Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans les espaces de Banach

par

R. FORTET et E. MOURIER (Paris)

I. Préliminaires

1. Nous allons considérer des éléments aléatoires dans un espace de Banach $\mathcal{X}$; nous renvoyons pour les définitions et les propriétés fondamentales à Mourier [7], Fortet et Mourier [4] et [5].

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ une suite d'éléments aléatoires de caractéristiques $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$; supposons que pour $n \to +\infty$, φ_n tende vers une limite φ, uniformément sur toute sphère du dual $\mathcal{X}^*$ de $\mathcal{X}$; φ est une fonction définie positive, mais on ne sait pas en général si elle est la caractéristique d'un élément aléatoire (proprement dit).

Cependant, si $\mathcal{X}$ est séparable et reflexif, et s'il existe deux nombres >0, a et A indépendants de n tels que $E(\|Z_n\|)^a < A$ quel que soit n, E. Mourier a montré dans [7] (cf. p. 226), que φ est la caractéristique d'un élément aléatoire proprement dit Y. Il résulte de sa démonstration que si on désigne par: $F_n(a)$, $F(a)$ les fonctions de répartition de $\|Z_n\|$, $\|Y\|$, on a pour tout $a>0$

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} F_n(a) &> 1 - A/a^a, & F(a) &> 1 - A/a^a, \\ F_n(a+0) &> 1 - A/a^a, & F(a+0) &> 1 - A/a^a, \end{aligned}$$

et

$$(1.2)\qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, F_n(a) \leqslant F(a+0).$$

Soient a_0 et a deux nombres >0 quelconques, avec $a > a_0$; nous avons:

$$\int_{a_0}^{a} u^a dF(u) = \int_{a_0}^{a} u^a d[F(u)-1]$$
$$= \{a_0^a[1-F(a_0)] - a^a[1-F(a)]\} + a\int_{a_0}^{a} u^{a-1}[1-F(a)]\,du.$$

Dans la première partie de cette formule, si a_0 et a étaient points de discontinuité pour $F(u)$, il faudrait éventuellement remplacer $F(a_0)$ par $F(a_0+0)$, $F(a)$ par $F(a+0)$; de toutes façons la valeur absolue de cette première partie est inférieure à A d'après (1.1). Le même calcul effectué sur

$$\int_{a_0}^{a} u^a\, dF_n(u)$$

montrerait alors que, quel que soit n

$$(1.3)\qquad \int_{a_0}^{a} u^{a-1}[1-F_n(u)]\,du < 2A.$$

Donnons à n une suite de valeurs tendant vers $+\infty$, et telle que $F_n(a)$ tende vers une limite $G(a)$; on aura

$$a\int_{a_0}^{a} u^{a-1}[1-G(u)]\,du < 2A.$$

D'après (1.2), on a $1-F(u+0) \leqslant 1-G(u)$, donc presque-partout $1-F(u) \leqslant 1-G(u)$, donc

$$a\int_{a_0}^{a} u^{a-1}[1-F(u)]\,du < 2A.$$

On en déduit que $E(\|Y\|^a)$ existe, et plus précisément que

$$(1.4)\qquad E(\|Y\|^a) \leqslant 3A.$$

Ce résultat complète de façon utile celui de Mourier [7].

Ceci dit, soit X un élément aléatoire dans $\mathcal{X}$, tel que $E(X)$ existe et que $E(\|X\|^2) < +\infty$, quelconque par ailleurs; on peut supposer sans restreindre la généralité que $E(X) = \Theta$; x^* variant dans le dual $\mathcal{X}^*$ de $\mathcal{X}$, toute fonction $\varphi(x^*)$ de la forme

$$(1.5)\qquad \varphi(x^*) = \exp\{-\tfrac{1}{2}E[\langle x^*, X\rangle^2]\}$$

est définie positive; nous dirons que c'est une fonction définie positive *normale*. Dans le cas général, on ne sait pas s'il existe un élément aléatoire (proprement dit) Y dans $\mathcal{X}$ admettant (1.5) pour caractéristique; s'il existait, Y serait laplacien par définition. En tous cas, tout élément aléatoire laplacien Y dans $\mathcal{X}$ tel que $E(Y) = \Theta$, $E(\|Y\|^2) < +\infty$ a pour caractéristique une fonction définie positive normale, à savoir la fonction

$$\exp\{-\tfrac{1}{2}E[\langle x^*, Y\rangle^2]\}.$$

Soit X un élément aléatoire dans $\mathcal{X}$, tel que $E(X) = \Theta$, $E(\|X\|^2) < +\infty$ et de caractéristique $\varphi_0(x^*)$; Mourier [7] a montré que

$$(1.6)\qquad \varphi_0(x^*) = 1 - \tfrac{1}{2}E[\langle x^*, X\rangle^2] + \omega(x^*),$$

avec $|\omega(x^*)| \leqslant \|x^*\|^2 \bar\omega(\|x^*\|)$, $\bar\omega(h)$ étant une fonction >0 indépendante de x^* qui tend vers 0 si $h \to +0$; de sorte que

$$\psi_0(x^*) = \log\varphi_0(x^*) = -\tfrac{1}{2}E[\langle x^*, X\rangle^2] + \omega_1(x^*), \tag{1.7}$$

avec

$$|\omega_1(x^*)| \leqslant \|x^*\|^2 \bar\omega_1(\|x^*\|), \tag{1.8}$$

$\bar\omega_1(h)$ étant encore une fonction >0 indépendante de x qui tend vers 0 si $h \to +0$.

