$$(10) \quad G_{is}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ik} g_{kj}(t) c_{js} = g_{is}(t).$$

En raison de (10) et (8) nous avons

$$(11) \quad \sum_{j=1}^n g_{ij}(t) X_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n h_{x_k}^i(t, H^1, \dots, H^n) H^j g_{kj}(t),$$

c'est-à-dire: Pour chaque matrice $\|g_{ij}(t)\|$ les fonctions H^i et h^i vérifient l'identité (11). Posons $g_{kj}=0$ pour $j \neq k$ et $g_{kk}=s_k$ ($s_k=\text{const}$) pour $k=1, 2, \dots, n$. On a alors en vertu de (11)

$$s_i X_i = \sum_{k=1}^n h_{x_k}^i(t, H^1, \dots, H^n) H^k s_k \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

d'où (s_k étant quelconque) il suit

$$X_i = h_{x_i}^i(t, H^1, \dots, H^n) H^i(t, X_1, \dots, X_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

et

$$h_{x_i}^i(t, H^1, \dots, H^n) H^k(t, X_1, \dots, X_n) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k$$

ou, en remplaçant X_i par $h^i(t, x_1, \dots, x_n)$

$$(12) \quad h^i(t, x_1, \dots, x_n) = h_{x_i}^i(t, x_1, \dots, x_n) x_i$$

et

$$h_{x_i}^i(t, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k.$$

De la dernière relation il résulte que $h_i(t, x_1, \dots, x_n) = w^i(t, x_i)$ d'où en vertu de (12)

$$w_{x_i}^i(t, x_i) = w_i(t, x_i) / x_i.$$

En considérant t comme paramètre on voit que la fonction $w^i(t, x_i)$ vérifie l'équation linéaire $dy/dx_i = y/x_i$ d'où $w^i(t, x_i) = u^i(t) x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). En vertu de (1) on a $u^i(t) = h_{x_i}^i(t, 0, \dots, 0) = 1$ ($i=1, 2, \dots, n$), donc

$$h_i(t, x_1, \dots, x_n) = x_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

d'où résulte facilement l'identité

Travaux cités

[1] Z. Mikolajska, Sur les transformations des systèmes d'équations différentielles linéaires, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), p. 272-278.

Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans

par F. LEJA (Kraków)

1. Rappelons d'abord quelques notions connues. Soit E un ensemble fermé et borné de points du plan et $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ un système de $n \geq 2$ points quelconques de E . Désignons ce système plus brièvement par $\zeta^{(n)}$, formons les produits

$$V(\zeta^{(n)}) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} |\zeta_j - \zeta_k| \quad A_j(\zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |\zeta_j - \zeta_k|, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

et soit $V_n(E)$ la borne supérieure du produit $V(\zeta^{(n)})$, lorsque $\zeta^{(n)}$ varie arbitrairement dans E . D'autre part, soit

$$(1) \quad \eta^{(n)} = \{\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \dots, \eta_n^{(n)}\}, \quad n=2, 3, \dots,$$

un système de points de E pour lequel

$$V(\eta^{(n)}) = V_n(E) = \max_{\zeta^{(n)} \in E} V(\zeta^{(n)}).$$

Les points (1) seront dits *points extrémaux* du rang n de E correspondant à la *distribution libre*. On sait, que la moyenne géométrique du produit $V(\eta^{(n)})$, c'est-à-dire

$$[V(\eta^{(n)})]^{2/n(n-1)}, \quad n=2, 3, \dots,$$

converge vers une limite finie

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [V(\eta^{(n)})]^{2/n(n-1)} = d(E)$$

dite *diamètre transfini* (ou *capacité libre*) de l'ensemble E . Il est clair que R étant le diamètre proprement dit de E on a $0 \leq d(E) < R$.

Les points extrémaux jouissent de plusieurs propriétés remarquables dont je citerai les suivantes: Formons les polynômes

$$P(z, \eta^{(n)}) = (z - \eta_1^{(n)})(z - \eta_2^{(n)}) \dots (z - \eta_n^{(n)}), \quad n=2, 3, \dots$$

et désignons par D_∞ le domaine non borné contenu dans l'ensemble complémentaire à E , par F la frontière de D_∞ et par Δ l'ensemble ouvert

borné, complémentaire à $D+F$. Désignons encore par E^* l'ensemble de points d'accumulation de la suite triangulaire (1), par e un ensemble borelien quelconque contenu dans E et par $\mu_n(e)$ le nombre de ceux des points extrémaux (1) qui sont situés dans e .

