varphi,$$

la formule (11) prend la forme

$$(12) \quad \iint_{H_r} \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} d\sigma + P_x = -r \int_0^{2\pi} \varrho (u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi) (u_r - U \cos \varphi) d\varphi + \mu r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \sin \varphi \right) d\varphi + r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \nu \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi d\varphi.$$

En introduisant les coordonnées polaires, une des équations du mouvement et l'équation de continuité prendront la forme suivante:

$$(13) \quad -r \frac{\partial p}{\partial \varphi} + r r \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = \rho \left(r^2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + r^2 u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + r u_\varphi u_r + r u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ + U \rho \left(-r^2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \cos \varphi + r \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \sin \varphi + r u_r \sin \varphi \right) \\ - \mu \left(r \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - u_\varphi + 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right),$$

$$(14) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial r} (u_r - U \cos \varphi) + (u_\varphi + U \sin \varphi) \frac{\partial \rho}{r \partial \varphi} + \frac{\rho}{r} \left(\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

En ajoutant au côté droit de (13) le côté gauche de (14) multiplié par $r^2 u_\varphi$, on obtient

$$(15) \quad -r \frac{\partial p}{\partial \varphi} + r r \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \\ = r^2 \frac{\partial (\rho u_\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial (r^2 \rho u_r u_\varphi)}{\partial r} + r \frac{\partial (\rho u_\varphi^2)}{\partial \varphi} \\ + U r \left(-r \frac{\partial (\rho u_\varphi)}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial (\rho u_\varphi)}{\partial \varphi} \sin \varphi + \rho u_r \sin \varphi \right) \\ - \mu \left(r^2 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - u_\varphi + 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right).$$

Tenant compte des identités

$$(16) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\rho u_\varphi^2)}{\partial \varphi} \sin \varphi d\varphi = - \int_0^{2\pi} \rho u_\varphi^2 \cos \varphi d\varphi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \sin \varphi d\varphi = - \int_0^{2\pi} u_r \cos \varphi d\varphi, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\rho u_\varphi)}{\partial \varphi} \sin^2 \varphi d\varphi = -2 \int_0^{2\pi} \rho u_\varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} \sin \varphi d\varphi = - \int_0^{2\pi} u_\varphi \sin \varphi d\varphi,$$

et en vertu de (15), l'équation (12) prendra la forme

$$(17) \quad F(r) = A(r) + B(r) + C(r) + E(r) + G(r),$$

où

$$F(r) = P_x + \int_{H_r} \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} d\sigma + r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\rho u_\varphi)}{\partial t} \sin \varphi d\varphi, \\ A(r) = -r \int_0^{2\pi} \rho (u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi) (u_r - U \cos \varphi) d\varphi + r \int_0^{2\pi} \rho u_\varphi^2 \cos \varphi d\varphi \\ + 2 U r \int_0^{2\pi} \rho u_\varphi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - U r \int_0^{2\pi} \rho u_r \sin^2 \varphi d\varphi, \\ (18) \quad B(r) = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial (r^2 \rho u_r u_\varphi)}{\partial r} \sin \varphi d\varphi + U r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\rho u_\varphi)}{\partial r} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \\ C(r) = -2\mu \int_0^{2\pi} (u_\varphi \sin \varphi + u_r \cos \varphi) d\varphi,$$

$$E(r) = \mu r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \varphi d\varphi,$$

$$G(r) = \mu r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} \sin \varphi d\varphi.$$

En vertu de (3) il résulte

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{a_n}^{8a_n} \rho u_r^2 r dr d\varphi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{a_n}^{8a_n} \rho u_\varphi^2 r dr d\varphi = 0.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz il résulte de (19) et de (4)

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{a_n}^{8a_n} \rho |u_r u_\varphi| r dr d\varphi = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{a_n}^{8a_n} \rho |u_r| r dr d\varphi = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{a_n}^{8a_n} \rho |u_\varphi| r dr d\varphi = 0.$$

On obtient donc en vertu de (18)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \int_{a_n}^{8a_n} A(r) dr = 0,$$

et pareillement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-2} \int_{a_n}^{4a_n} da \int_a^{2a} B(r) dr = 0,$$

donc

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-3} \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} d\beta \int_{\beta}^{2\beta} d\alpha \int_{\alpha}^{2\alpha} [A(r) + B(r)] dr = 0.$$

Comme $u_r r = u_r \sqrt{\varrho r} \sqrt{r/\varrho}$, en vertu de l'inégalité de Schwarz et en tenant compte de (5), on obtient

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_n}^{8\alpha_n} |u_r| r dr d\varphi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_n}^{8\alpha_n} |u_\varphi| r dr d\varphi = 0.$$

D'où, et en vertu de (18), il résulte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-3} \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} d\beta \int_{\beta}^{2\beta} d\alpha \int_{\alpha}^{2\alpha} [C(r) + E(r) + G(r)] dr = 0$$

et, tenant compte de (17) et (21),

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-3} \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} d\beta \int_{\beta}^{2\beta} d\alpha \int_{\alpha}^{2\alpha} F(r) dr = 0.$$

En désignant par $m(\alpha_n)$ le minimum de $|F(r)|$ pour $\alpha_n \leq r \leq 8\alpha_n$, on a

$$\frac{7}{2} m(\alpha_n) \alpha_n^3 \leq \left| \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} d\beta \int_{\beta}^{2\beta} d\alpha \int_{\alpha}^{2\alpha} F(r) dr \right|.$$

Il existe donc, en vertu de (23), une suite infiniment croissante r_n telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(r_n) = 0,$$

d'où résulte la formule (6).