Soient maintenant $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ une suite indéfinie d'éléments aléatoires dans $\mathcal{X}$, mutuellement indépendants et de même loi que X; posons

$$Z_n = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} X_j;$$

soit $\varphi_n(x^*)$ la caractéristique de Z_n; on a évidemment

$$\log\varphi_n(x^*) = n\psi_0(x^*/\sqrt{n}) = -\tfrac{1}{2}E[\langle x^*, X\rangle^2] + n\omega_1(x^*/\sqrt{n}).$$

D'après (1.8), si $n \to +\infty$, $|n\omega_1(x^*/\sqrt{n})| \to 0$, uniformément sur toute sphère de $\mathcal{X}$; de sorte que $\varphi_n(x^*)$ tend vers $\varphi(x^*)$ donnée par (1.5); autrement dit:

THÉORÈME I. *Lorsque $n \to +\infty$, la caractéristique de Z_n tend vers une limite, qui est une fonction définie positive normale.*

D'une façon évidente, moyennant certaines conditions, ce théorème peut être étendu au cas où les X_j, n'auraient pas forcément la même loi. Sans rechercher le maximum de généralité, supposons par exemple que:

(a) quel que soit j, $E(X_j) = \Theta$; en désignant par $F_j(a)$ la fonction de répartition de $\|X_j\|$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} a^2\, dF_j(a) \tag{1.9}$$

sont convergentes, uniformément en j (comme on sait, ceci aura lieu par exemple si les $E(\|X_j\|^3)$ sont bornés uniformément en j); la convergence uniforme des intégrales (1.9) entraîne que les $E(\|X_j\|^2)$ sont bornés uniformément en j;

(b) quel que soit x,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1}\sum_{j=1}^{n} E[\langle x, X_j\rangle^2] = \psi(x^*) \geqslant 0$$

existe.

Un procédé analogue au précédent montre alors que

THÉORÈME I[1]. *Pour $n \to +\infty$ la caractéristique φ_n de Z_n tend vers une limite définie positive*

$$\varphi(x^*) = \exp[-\tfrac{1}{2}\psi(x^*)].$$

Mais il n'est pas prouvé que $\varphi(x^*)$ est une fonction définie positive normale, ni qu'elle est la caractéristique d'un élément aléatoire Y; mais s'il existait, Y serait évidemment laplacien.

2. Cas des espaces $\mathcal{G}$. Nous dirons que *l'espace $\mathcal{X}$ est du type $\mathcal{G}$* s'il existe un nombre $A>0$ et une application G de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}^*$, dite *canonique*, faisant correspondre à tout $x \in \mathcal{X}$ un élément $x^* = g(x)$ de $\mathcal{X}^*$ de telle sorte que

(α) $\|g(x)\| = \|x\|$; $\langle g(x), x\rangle = \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathcal{X}$;

(β) $\|g(x) - g(y)\| \leqslant A\|x-y\|$, quels que soient $x, y \in \mathcal{X}$.

Dans [5], nous avons défini une catégorie d'espaces, appelés espaces $\mathcal{P}$, et montré que les espaces $\mathcal{P}$ sont du type $\mathcal{G}$; rappelons que les espaces L_α pour $\alpha \geqslant 2$ sont du type $\mathcal{P}$; pour L_α on montre facilement que la meilleure valeur possible de A est:

$$A = (\alpha-1)2^{\alpha-2} \qquad (\alpha \geqslant 2). \tag{2.1}$$

Nous allons, en supposant que $\mathcal{X}$ est du type $\mathcal{G}$, établir des résultats analogues à certains théorèmes indiqués dans [7] et [5], cependant distincts et un peu plus précis; notons-le, bien que nous n'en ayons pas d'exemple, il est très probable que $\mathcal{X}$ peut être du type $\mathcal{G}$ sans être un espace $\mathcal{P}$; d'autre part un espace $\mathcal{P}$ et à plus forte raison un espace du type $\mathcal{G}$, peut ne pas être séparable.

Supposons que $\mathcal{X}$ est du type $\mathcal{G}$, et soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des éléments aléatoires dans $\mathcal{X}$, tels que

$$E(X_j) = \Theta, \quad E(\|X_j\|^2) < +\infty \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

mutuellement indépendants, mais pas forcément de même loi; on a

$$\|X_1 + X_2 + \ldots + X_n\|^2 = \langle g(X_1 + X_2 + \ldots X_n), X_1 + X_2 + \ldots + X_n\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\langle g(X_1 + X_2 + \ldots + X_n), X_j\rangle.$$

Posons

$$T_j = X_1 + X_2 + \ldots + X_{j-1} + X_{j+1} + \ldots + X_n,$$

de sorte que

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = T_j + X_j.$$

On peut poser

$$g(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = g(T_j) + x^{*j},$$

ou, puisque $\mathcal{X}$ est du type $\mathcal{G}$, $\|x^{*j}\| \leqslant A\|X_j\|$; il vient alors

$$\|X_1+X_2+\ldots+X_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\langle g(T_j), X_j\rangle + \sum_{j=1}^{n}\langle x^{*j}, X_j\rangle.$$

T_j et X_j sont des éléments aléatoires indépendants; d'un théorème de Mourier [7] (p. 228) résulte alors que

$$E\Big[\sum_{j=1}^{n}\langle g(T_j), X_j\rangle\Big] = \sum_{j=1}^{n} E\big[\langle g(T_j), X_j\rangle\big] = 0$$

de sorte que

THÉORÈME II. *On a l'inégalité*

$$E(\|X_1+X_2+\ldots+X_n\|^2) \leqslant A\sum_{j=1}^{n} E(\|X_j\|^2). \tag{2.2}$$

Si l'on suppose que $n\to+\infty$, et que

$$\sum_{j=1}^{n} E(\|X_j\|^2) = O(n^\alpha)$$

avec $\alpha<2$, il en résulte donc que

$$n^{-1}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

tend vers Θ en moyenne d'ordre 2 et aussi tend fortement vers Θ presque-sûrement (cf. [5], Théorèmes VIII et IX).