On sait [1] que, si $d(E) > 0$, il existe en chaque point du plan n'appartenant pas à F la limite

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P(z, r^{(n)})|} = P(z)$$

la convergence étant uniforme dans un voisinage de chaque point n'appartenant pas à F . Dans l'ensemble Δ^1 la fonction $P(z)$ se réduit à la constante $d(E)$ et dans le domaine D_∞ le logarithme $\log[P(z)/d(E)]$ est égal à la fonction de Green, classique ou généralisée, de ce domaine et de pôle $z = \infty$. Ajoutons que l'ensemble E^* est identique avec la frontière F et que, lorsque $n \rightarrow \infty$, le quotient $\mu_n(e)/n$ tend quel que soit e vers une limite déterminée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mu_n(e)/n] = \mu(e)^2.$$

2. Soit E la somme de deux ensembles disjoints non vides E_1 et E_2

$$E = E_1 + E_2$$

et $\zeta^{(2n)} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2n}\}$ un système de $2n$ points de E . Désignons par $V_{2n} = V_{2n}(E_1, E_2)$ la borne supérieure du produit $V(\zeta^{(2n)})$ lorsque $\zeta^{(2n)}$ varie dans E de manière que n points de ce système restent dans E_1 et tous les autres dans E_2 . Supposons que les ensembles E_1 et E_2 soient fermés. Les points d'un système

$$(4) \quad x^{(2n)} = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$$

tel que $x_1, x_2, \dots, x_n \in E_1, x_{n+1}, \dots, x_{2n} \in E_2$ et

$$(5) \quad V(x^{(2n)}) = V_{2n}$$

seront dits *points extrémaux* du rang $2n$ de $E_1 + E_2$ correspondant à la *distribution restreinte* dans la relation 1:1.

Nous allons démontrer que:

La suite

$$(6) \quad v_{2n} = V_{2n}^{2/2n(2n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

est convergente.

¹⁾ Si cet ensemble n'est pas vide.

²⁾ La fonction d'ensemble $\mu(e)$ peut être interprétée comme la répartition de la masse électrique unitaire contenue dans le conducteur E .

Démonstration. Posons $A_i = A_i(x^{(2n)})$, $i = 1, 2, \dots, 2n$, et remarquons que

$$(7) \quad [V(x^{(2n)})]^2 = A_1 A_2 \dots A_{2n}$$

et que, lorsque $n > 1$,

$$(8) \quad V(x^{(2n)}) = \frac{A_1 A_{n+1}}{|x_1 - x_{n+1}|} V(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, \dots, x_{n+i-1}, x_{n+i+1}, \dots, x_{2n}).$$

Soit r la plus petite des distances $|x_i - x_k|$ lorsque x_i parcourt E_1 et x_k parcourt E_2 . Il suit de (8) que

$$V_{2n} \leq r^{-1} A_1 A_{n+1} V_{2n-2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donc

$$V_{2n}^n \leq r^{-n} A_1 A_2 \dots A_{2n} V_{2n-2}^n$$

et par suite d'après (7)

$$V_{2n}^{n-2} \leq r^{-n} V_{2n-2}^n.$$

Élevons les deux membres de cette inégalité à la puissance $2/2n(2n-1)(n-2)$. Il vient pour $n > 2$

$$v_{2n} \leq r^{-a_n} v_{2n-2}^{1+a_n}, \quad \text{où} \quad a_n = 1/(2n-1)(n-2),$$

et comme $v_{2n-2} \leq R$, où R est le diamètre de E , on a

$$(9) \quad v_{2n} \leq C^{a_n} v_{2n-2}, \quad \text{où} \quad C = R/r, \quad n = 3, 4, \dots$$

La convergence de la suite (6) résulte des inégalités (9) et du lemme suivant:

Chaque suite $\{a_n\}$ à termes positifs remplissant les conditions

$$(10) \quad a_{n+1} \leq C^{a_{n+1}} a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où C est une constante positive et $\{a_n\}$ une suite quelconque telle que la série $\sum a_n$ converge, est convergente.