Il faut remarquer que la formule (6) ne résulte que des équations du mouvement et de l'équation de continuité sans tirer parti de l'équation caractéristique du liquide, bien que la détermination d'un mouvement du liquide est impossible sans cette dernière équation. Les formules (6) et (7) sont valables pour une fonction arbitraire $p(x, y, t)$ qui n'est pas liée avec la densité ϱ . Elles sont donc valables pour une vaste classe des mouvements, p. ex. dans le cas du mouvement du liquide hétérogène, incompressible ou compressible, et même dans le cas où l'équation caractéristique du liquide dépend du temps.

Des formules (6), (7) il résulte que le liquide n'exerce aucune force sur la courbe S dans le cas du mouvement permanent par rapport au système XY .

2. Dès ce moment je me borne au cas où la relation entre la densité et la pression est adiabatique (ou au cas du liquide incompressible), c'est-à-dire que

$$I'. \varrho = \text{const} \cdot p^\lambda, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Soit

$$P = \int_0^p \frac{dp}{\varrho},$$

donc

$$(24) \quad P\varrho = k p, \quad k = \frac{1}{1-\lambda}.$$

J'admets de plus que:

II'. Les conditions I-IV sont satisfaites à l'exception de la condition III (5), que je remplace par la condition plus restrictive:

III'. p est bornée.

Enfin

IV'. u_r et Θ sont bornées.

Je vais démontrer qu'il existe une suite infiniment croissante r_n' telle que

$$(25) \quad UP_x = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial E_{r_n'}}{\partial t} + D_{r_n'} + k \int_{H_{r_n'}} \frac{p}{\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\sigma - U(k-1) r_n'^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial(\varrho u_\varphi)}{\partial t} \sin \varphi d\varphi \right],$$

où

$$(26) \quad D_r = \int_{H_r} \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 d\sigma,$$

$$(27) \quad E_r = \frac{1}{2} \int_{H_r} \varrho (u^2 + v^2) d\sigma.$$

En multipliant la première équation (1) par u , la seconde par v , la troisième par $\frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, en les ajoutant et en intégrant la somme sur H_r , on obtient, en vertu de (2), (8), (26), (27),

$$(28) \quad \frac{\partial E_r}{\partial t} + D_r + UP_x = \frac{1}{2} \int_{K_r} \varrho (u^2 + v^2) [(u - U)n_x + vn_y] dl + \int_{K_r} p(un_x + vn_y) dl - \nu \int_{K_r} \Theta(un_n + vn_n) dl - \frac{\mu}{2} \int_{H_r} \frac{\partial}{\partial n} (u^2 + v^2) dl + \int_{H_r} p\Theta d\sigma.$$

Je transforme le dernier terme de cette formule:

$$\int_{H_r} p\Theta d\sigma = \int_{H_r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [p(u - U)] + \frac{\partial}{\partial y} (pv) \right\} d\sigma - \int_{H_r} \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \varrho (u - U) + \frac{\partial P}{\partial y} \varrho v \right\} d\sigma.$$

Il vient, en vertu de (2) et de la troisième équation de (1),

$$(29) \quad \int_{H_r} p \Theta d\sigma = - \int_{K_r} p[(u-U)n_x + v n_y] dl + \int_{K_r} P \varrho[(u-U)n_x + v n_y] dl - \int_{H_r} P \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\sigma.$$

En introduisant les coordonnées polaires et en vertu de (29), la formule (28) prend la forme

$$(30) \quad \frac{\partial E_r}{\partial t} + D_r + \int_{H_r} P \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\sigma + U P_x = - \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \varrho(u_r^2 + u_\varphi^2)(u_r - U \cos \varphi) d\varphi + \frac{\mu}{2} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^2 + u_\varphi^2) d\varphi + r r \int_0^{2\pi} \Theta u_r d\varphi - U r \int_0^{2\pi} p \cos \varphi d\varphi - r \int_0^{2\pi} P \varrho(u_r - U \cos \varphi) d\varphi.$$

En tenant compte de (24), le dernier terme devient

$$r \int_0^{2\pi} k p (u_r - U \cos \varphi) d\varphi = k r \int_0^{2\pi} p u_r d\varphi + U k r \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sin \varphi d\varphi.$$