Plaçons-nous dans ces conditions, en supposant plus précisément que les X_j sont de même loi; alors, en posant comme au § 1

$$Z_n = n^{-1/2}(X_1+X_2+\ldots+X_n), \qquad E(\|Z_n\|^2) \leqslant AE(\|X_j\|^2). \tag{2.3}$$

Si $\mathcal{X}$ est en outre séparable et reflexif, on en déduit aisément que la fonction définie positive normale

$$\varphi(x^*) = \exp\{-\tfrac{1}{2}E[\langle x, X_j\rangle^2]\}, \tag{2.4}$$

limite pour $n\to+\infty$, d'après le § 1, de la caractéristique de Z_n, satisfait à la condition C de [7] (cf. p. 220), et est donc la caractéristique d'un élément aléatoire laplacien Y dans $\mathcal{X}$; en outre d'après (1.4)

$$E(\|Y\|^2) \leqslant 3AE(\|X_j\|^2); \tag{2.5}$$

donc

THÉORÈME III. *Si $\mathcal{X}$ est séparable, réflexif et du type $\mathcal{G}$, toute fonction définie positive normale est la caractéristique d'un élément aléatoire laplacien Y tel que $E(\|Y\|^2)<+\infty$.*

Ne supposons plus les X_j de même loi, mais faisons les hypothèses qui ont conduit au Théorème I[1], à savoir les hypothèses (a) et (b) de la page 64 dont nous reprenons les notations. Alors $E(\|Z_n\|^2)$ reste borné; $\varphi(x^*)$ satisfait donc à la condition C, donc est la caractéristique d'un élément aléatoire Y, nécessairement laplacien; en outre d'après (1.4), $E(\|Y\|^2)$ existe; alors la caractéristique de Y, c'est-à-dire

$$\varphi(x^*) = \exp[-\tfrac{1}{2}\psi(x^*)],$$

est nécessairement définie positive normale.

THÉORÈME III[1]. *Dans les conditions du théorème I[1], si en outre $\mathcal{X}$ est séparable, reflexif et du type $\mathcal{G}$, la limite $\varphi(x^*)$ de la caractéristique de Z_n est définie positive normale et c'est la caractéristique d'un élément laplacien Y tel que $E(\|Y\|^2)<+\infty$.*

3. Revenons au cas où les X_j sont de même loi, et supposons que $\mathcal{X}$, du type $\mathcal{G}$, est séparable et reflexif, et en outre pourvu d'une base $\{b\}$, constituée par des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ de $\mathcal{X}$; soit x un élément quelconque de $\mathcal{X}$, a^k sa composante sur x_k. Soit T_k l'opération linéaire dans $\mathcal{X}$ qui à x fait correspondre $\sum_{j=1}^{k} a^j x_j$, U_k l'opération linéaire qui à x fait correspondre $x-T_k(x)$; T_k, U_k sont des opérations linéaires continues, et il existe un nombre M indépendant de k tel que

$$\|T_k\| \leqslant M, \qquad \|U_k\| \leqslant M \quad \text{pour tout } k$$

(cf. Banach [1], p. 110). De ce que

$$\|U_k(X_j)\|^2 \leqslant M^2\|X_j\|^2$$

et de ce que

$$\lim_{k\to+\infty} U_k(X_j) = \Theta \quad \text{presque-sûrement,}$$

résulte que

$$\lim_{k\to+\infty} E(\|U_k(X_j)\|^2) = 0. \tag{3.1}$$

Or on a

$$Z_n = T_k(Z_n) + U_k(Z_n),$$

$$U_k(Z_n) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} U_k(X_j),$$

$$T_k(Z_n) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} T_k(X_j).$$

D'après (2.3) et (3.1),

$$\lim_{k\to+\infty} E(\|U_k(Z_n)\|^2) = 0, \quad \textit{uniformément en } n. \tag{3.2}$$

Soit, d'autre part, Y l'élément aléatoire laplacien dans $\mathcal{X}$ admettant (2.4) pour caractéristique; évidemment: $E(Y)=\Theta$ et en outre quel que soit $x^*\epsilon\mathcal{X}$: $E[\langle x^*, Y\rangle^2]\equiv E[\langle x^*, X_j\rangle^2]$, donc

$$E[\langle x^*, T_k(Y)\rangle^2]\equiv E[\langle x^*, T_k(X_j)\rangle^2] \quad \text{pour tout } k \tag{3.3}$$

(se reporter à Mourier [7], chap. I); or presque-sûrement,

$$\lim_{k\to+\infty}\|T_k(Y)\|=\|Y\|,$$

donc la fonction de répartition de $\|T_k(Y)\|$ tend vers celle de $\|Y\|$. Mais visiblement $T_k(Z_n)$ est un élément aléatoire dans la variété linéaire à un nombre *fini* de dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, dont la loi de probabilité tend vers celle, laplacienne, de $T_k(Y)$ (d'après (3.3)); de sorte que pour tout k fixe, la fonction de répartition de $\|T_k(Z_n)\|$ tend lorsque $n\to+\infty$ vers celle de $\|T_k(Y)\|$. Avec (3.2) on en tire sans difficulté que:

Lemme. *$\mathcal{X}$ étant séparable, réflexif, du type $\mathcal{G}$ et admettant une base, lorsque $n\to+\infty$, la fonction de répartition de $\|Z_n\|$ tend vers celle de $\|Y\|$.*

Puisque d'après (2.3) $E(\|Z_n\|^2)$ est borné uniformément en n, on en tire le complément suivant au Théorème III:

Théorème IV. *$\mathcal{X}$ étant séparable, réflexif, du type $\mathcal{G}$ et admettant une base, tout élément aléatoire laplacien Y dans $\mathcal{X}$ admettant pour caractéristique une fonction définie positive normale (du type (1.1)) est tel que $E(Y)=\Theta$, $E(\|Y\|^2)<+\infty$.*

Considérons maintenant une fonctionnelle ou fonction numérique $f(x)$ de $x\epsilon\mathcal{X}$, uniformément continue en x (avec la topologie forte dans $\mathcal{X}$) dans toute sphère de rayon fini de $\mathcal{X}$. En reprenant sans modifications essentielles une démonstration donnée dans [5] dans le cas où $\mathcal{X}$ est un espace de Hilbert, on trouve que:

Théorème V. *Lorsque $n\to+\infty$, la fonction de répartition de $f(Z_n)$ tend vers celle de $f(Y)$.*

Remarque. On pourra être amené à appliquer le théorème V dans les conditions suivantes: soient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ deux espaces séparables, réflexifs du type $\mathcal{G}$ et admettant des bases; soit $\mathcal{X}$ leur produit cartésien, également séparable, réflexif, du type $\mathcal{G}$ et pourvu d'une base. Soit $X=(X^1, X^2)$ un élément aléatoire dans $\mathcal{X}$, constitué par le couple d'un élément aléatoire X^1 dans $\mathcal{X}^1$ et d'un élément aléatoire X^2 dans $\mathcal{X}^2$; supposons $E(X^1)=\Theta$, $E(X^2)=\Theta$, $E(\|X^1\|^2)<+\infty$, $E(\|X^2\|^2)<+\infty$, X^1 et X^2 pouvant être correlés de façon quelconque. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ une suite indéfinie d'éléments aléatoires dans $\mathcal{X}$, mutuellement indépendants, de même loi que X; si on pose

$$Z_n=n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}X_j,$$

on pourra appliquer à Z_n dans $\mathcal{X}$ les théorèmes précédents, en particulier le théorème V; si par exemple $\mathcal{X}^1=\mathcal{X}^2$, une fonctionnelle f sur $\mathcal{X}$ pourra être obtenue en appliquant à X^1+X^2 une fonctionnelle φ sur X^1

$$f(X)=\varphi(X^1+X^2).$$

Naturellement on peut plus généralement considérer le produit cartésien d'un nombre quelconque d'espaces facteurs.

Reprenons maintenant la même question, mais sans supposer que les X_j ont la même loi de probabilité; nous faisons les hypothèses (a) et (b) de la page 64, avec lesquelles le Théorème I[1] est établi. Supposons en outre que:

(c) si $k\to+\infty$, $E(\|U_k(X)_j\|^2)\to 0$, *uniformément en j.*

Observons d'abord que la propriété (c) si elle a lieu, est une propriété intrinsèque de la suite des X_j, dans le sens suivant: supposons que $\mathcal{X}$ possède une base $\{b\}$ par rapport à laquelle les éléments X_j ont la propriété (c); si $\mathcal{X}$ possède une autre base $\{b'\}$, les X_j ont aussi la propriété (c) par rapport à $\{b'\}$; en effet, désignons par T'_k, U'_k, M', les analogues pour $\{b'\}$ de T_k, U_k, M; on a quels que soient h et k

$$\begin{gathered}U'_h(X_j)=U'_h[T_k(X_j)]+U'_k[U_k(X_j)],\\ \|U'_h[U_k(X_j)]\|\leqslant M'\|U_k(X_j)\|.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Donc quel que soit $\varepsilon>0$, on peut prendre k assez grand pour que:

$$E(\|U'_h[U_k(X_j)]\|^2)<\varepsilon \quad \textit{quels que soient } j \textit{ et } h; \tag{3.5}$$

k étant choisi ainsi, on a

$$T_k(X_j)=\sum_{\alpha=1}^{k}a^\alpha(X_j)x_\alpha,$$

en désignant par $a^\alpha(X_j)$ la composante de X_j sur x_α; on a

$$|a^\alpha(X_j)|<N\|X_j\|, \tag{3.6}$$

N désignant un certain nombre indépendant de j et de α $(\alpha=1,2,\ldots,k)$; or

$$U'_h[T_k(X_j)]=\sum_{\alpha=1}^{k}a^\alpha(X_j)\,U'_h(x_\alpha);$$

comme

$$\lim_{h\to+\infty}\|U'_h(x_\alpha)\|=0 \quad (\alpha=1,2,\ldots,k), \tag{3.7}$$

et que les $E(\|X_j\|^2)<+\infty$ uniformément en j, la propriété annoncée en résulte.

Cette remarque faite, il est clair que sous les hypothèses (a), (b), (c) les raisonnements du cas où les X_j ont la même loi s'appliquent sans changement essentiel à

$$Z_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} E_j,$$

de sorte que, f désignant toujours une fonctionnelle sur $\mathcal{X}$ uniformément continue (avec la topologie forte dans $\mathcal{X}$) sur toute sphère de rayon fini de $\mathcal{X}$ et Y désignant l'élément laplacien dans $\mathcal{X}$ dont l'existence est assurée par le Théorème III, on a le

THÉORÈME V[1]. *Lorsque $n \to +\infty$, la fonction de répartition de $f(Z_n)$ tend vers celle de $f(Y)$.*

Remarque. Il convient d'observer que si l'hypothèse (c) n'est pas satisfaite (ou une autre hypothèse plus ou moins restrictive, mais analogue), le théorème V[1] est en défaut; c'est ce que montre l'exemple suivant.

Supposons que $\mathcal{X}$ est un espace de Hilbert séparable rapporté à une base orthonormée $\{x_k\}$, et que

$$Pr(X_j = x_j) = \tfrac{1}{2}, \quad Pr(X_j = -x_j) = \tfrac{1}{2}.$$

Les hypothèses (a) et (b) sont satisfaites, mais non l'hypothèse (c); l'élément laplacien Y est tel que $Pr(Y = \Theta) = 1$, de sorte que: $\|Y\| = 0$ p. s. Or on a: $\|Z_n\| = 1$ p. s.

II. Applications à des fonctions aléatoires

4. Addition de fonctions aléatoires indépendantes. Soit t une variable réelle $(-\infty < t < +\infty)$ et u un paramètre réel variant de 0 à 1. Associons à chaque valeur de u une fonction réelle $R(u;t)$ aléatoire de t, les diverses fonctions $R(u;t)$ correspondant à diverses valeurs de u étant stochastiquement indépendantes. Supposons que, sauf pour des valeurs de u formant un ensemble de mesure L nulle,

(a) $R(u;t)$, comme fonction aléatoire de t, est un „processus mesurable de Doob";

(b) α désignant un nombre réel $\geqslant 1$ déterminé quelconque,

$$E\Big[\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |R(u;t)|^{\alpha}\,dt\Big)^{2/\alpha}\Big]$$

est finie, et, comme fonction de u, est sommable sur $(0,1)$.