Démonstration du lemme. Posons $\sigma_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n$. La suite $\{a_n\}$ est bornée, car d'après (10) on a

$$a_n \leq C^{\sigma_n} a_1, \quad n = 2, 3, \dots,$$

où $\{C^{\sigma_n}\}$ est borné. Posons $\alpha = \lim a_n \leq \lim a_n = \beta$ et soit ε un nombre positif quelconque et m un nombre entier si grand, qu'on ait $a_m < \alpha + \varepsilon$ et en même temps

$$C^{a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}} < 1 + \varepsilon \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

Il suit de (10) que

$$a_{m+k} \leq C^{a_{m+1} + \dots + a_{m+k}} a_m < (1+\varepsilon)(a+\varepsilon), \quad \text{où } k=1, 2, \dots$$

Faisons tendre k vers l'infini de manière que a_{m+k} tende vers β . L'inégalité précédente donne $\beta \leq (1+\varepsilon)(a+\varepsilon)$, donc $\beta \leq a$ car $\varepsilon > 0$ est quelconque et par suite $a = \beta$, ce qui prouve que la limite $\lim a_n$ existe.

Posons

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{2/2n(2n-1)} = v(E_1, E_2).$$

La limite $v(E_1, E_2)$ sera dite *écart restreint* (ou *capacité restreinte*) de la somme $E_1 + E_2$ correspondant à la distribution dans la relation 1:1. Elle sera désignée aussi plus précisément par $v(E_1, E_2; 1:1)$. Voici deux propriétés de cette quantité:

Si le diamètre transfini d'au moins un des ensembles E_1 et E_2 est égal à zéro, on a toujours $v(E_1, E_2) = 0$.

En effet, supposons que le diamètre $d(E_1)$ soit égal à zéro et que les n points initiaux du système (4) appartiennent à E_1 et tous les autres à E_2 . Alors

$$V(x^{(2n)}) \leq V(x_1, \dots, x_n) R^{2n(2n-1)/2 - n(n-1)/2}$$

où R est le diamètre de la somme $E_1 + E_2$. Mais

$$V(x_1, \dots, x_n) \leq V_n(E_1) = \max_{\xi^{(n)} \in E_1} V(\xi^{(n)})$$

done

$$[V(x^{(2n)})]^{2/2n(2n-1)} \leq V_n(E_1)^{2/n(n-1)} [R^{n(n-1)/2n(2n-1)}] R^{1-n(n-1)/2n(2n-1)}.$$

En faisant tendre n vers l'infini on en déduit l'inégalité

$$0 \leq v(E_1, E_2) \leq d(E_1)^{1/4} R^{3/4}$$

ce qui prouve que $v(E_1, E_2) = 0$, car $d(E_1) = 0$.

Si $0 < d(E_1) \leq d(E_2)$, l'écart $v(E_1, E_2)$ satisfait aux inégalités

$$(12) \quad d(E_1)^{1/4} d(E_2)^{3/4} \leq v(E_1, E_2) \leq d(E_1 + E_2).$$

Démonstration. La seconde de ces deux inégalités est évidente. Pour prouver la première désignons par $\xi^{(n)} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ un système de points extrémaux du rang n de E_1 et par $\eta^{(n)} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ celui de E_2 . Il est clair que $x^{(2n)}$ étant le système extrémal (4) on a

$$V(x^{(2n)}) \geq V(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) = V(\xi^{(n)}) V(\eta^{(n)}) I_n$$

où

$$I_n = \prod_{k=1}^n |(\xi_k - \eta_1)(\xi_k - \eta_2) \dots (\xi_k - \eta_n)|.$$