En vertu de (15), de la quatrième formule (16) et des identités

$$r \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 (r u_r)}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 (r u_r)}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi d\varphi = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \cos \varphi d\varphi,$$

l'équation (30) prend la forme

$$(31) \quad \frac{\partial E_r}{\partial t} + D_r + k \int_{H_r} \frac{p}{\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\sigma - U(k-1)r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\varrho u_\varphi)}{\partial t} \sin \varphi d\varphi + U P_x = - \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \varrho(u_r^2 + u_\varphi^2)(u_r - U \cos \varphi) d\varphi + \frac{\mu}{2} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^2 + u_\varphi^2) d\varphi - k r \int_0^{2\pi} p u_r d\varphi + r r \int_0^{2\pi} \Theta u_r d\varphi + U(k-1)r \int_0^{2\pi} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \cos \varphi d\varphi + U(k-1)r \int_0^{2\pi} u_\varphi \sin \varphi d\varphi + L(r),$$

où

$$L(r) = U(k-1) \int_0^{2\pi} \bar{L}(r, \varphi) \sin \varphi d\varphi,$$

et $\bar{L}(r, \varphi)$ désigne le côté droit de l'équation (15) où le terme $r^2 \frac{\partial (\varrho u_\varphi)}{\partial t}$ est omis. Pareillement à la démonstration de la formule (23) il résulte de (4), (5) et de III', IV'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_n}^{8\alpha_n} r \varrho (u_r^2 + u_\varphi^2) (u_r - U \cos \varphi) dr d\varphi = 0,$$

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{8\alpha_n} p |u_r| r dr d\varphi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_n}^{8\alpha_n} |\Theta u_r| r dr d\varphi = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{8\alpha_n} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \cos \varphi dr d\varphi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-3} \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} d\beta \int_\beta^{2\beta} d\alpha \int_\alpha^{2\alpha} L(r) dr = 0.$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\alpha} r \frac{\partial}{\partial r} (u_r^2 + u_\varphi^2) dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \{2\alpha [u_r^2(2\alpha, \varphi) + u_\varphi^2(2\alpha, \varphi)] - \alpha [u_r^2(\alpha, \varphi) + u_\varphi^2(\alpha, \varphi)] - \int_\alpha^{2\alpha} (u_r^2 + u_\varphi^2) dr\} d\varphi,$$

il résulte, en vertu de II, III et IV',

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} d\alpha \int_0^{2\alpha} r \frac{\partial}{\partial r} (u_r^2 + u_\varphi^2) dr = 0.$$

En vertu de (31), (32) et (33)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_n^3} \int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} d\beta \int_\beta^{2\beta} d\alpha \int_\alpha^{2\alpha} \left[\frac{\partial E_r}{\partial t} + D_r + k \int_{H_r} \frac{p}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\sigma - U(k-1)r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\varrho u_\varphi)}{\partial t} \sin \varphi d\varphi \right] d\alpha = 0,$$

d'où l'on obtient (25).

Il résulte des conditions I'-IV' et $\mu \neq 0$, que le mouvement permanent du liquide par rapport au système XY n'existe pas.

En effet, en vertu de (6) $P_x = 0$ et, en tenant compte de (25) et (26), toutes les dérivées partielles de u et v disparaissent, ce qui donne d'après (2) $u = U$, $v = 0$. Il résulte des équations du mouvement que p ainsi que ϱ sont constants, ce qui est contraire à la condition (3).

Remarquons encore que si l'on envisage le mouvement du liquide visqueux, incompressible, hétérogène et si les conditions II'-IV' sont

remplies, une légère modification de la démonstration nous conduit à une formule analogue à (25), à savoir

$$UP_x = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial E_n^*}{\partial t} + D_n^* \right].$$

Il en résulte évidemment que dans ce cas aussi *un mouvement permanent par rapport au système XY n'existe pas.*

Publications citées

[1] D. Udeschini, *Incompatibilità dell'adesione completa al contorno con la regolarità e le condizioni asintotiche euleriane per correnti viscosse stazionari*, Atti Accad. Italia, Rend. Cl. sci. fis. mat. natur. (7) 2 (1941), p. 957-963.

[2] W. Wolibner, *Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 279-285.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 27. 1. 1955

STUDIA MATHEMATICA publient des travaux de recherches (en langues des congrès internationaux) concernant l'Analyse fonctionnelle, les méthodes abstraites d'Analyse et le Calcul de probabilité. Chaque volume contient au moins 300 pages.

Les manuscrits dactylographiés sont à adresser à

M. Hugo Steinhaus

Wrocław 12 (Pologne), ul. Orłowskiego 15,

ou

M. Marcei Stark

Warszawa 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8, II p.

Les auteurs sont priés d'indiquer dans tout renvoi bibliographique le nom de l'auteur et le titre du travail cité, l'édition, le volume et l'année de sa publication, ainsi que les pages initiale et finale.

STUDIA MATHEMATICA sont à obtenir par l'intermédiaire de

KSIĄŻKA I PRASA

Warszawa (Pologne), ul. Koszykowa 31.

Le prix d'un fascicule est 2,50 zł.

Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Warszawa 1955

Nakład 1050 + 184 egz.

Podpisano do druku 29. IX. 1955

Ark. wyd. 9,5, druk. 7%

Druk ukończono w paźdz. 1955

Pap. druk. sat. bezdrz. 100 g, 70×100

Zamówienie nr 528/55

Cena zł 19.—

Wrocławska Drukarnia Naukowa, Wrocław, ul. Świerczewskiego 19.