Soit maintenant U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$, et posons

$$X(t) = R(U;t);$$

la fonction aléatoire $X(t)$ ainsi définie, d'après (a) et (b), peut être considérée comme un élément aléatoire X prenant ses valeurs dans l'espace L_α des fonctions de t $(-\infty < t < +\infty)$ de puissance α-ième sommable.

On supposera d'ailleurs par la suite que $\alpha \geqslant 2$; L_α est alors un espace $\mathcal{G}$ séparable et réflexif et admettant une base. Sauf pour des valeurs de u formant un ensemble de mesure L nulle, $R(u;t)$, comme fonction de t, est une fonction aléatoire du second ordre; on posera

$$m(u;t) = E[R(u;t)], \quad \Gamma(u;t;\tau) = E[R(u;t)R(u;\tau)]. \tag{4.1}$$

D'après (b), $\Gamma(u;t;\tau)$ est, comme fonction de u sur $(0,1)$, sommable L; par suite $m(u;t)$ également. X a une espérance mathématique μ, constituée par la fonction $\mu(t)$ de t, appartenant à L_α, et définie par

$$\mu(t) = \int_0^1 m(u;t)\,du.$$

Enfin d'après (b) il est clair que $E(\|X\|^2) < +\infty$, la norme $\|X\|$ étant prise dans L_α.

Soient $U_1, U_2, \ldots, U_j, \ldots$, une suite indéfinie de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi uniforme sur $(0,1)$; soit X_j l'élément aléatoire dans L_α défini par

$$X_j(t) = R(U_j;t),$$

de sorte que les X_j forment une suite d'éléments aléatoires dans L_α, mutuellement indépendants et tous de même loi que l'élément aléatoire X précédemment défini. Posons

$$Z_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} X_j - \sqrt{n}\,\mu.$$

D'après les résultats des paragraphes précédents, la caractéristique de Z_n tend vers celle d'un élément aléatoire laplacien Y (rappelons que Y est en fait une fonction aléatoire $Y(t)$ de t) dans L_α, d'espérance mathématique nulle, tel que $E(\|Y\|^2) < +\infty$; en un certain sens (cf. Mourier [7]), la loi de probabilité de Y est complètement déterminée par sa caractéristique, qui n'est autre que

$$\exp\{-\tfrac{1}{2}E[\langle x^*, X-\mu\rangle]^2\} = \exp\{-\tfrac{1}{2}E[\langle x^*, Y\rangle^2]\}$$

où x^*, fonctionnelle linéaire sur L_α, est un élément de $L_{\alpha/(\alpha-1)}$ que l'on peut représenter par une fonction arbitraire $g(t)$ de $L_{\alpha/(\alpha-1)}$. En posant

$$\gamma(t,\tau) = \int_0^1 \Gamma(u;t;\tau)\,du,$$

un calcul immédiat donne

$$E[\langle x^*, X-\mu\rangle^2] = E[\langle x, Y\rangle^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [\gamma(\alpha,\beta)-\mu(\alpha)\mu(\beta)]\, g(\alpha) g(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

de sorte que $[\gamma(\alpha,\beta)-\mu(\alpha)\mu(\beta)]$ n'est autre que la covariance $E[Y(\alpha)Y(\beta)]$ de $Y(t)$; celle-ci détermine complètement la loi temporelle laplacienne de $Y(t)$; il y a donc équivalence entre la donnée de cette loi temporelle de $Y(t)$ et la donnée de la loi de probabilité dans L_a (au sens de [7]) de Y.

Soit alors f une fonctionnelle sur L_a uniformément continue (avec la topologie forte dans L_a) sur toute sphère finie de L_a; nous disons d'une telle fonctionnelle qu'*elle est du type* (C); en vertu du Théorème V, nous avons le

THÉORÈME VI. *La fonction de répartition de $f(Z_n)$ tend, lorsque $n\to+\infty$, vers la fonction de répartition de $f(Y)$.*

Variante. Posons

$$R'(u;t) = R(u;t) - m(u;t), \qquad X'_j(t) = R'(U_j;t), \qquad Z'_n = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} X'_j.$$

Les mêmes méthodes montreront que

(a) lorsque $n\to+\infty$, la caractéristique de Z'_n tend vers celle d'un élément aléatoire laplacien Y' à valeur dans L_a, constituée par une fonction aléatoire laplacienne $Y'(t)$ à espérance mathématique nulle et de covariance

$$E[Y'(\alpha)Y'(\beta)] = \gamma(\alpha,\beta) - \int_0^1 m(u;\alpha) m(u;\beta)\, du = \gamma'(\alpha,\beta);$$

(b) si f est une fonctionnelle du type (C), lorsque $n\to+\infty$, la fonction de répartition de $f(Z_n)$ tend vers celle de $f(Y')$.

5. Fonctions aléatoires dérivées d'un processus de Poisson. Au lieu de choisir, indépendamment et selon une loi uniforme, n valeurs U_j de u sur (0,1), puis de faire tendre n vers $+\infty$, on peut considérer un processus de Poisson $N(u)$ sur (0,1) ($N(0)=0$), pour fixer les idées homogène et de densité ϱ et indépendant stochastiquement des $R(u;t)$; on fera ensuite tendre ϱ vers $+\infty$. Ceci amène à former des fonctions aléatoires dérivées du processus de Poisson $N(u)$.