Posons $P(z, \eta^{(n)}) = (z - \eta_1)(z - \eta_2) \dots (z - \eta_n)$. D'après le numéro 1 on a

$$[V(\xi^{(n)})]^{2/n(n-1)} = v_n(E_1) \rightarrow d(E_1), \quad [V(\eta^{(n)})]^{2/n(n-1)} = v_n(E_2) \rightarrow d(E_2)$$

et lorsque z n'est pas situé sur E_2

$$|P(z, \eta^{(n)})|^{1/n} \rightarrow P(z) \geq d(E_2)$$

la convergence étant uniforme sur E_1 . Il en résulte que la suite

$$I_n^{1/n^2} = \left(\prod_{k=1}^n |P(\xi_k, \eta^{(n)})|^{1/n} \right)^{1/n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

tend vers une limite qui n'est pas plus petite que $d(E_2)$ et comme

$$[V(x^{(2n)})]^{2/2n(2n-1)} \geq [v_n(E_1) v_n(E_2)]^{n(n-1)/2n(2n-1)} (I_n^{1/n^2})^{2n^2/2n(2n-1)}$$

on en déduit, en faisant tendre n vers l'infini, l'inégalité

$$v(E_1, E_2) \geq [d(E_1) d(E_2)]^{1/4} [d(E_2)]^{1/2}$$

qui prouve notre thèse.

Remarque. Nous avons supposé que les ensembles E_1 et E_2 étaient fermés. Néanmoins la limite (11) existe dans le cas général où les ensembles E_1 et E_2 sont disjoints quelconques (nous supposons toujours que la somme $E = E_1 + E_2$ est fermée et bornée).

En effet, soit $\bar{E}_i$ la fermeture de E_i pour $i=1, 2$ et $V_{2n} = V_{2n}(E_1, E_2)$ la borne supérieure définie plus haut. D'autre part, soit

$$(13) \quad x^{(2n)} = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$$

un système de points de E tel que $x_1, \dots, x_n \in E_1$, $x_{n+1}, \dots, x_{2n} \in E_2$ et $V(x^{(2n)}) = V_{2n}$ si la borne V_{2n} est atteinte et

$$(14) \quad V(x^{(2n)}) > \frac{1}{2} V_{2n}$$

dans le cas contraire. Nous continuerons d'appeler *points extrémaux* du rang $2n$ les points du système (13) remplissant la condition (14). Si l'un des diamètres transfinis $d(\bar{E}_1)$, $d(\bar{E}_2)$ s'annule on démontre comme on l'a fait précédemment que la limite (11) existe et qu'elle est égale à zéro.

Dans le cas $d(\bar{E}_2) \geq d(\bar{E}_1) > 0$ les diamètres proprement dits de E_1 et E_2 ne sont pas plus petits que $2d(E_1)$. On peut alors ranger les points $x_1, x_2, \dots, x_n$ du système (13) appartenant à E_1 de manière qu'on ait

$$(15) \quad |x_i - x_{n+i}| > r \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, n,$$

où r est un nombre positif ne dépendant pas de n^3 . Il suffit d'appliquer à (8) les inégalités (14) et (15) pour en tirer comme plus haut les inégalités (9) où $C=2R/r$, ce qui prouve que la limite (11) existe.

3. Soit maintenant E la somme de $p \geq 2$ ensembles disjoints

$$(16) \quad E = E_1 + E_2 + \dots + E_p.$$

Désignons par V_{pn} la borne supérieure du produit $V(\zeta^{(pn)})$ lorsque le système $\zeta^{(pn)} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{pn}\}$ varie dans E de manière que précisément n points de ce système restent dans chaque E_k . Les points d'un système quelconque

$$(17) \quad x^{(pn)} = \{x_1, x_2, \dots, x_{pn}\}$$

tel que

$$(18) \quad \{x_{(k-1)n+1}, x_{(k-1)n+2}, \dots, x_{kn}\} \subset E_k$$

pour $k=1, 2, \dots, p$ et $V(x^{(pn)}) = V_{pn}$ si la borne V_{pn} est atteinte et $V(x^{(pn)}) > \frac{1}{2}V_{pn}$ si V_{pn} n'est pas atteinte, seront dits *points extrémaux* du rang pn de l'ensemble (16) correspondant à la distribution dans la relation 1:1:....:1.

Nous allons prouver qu'il existe la limite

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_{pn}^{2/pn(pn-1)}}{pn} = v(E_1, E_2, \dots, E_p).$$

En effet, on peut supposer que

$$d(\bar{E}_1) \leq d(\bar{E}_2) \leq \dots \leq d(\bar{E}_p).$$

Si $d(\bar{E}_1) = 0$ on démontre comme plus haut que la suite

$$v_{pn} = [V(x^{(pn)})]^{2/pn(pn-1)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

converge vers zéro. Si $d(\bar{E}_1) > 0$ les points des systèmes (18), où $k=1, 2, \dots, p-1$, peuvent être rangés de manière que, quels que soient $\alpha \neq \beta = 0, 1, \dots, p-1$, on ait

$$|x_{\alpha n+i} - x_{\beta n+i}| > r \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où r est une constante positive ne dépendant pas de n^4 . Par suite, on a

$$V(x_i, x_{n+i}, x_{2n+i}, \dots, x_{(p-1)n+i}) > r^{p(p-1)/2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

³⁾ La constante r n'est pas plus petite que la moitié de $d(E_1)$.

⁴⁾ Si les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont fermés on peut poser r = la plus petite distance entre E_i et E_k , $i \neq k = 1, 2, \dots, p$.

Posons $\Delta_j = \Delta_j(x^{(pn)})$ pour $j=1, 2, \dots, pn$ et désignons par $\xi^{p(n-1)}$ le système (17) sans les p points $x_i, x_{n+i}, \dots, x_{(p-1)n+i}$. Étant

$$V(x^{(pn)}) = \frac{\Delta_i \Delta_{n+i} \dots \Delta_{(p-1)n+i}}{V(x_i, x_{n+i}, \dots, x_{(p-1)n+i})} V(\xi^{p(n-1)})$$

on a pour $i=1, 2, \dots, n$

$$(20) \quad V(x^{(pn)}) \leq \Delta_i \Delta_{n+i} \dots \Delta_{(p-1)n+i} r^{-p(p-1)/2} V_{p(n-1)}$$

et comme $\prod_{i=1}^n (\Delta_i \Delta_{n+i} \dots \Delta_{(p-1)n+i}) = [V(x^{(pn)})]^2$ on déduit de (20)

$$[V(x^{(pn)})]^{n-2} \leq r^{-pn(p-1)/2} V_{p(n-1)}^n.$$

D'autre part, on a

$$v_{pn} = \frac{V_{pn}^{2/pn(pn-1)}}{pn} < [2V(x^{(pn)})]^{2/pn(pn-1)},$$

donc

$$v_{pn} < 2^{2/pn(pn-1)} r^{-\beta_n} v_{p(n-1)}^{1+\beta_n}, \quad \text{où} \quad \beta_n = (p-1)/(pn-1)(n-2).$$

Soit R le diamètre (proprement dit) de l'ensemble E . Étant $v_{p(n-1)} < R$ l'inégalité précédente donne

$$v_{pn} < 2^{2/pn(pn-1)} C^{\beta_n} v_{p(n-1)}, \quad \text{où} \quad C = R/r,$$

d'où il résulte d'après le lemme démontré plus haut que la limite (19) existe.

La limite (19) sera dite *écart restreint* de la somme (16) correspondant à la distribution dans la relation 1:1:....:1.

4. Soit E , comme dans le numéro 2, la somme de deux ensembles disjoints $E = E_1 + E_2$. L'écart $v(E_1, E_2) = v(E_1, E_2, 1:1)$ est la limite de la moyenne extrême $[V(x^{(2n)})]^{2/2n(2n-1)}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous allons définir une autre moyenne tendant vers la même limite.

À cet effet considérons un système de $2n$ points $\zeta^{(2n)} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2n}\}$ de E dont $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \in E_1$ et $\zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{2n} \in E_2$ et formons l'expression

$$(21) \quad K_{ij}(\zeta^{(2n)}) = \frac{\Delta_i(\zeta^{(2n)}) \Delta_j(\zeta^{(2n)})}{|\zeta_i - \zeta_j|}, \quad i \neq j = 1, 2, \dots, 2n.$$

C'est un produit à $4n-3$ facteurs de la forme $|\zeta_p - \zeta_q|$ dont aucun ne surpasse le diamètre R de E . Désignons par $K(\zeta^{(2n)})$ le plus petit des produits $K_{i,n+j}(\zeta^{(2n)})$, où i et $j=1, 2, \dots, n$, et par

$$(22) \quad K_{2n} = K_{2n}(E_1, E_2)$$

la borne supérieure de $K(\zeta^{(2n)})$ lorsque $\zeta^{(2n)}$ varie dans E de manière que les points $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ restent dans E_1 et les points $\zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{2n}$ dans E_2 . Je dis que:

La suite

$$(23) \quad k_{2n} = k_{2n}(E_1, E_2) = K_{2n}^{1/(4n-3)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

converge vers l'écart $v(E_1, E_2)$.