Par exemple considérons la fonction aléatoire

$$A_\varrho(t) = \varrho^{-1/2}\int_0^1 R'(u;t)\, dN(u).$$

Conditionnellement quand $N(1)=n$, on peut identifier la fonction A_ϱ avec $\sqrt{n/\varrho}\, Z'_n$; on en déduit d'abord que A_ϱ est un élément aléatoire dans L_a. Soit, d'autre part, f une fonctionnelle du type (C). Posons:

$$P_n(\varrho) = Pr[f(A_\varrho) < h / N(1)=n],$$

h désignant un nombre quelconque, et

$$P(\varrho) = Pr[f(A_\varrho) < h].$$

On a

$$P(\varrho) = e^{-\varrho}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\varrho^n}{n!}P_n(\varrho). \tag{5.1}$$

Soit un nombre >0 quelconque; lorsque $\varrho\to+\infty$ et d'après l'inégalité de Bienaymé, on commet sur $P(\varrho)$ une erreur inférieure à $1/a^2$ en négligeant dans (5.1) les termes pour lesquels $|n-\varrho| > a\sqrt{\varrho}$. Mais lorsque $|n-\varrho|\leqslant a\sqrt{\varrho}$ et si $\varrho\to+\infty$, A_ϱ, c'est à dire $\sqrt{n/\varrho}\, Z'_n$, et Z'_n diffèrent peu (relativement); $f(A_\varrho)$ et $f(Z'_n)$ ont des fonctions de répartitions voisines; or celle de $f(Z'_n)$ tend vers celle de $f(Y')$ lorsque $n\to+\infty$, ce qui est le cas si $\varrho\to+\infty$ et si $|n-\varrho|\leqslant a\sqrt{\varrho}$. Comme a peut être pris aussi grand qu'on le veut, on en déduit:

(a) lorsque $\varrho\to+\infty$, la fonction de répartition de $f(A_\varrho)$ tend vers celle de $f(Y')$;

(b) ceci s'applique en particulier au cas où f est:

$$f(A_\varrho) = \exp\{i\langle x^*, A_\varrho\rangle\},$$

où x^* est une fonctionnelle linéaire fixe quelconque sur L_a; on en déduit que la caractéristique de A_ϱ tend vers celle de Y'. En particulier, la loi temporelle de $A_\varrho(t)$ tend vers la loi temporelle laplacienne de $Y'(t)$.

En désignant par $\mathcal{N}(u)$ le processus de Poisson centré correspondant à $N(u)$: $\mathcal{N}(u) = N(u) - \varrho u$, on peut aussi bien considérer la fonction aléatoire

$$B_\varrho = \varrho^{-1/2}\int_0^1 R'(u;t)\, d\mathcal{N}(u),$$

qui diffère de A_ϱ par: $\sqrt{\varrho}\int_0^1 R'(u;t)\,du$; mais cette dernière intégrale, qui a un sens, est presque-sûrement nulle, de sorte que $B_\varrho = A_\varrho$ p. s.

Variante. En corrélation avec Z_n au lieu de Z'_n, on peut former la fonction aléatoire

$$C_\varrho = \varrho^{-1/2}\Big[\int_0^1 R(u;t)\, dN(u) - N(1)\mu\Big];$$

on constate que, conditionnellement quand $N(1)=n$, la loi de probabilité de C_ϱ est identique à celle de $\sqrt{n/\varrho}\, Z_n$; on peut alors reproduire la démonstration précédente, Z_n jouant le rôle de Z'_n, et Y celui de Y'; au remplacement près de A_φ par C_ϱ et de Y' par Y, on retrouve les résultats (a) et (b) précédents.

Notons que

$$D_\varrho = \varrho^{-1/2}\int_0^1 [R(u;t)-\mu(t)]\,d\mathcal{N}(u)$$

ne diffère de C_ϱ que par une quantité nulle p. s.

On pourrait aussi associer à Z_n la fonction aléatoire

$$E_\varrho = \varrho^{-1/2}\int_0^1 R(u;t)\,dN(u) - \sqrt{\varrho}\mu\,;$$

on remarque que

$$E_\varrho = C_\varrho + \frac{N(1)-\varrho}{\sqrt{\varrho}}\,\mu;$$

C et $(N(1)-\varrho)/\sqrt{\varrho}$ sont deux éléments aléatoires dans L_a, correlés entre eux; on peut alors utiliser la remarque qui termine le paragraphe 3, et établir les résultats analogues à (a) et à (b); mais l'élément aléatoire laplacien limite est différent de Y.

Notons à ce propos que la Remarque en question permet plus généralement de traiter les problèmes où interviennent simultanément plusieurs fonctions aléatoires dérivées d'un même processus de Poisson (ou formées comme $X(t)$, à l'aide de fonctions R différentes corrélées ou non, mais prises pour la même valeur aléatoire U de u).

6. Cas où les u_j ne sont pas aléatoires. Au lieu de prendre les U_j aléatoires, une idée naturelle est de leur donner les valeurs certaines: $u_j = j/n$ $(j=1,2,\dots,n)$, et de considérer, au lieu de Z'_n, la fonction aléatoire

(6.1) $$W'_n = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} R'(j/n;t).$$

W'_n est encore une somme d'éléments aléatoires indépendants dans L_a; mais cette fois ces éléments n'ont pas (en général) la même loi de probabilité; mais alors nous pourrons appliquer le Théorème V[1], à condition que soient satisfaites les propriétés (a), (b), (c) rappelées ou énoncées p. 69; examinons successivement ces trois points.

Propriété (a). On a de toutes façons $E[R'(j/n;t)]\equiv 0$; il suffit donc (par exemple) que

$$E\Big[\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |R'(u;t)|^a\,dt\Big)^{3/a}\Big]^3$$

soit borné par un nombre fini indépendant de u.

Propriété (b). Une fonctionnelle x^* sur L_a est représentée par une fonction $g(t)\in L_{a/(a-1)}$; il s'agit donc, pour tout $g(t)\in L_{a/(a-1)}$, que

(6.2) $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha)g(\beta)\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma'\left(\frac{j}{n};\alpha,\beta\right)\right]d\alpha\,d\beta$$

existe, où on a posé

$$\Gamma'(u;\alpha,\beta)=\Gamma(u;\alpha,\beta)-m(u,\alpha)\,m(u,\beta);$$

pour qu'il en soit ainsi, il suffit que:

1° il existe une fonction $A(\alpha,\beta)\geqslant 0$ $(-\infty<\alpha,\beta<+\infty)$ mesurable L en (α,β), telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(\alpha)g(\beta)|\,A(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta<+\infty$$

pour tout $g(t)\in L_{a/(a-1)}$, et que $|\Gamma'(u;\alpha,\beta)|\leqslant A(\alpha,\beta)$ quel que soit u;

2° pour presque tout couple (α,β), $\Gamma'(u;\alpha,\beta)$ est, comme fonction de u, intégrable au sens de Riemann.

Alors la limite (6.2) est

(6.3) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha)g(\beta)\gamma'(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta,$$

en posant

$$\gamma'(\alpha,\beta)=\int_0^1\Gamma'(u;\alpha,\beta)\,du.$$

Dans ces conditions et en vertu du Théorème III[1], l'existence d'un élément laplacien limite Y' est assurée; c'est une fonction aléatoire de t appartenant à L_a, laplacienne de covariance $\gamma'(\alpha,\beta)$: on reconnaît l'élément aléatoire laplacien Y' dont il est question à la fin du paragraphe 5.

Propriété (c). La propriété (c) sera assurée si

(6.4) $$\lim_{k\to+\infty} E\Big\{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|U_k[R'(u;t)]|^a\,dt\Big)^{2/a}\Big\}=0$$

uniformément en u.

On pourrait chercher des critères généraux assurant (6.4), en utilisant dans L_a par exemple une base de Haar; cela ne semble cependant pas très nécessaire, puisque (6.4) pourra être vérifié directement dans chaque application.

Finalement, sous les conditions qui viennent d'être indiquées, le Théorème V[1] permet d'affirmer que, f désignant toujours une fonctionnelle sur L_a de la classe (C), si $n\to+\infty$, la fonction de répartition de $f(W'_n)$ tend vers celle de $f(Y')$.

Remarque. Un cas simple important doit être signalé, celui où, quels que soient u et h, les fonctions aléatoires $R'(u;t)$ et $R'(u+h;t+h)$ ont la même loi de probabilité; en effet dans ce cas la loi de probabilité de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U_k[R'(u;t)]|^\alpha dt$$

ne dépend pas de u, et *dans* (6.4) *l'uniformité en u est assurée*; de même la fonction de répartition $F_u(a)$ de l'intégrale

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |R'(u;t)|^\alpha dt\right)^{1/\alpha},$$

qui représente la norme de $R'(u;t)$ comme élément de L_α, ne dépend pas non plus de u; les intégrales

$$\int_0^{+\infty} a^2\, dF_u(a)$$

sont donc nécessairement convergente uniformément en u, et la propriété (a) est assurée sans qu'il soit nécessaire de supposer que les

$$E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |R'(u;t)|^\alpha dt\right)^{3/\alpha}\right] = \int_0^{+\infty} a^3\, dF_u(a)$$

sont bornés uniformément en u; ils peuvent même ne pas exister.

7. Applications à un type particulier de fonctionnelles. Un type de fonctionnelle (sur L_α) que l'on rencontre dans un grand nombre d'applications est le suivant: soit $V(x)$ une fonction (déterminée, certaine) d'une variable réelle x $(-\infty<x<+\infty)$; à toute fonction $g(t)\in L_\alpha$ on fait correspondre le nombre $f[g]$ suivant:

$$f[g]=\int_{t_1}^{t_2} V[g(t)]\, dt \tag{7.1}$$

où (t_1,t_2) est un intervalle déterminé; naturellement on peut plus généralement prendre V fonction de x et de t; mais pour fixer les idées, nous nous limiterons au cas où V ne dépend que de la variable x et où (t_1,t_2) est l'intervalle $(0,1)$ (cf. entre autres Kac [6], Donsker [3], Blanc-Lapierre et Fortet [2], p. 124 et sq., p. 170 et sq., p. 321 et sq., p. 519 et sq.).

Naturellement, pour que cette fonctionnelle f soit définie sur L_α et de la classe (C), il faut une condition sur V; on vérifie facilement par exemple que f est de la classe (C) s'il existe trois nombres >0: A,Θ,ψ tels que $\Theta+\psi\leqslant\alpha$ et que pour tout couple x',x''

$$|V(x')-V(x'')|\leqslant A\max(|x'|,|x''|)|x'-x''|. \tag{7.2}$$

1° Soit $S(t)$ la fonction

$$S(t)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad t<0 \quad\text{et}\quad \text{si}\quad t>1,\\ 1 & \text{si}\quad 0<t<1;\end{cases}$$

à chaque valeur de u $(0\leqslant u\leqslant 1)$ associons une variable aléatoire λ_u, les λ_u correspondant à des u différents étant indépendantes, mais de même loi; nous supposons $E(|\lambda_u|)<+\infty$ et $E(\lambda_u)=0$. Posons maintenant

$$R(u;t)=R'(u,t)=\lambda_u S(t-u).$$

Comme fonction de t, p. s. $R'(u,t)\in L_\alpha$ pour tout $\alpha>2$ pourvu que

$$E[\lambda_u^2]=\sigma^2<+\infty, \tag{7.3}$$

ce que nous supposerons.

2° Prenons $V(x)=|x|^\lambda$ $(\lambda>0)$; si $\lambda\leqslant 2$, la fonctionnelle (7.1) est évidemment définie et de la classe (C) sur L_α pour tout $\alpha\geqslant 2$; si $\lambda>2$, $V(x)$ satisfait à (7.2) avec $\psi=\lambda-1$, $\Theta=1$, donc la fonctionnelle (7.1) est définie et de la classe (C) sur L_α pour $\alpha\geqslant\lambda$.