Démonstration. Supposons d'abord que les ensembles E_1 et E_2 soient fermés et soit r la plus petite des distances $|z_1 - z_2|$, où $z_1 \in E_1$, $z_2 \in E_2$, et

$$(24) \quad y^{(2n)} = \{y_1, y_2, \dots, y_{2n}\}$$

un système de points de E tels que $y_1, y_2, \dots, y_n \in E_1$, $y_{n+1}, \dots, y_{2n} \in E_2$ et

$$K_{2n} = K(y^{(2n)}) \leq K_{i,n+j}(y^{(2n)}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

On peut admettre que les indices i et j soient choisis de manière que, si l'on désigne par Δ_k le produit $\Delta_k(y^{(2n)})$, on ait

$$\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots \leq \Delta_n \quad \text{et} \quad \Delta_{n+1} \leq \Delta_{n+2} \leq \dots \leq \Delta_{2n}.$$

Étant

$$V_{2n}^2 \geq [V(y^{(2n)})]^2 = \prod_{i=1}^n (\Delta_i \Delta_{n+i})$$

et $\Delta_i \Delta_{n+i} \geq K_{2n} |y_i - y_{n+i}|$ on a $V_{2n}^2 \geq K_{2n}^n \prod_{i=1}^n |y_i - y_{n+i}| \geq K_{2n}^n r^n$ d'où il suit que

$$K_{2n}^{1/(4n-3)} \leq r^{-1/(4n-3)} V_{2n}^{2/n(4n-3)} = r^{-1/(4n-3)} v_{2n}^{(4n-2)/(4n-3)}$$

et comme $v_{2n} \leq R$ on a

$$(25) \quad k_{2n} \leq C^{1/(4n-3)} v_{2n}, \quad \text{où} \quad C = R/r, \quad n = 1, 2, \dots$$

ce qui entraîne l'inégalité $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{2n} \leq v(E_1, E_2)$.

Désignons par $\zeta^{(2n-2)}$ le système (24) sans les points y_n et y_{2n} . Étant pour $n > 1$ et i et $j \leq n-1$

$$K_{2n} \leq K_{i,n+j}(y^{(2n)}) = K_{i,n+j}(\zeta^{(2n-2)}) I$$

où $I = |y_i - y_n| |y_i - y_{2n}| |y_j - y_n| |y_j - y_{2n}| \leq R^4$, on a $K_{2n} \leq R^4 K_{2n-2}$. Par suite

$$k_{2n} \leq R^{4/(4n-3)} k_{2n-2}^{(4n-7)/(4n-3)}$$

et comme $k_{2n-2} \geq r$ on a

$$(26) \quad k_{2n} \leq C^{4/(4n-3)} k_{2n-2} \quad \text{où} \quad C = R/r.$$

Considérons maintenant le système extrémal (13). D'après (5) on a pour $i, j = 1, 2, \dots, n$ et $n > 1$

$$V_{2n} = V(x^{(2n)}) \leq K_{i,n+j}(x^{(2n)}) V_{2n-2}$$

et comme $\min_{(i,j)} K_{i,n+j}(x^{(2n)}) \leq K_{2n}$ on a

$$V_{2n} \leq K_{2n} V_{2n-2} \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \dots$$

D'autre part, $V_2 = K_2$ donc $V_{2n} \leq K_2 K_4 \dots K_{2n}$ et par suite

$$(27) \quad v_{2n} \leq (k_2^{4 \cdot 1 - 3} k_4^{4 \cdot 2 - 3} \dots k_{2n}^{4n - 3})^{2/2n(2n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Désignons par I_{2n} le second membre de cette inégalité. D'après (25) on a

$$(28) \quad I_{2n} \leq C^{1/(2n-1)} [v_2^{4 \cdot 1 - 3} v_4^{4 \cdot 2 - 3} \dots v_{2n}^{4n - 3}]^{2/2n(2n-1)}$$

et comme $v_{2n} \rightarrow v(E_1, E_2)$ et $4 \cdot 1 - 3 + 4 \cdot 2 - 3 + \dots + 4n - 3 = n(2n-1)$, il suit de (27) et (28) que

$$(29) \quad I_{2n} = (k_2^{4 \cdot 1 - 3} k_4^{4 \cdot 2 - 3} \dots k_{2n}^{4n - 3})^{2/2n(2n-1)} \rightarrow v(E_1, E_2).$$