Les résultats des paragraphes 4, 5, 6, appliqués au cas actuel, fournissent une série de théorèmes; limitons-nous à titre d'exemple, à celui qui résulte du paragraphe 6; observons d'abord que la Remarque de la p. 76 s'applique au cas actuel, car quel que soit h, les fonctions aléatoires

$$R'(u+h;t+h)=\lambda_{u+h}S(t+h-u-h)=\lambda_{u+h}S(t-u)$$

ont la même loi de probabilité; les propriétés (a) et (c) rappelées ci-dessus sont satisfaites. Pour la propriété (b), on voit d'abord qu'ici

$$\Gamma''(u;\alpha,\beta)=\sigma^2\gamma(\alpha-u,\beta-u),$$

en posant

$$\gamma(\alpha,\beta)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<\alpha,\beta<1,\\ 0 & \text{dans les autres cas.}\end{cases}$$

Visiblement $\gamma'(u;\alpha,\beta)$ est, quels que soient α et β, intégrable en u au sens de Riemann, et la majorante $A(\alpha,\beta)$ dont il est question p. 70 existe; donc la propriété (b) est satisfaite, et on a

$$\gamma'(\alpha,\beta)=\sigma^2\int_0^1 \gamma(\alpha-u,\beta-u)\, du,$$

qui se calcule aisément; en particulier

$$\gamma'(\alpha,\beta)=\sigma^2\sqrt{2}\min(\alpha,\beta)\qquad\text{pour}\qquad 0\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant 1,$$

de sorte que pour $0<t<1$, $Y'(t)$ est un processus de Wiener-Lévy, nul pour $t=0$.

D'autre part, avec $V(x)=|x|^\lambda$, la fonctionnelle $f(W'_n)$ devient

$$f(W'_n)=\frac{1}{n^{1+\lambda/2}}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{k}\lambda_{j/n}\Big)^\lambda. \tag{7.4}$$

Nous concluons donc: la fonction de répartition de $f(W'_n)$ tend, lorsque $n\to+\infty$, vers la fonction de répartition de

$$\int_0^1 |Y'(t)|^\lambda\,dt.$$

Extension. Il est parfois possible d'étendre nos résultats concernant les fonctionnelles de la classe (C) à des fonctionnelles qui ne sont pas de la classe (C); par exemple, prenons

$$V(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad |x|>l,\\ 0 & \text{si} \quad |x|\leqslant l,\end{cases}$$

où l est un nombre >0 quelconque; alors $f(g)$ n'est autre que la mesure L de l'ensemble des valeurs de t (de $(0,1)$) pour lesquelles $|g|>l$; ce n'est pas une fonctionnelle de la classe (C).

Pour fixer les idées, conservons l'exemple précédent; soit ε un nombre >0 et l arbitraire, posons

$$V'(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad |x|\leqslant l-\varepsilon,\\ 1 & \text{si} \quad |x|\geqslant 1,\\ |x|/2+l-l/\varepsilon & \text{si} \quad l-\varepsilon<|x|<l,\end{cases}$$

$$V''(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad |x|\leqslant 1,\\ 1 & \text{si} \quad |x|\geqslant l+\varepsilon,\\ |x|/2-l/\varepsilon & \text{si} \quad l<|x|<l+\varepsilon.\end{cases}$$

Soient f' et f'' les fonctionnelles, déduites par (7.1) de V' et V''; f' et f'' sont de la classe (C) (pour L_a quel que soit $a\geqslant 2$), parce que V' et V'' satisfont à une condition de Lipschitz d'ordre 1; d'ailleurs quel que soit $g(t)\epsilon L_a$, on a

$$0\leqslant f''(g)\leqslant f(g)\leqslant f'(g). \tag{7.5}$$

Soient $F(x), F'(x), F''(x)$ les fonctions de répartition de $f(Y')$, $f'(Y')$, $f''(Y')$; et $F_n(x)$, $F'_n(x)$, $F''_n(x)$ celles de $f(W'_n)$, $f'(W'_n)$, $f''(W'_n)$. Y' étant, sur $(0,1)$, un processus de Wiener-Lévy, on sait que pour tout $x>0$, $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$ sont continues, et que

$$\lim_{\varepsilon\to+0}F'(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}F''(x)=F(x).$$

En outre, toujours pour $x>0$, d'après (7.5), on a

$$F'(x)\leqslant F(x)\leqslant F''(x)$$

et quel que soit n

$$F'_n(x)\leqslant F_n(x)\leqslant F''_n(x).$$

Soit $x>0$ quelconque; prenons ε assez petit pour que

$$F''(x)-F(x)<\eta, \qquad F(x)-F'(x)<\eta,$$

η désignant un nombre >0 arbitraire. Puisque f' et f'' sont de la classe (C), et que x est point de continuité pour $F'(x)$ et $F''(x)$, on a pour x assez grand

$$|F'_n(x)-F'(x)|\leqslant\eta, \qquad |F''_n(x)-F''(x)|<\eta,$$

de sorte que

$$|F_n(x)-F(x)|<2\eta,$$

qui prouve que lorsque n tend vers $+\infty$, $F'_n(x)$ tend vers $F'(x)$, pour tout $x>0$; pour $x=0$, $F(x)$ a un saut d'amplitude positive $F(+0)$; en général $F_n(x)$ également aura pour $x=0$ un saut d'amplitude $F_n(+0)$ positive; il n'est pas assuré que

$$\lim_{n\to\infty}F_n(+0)\to F(+0).$$

Publications citées

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris 1953.

[3] D. Donsker, *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Mem. of the American Math. Soc. 6 (1951).

[4] R. Fortet et E. Mourier, *La convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique*, Ann. Ec. Norm. Sup. 70 (1953), p. 267-285.

[5] — *Résultats complémentaires sur les éléments aléatoires dans un espace de Banach*, Bull. Sc. Math. 78 (1954), p. 14.

[6] M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proc. of the 2nd Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, Berkeley 1951, p. 189-215.

[7] E. Mourier, *Les éléments aléatoires dans un espace de Banach*, Ann. Inst. H. Poincaré 13 (1953), p. 161-244.

Reçu par la Rédaction le 14. 10. 1954