La convergence de la suite (23) vers $v(E_1, E_2)$ résulte de (25), (26) et (29) en vertu du lemme suivant:

Toute suite $\{a_n\}$ à termes positifs remplissant les conditions:

$$(30) \quad a_{n+1} \leq C^{1/n} a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(31) \quad A_n = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \rightarrow g,$$

$$(32) \quad \lim a_n \leq g,$$

où C est une constante quelconque > 1 , converge vers g .

En effet, posons

$$\alpha = \lim a_n \leq \lim a_n = \beta$$

et soit $\varepsilon > 0$ quelconque et $m_1, m_2, \dots$ une suite croissante de nombres entiers positifs tels qu'on ait

$$a_m < \alpha + \varepsilon \quad \text{pour} \quad m = m_1, m_2, \dots$$

D'après (30) on a

$$a_{n+k} \leq C^{1/n+1/(n+1)+\dots+1/(n+k-1)} a_n,$$

donc $a_{n+k} \leq C^{k/n} a_n < C^{k/n} (\alpha + \varepsilon)$ pour $m = m_1, m_2, \dots$ et $k = 0, 1, \dots$

Désignons par $k = k_m$ le plus grand entier pour lequel

$$(33) \quad a_{n+k} < C^{k/m} (\alpha + \varepsilon) < \alpha + 2\varepsilon$$

et par η la quantité $\eta = [\log C]^{-1} \log[(\alpha + 2\varepsilon)/(\alpha + \varepsilon)] > 0$. Alors $m\eta - 1 < k_m \leq m\eta$ et le quotient k_m/m tend vers η lorsque $m \rightarrow \infty$. Posons dans l'identité

$$A_{m+k} = \left(\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m} \right)^{m/(m+k)} (a_{m+1} \dots a_{m+k})^{1/(m+k)}$$

$k = k_m$ et $m = m_1, m_2, \dots$ et appliquons (33). Il vient

$$A_{m+k_m} \leq A_m^{m/(m+k_m)} (\alpha + 2\varepsilon)^{k_m/(m+k_m)}$$

d'où l'on déduit en vertu de (31) l'inégalité

$$g \leq g^{1/(1+\eta)} (\alpha + 2\varepsilon)^{\eta/(1+\eta)}.$$

Il en résulte que $g \leq \alpha + 2\varepsilon$ et comme d'après (32) $\beta \leq g$ on a $\beta \leq \alpha + 2\varepsilon$ quel petit que soit $\varepsilon > 0$, ce qui prouve que la limite $\lim a_n = g$ existe.

Par conséquent, dans le cas où les ensembles E_1 et E_2 sont fermés, il existe la limite

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_{2n}(E_1, E_2) = v(E_1, E_2).$$

Ce résultat reste vrai lorsque les ensembles E_1 et E_2 sont disjoints quelconques, ce qu'on peut prouver par la méthode appliquée dans la remarque du numéro 2.

Ajoutons que le résultat (34) peut être généralisé au cas considéré dans le numéro 3, où E est la somme de $p \geq 2$ ensembles disjoints.

Travaux cités

[1] F. Leja, *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 57-71.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

The epidermic effect for partial differential inequalities of the first order

by W. MŁAK (Kraków)

The purpose of this note is to investigate, for partial differential inequalities of the first order, the epidermic effects which are known in the case of ordinary differential inequalities [5]. The problem discussed in this paper has been suggested to me by J. Szarski.

§ 1. To begin with we formulate the following lemma (see [1], proof of theorem 1; also [3], theorem 1.1).

LEMMA K. Suppose that the function $f(x, y_1, \dots, y_n, u, q_1, \dots, q_n)$ is defined in an open set Ω and satisfies the following Lipschitz condition:

$$|f(x, y_1, \dots, y_n, u, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) - f(x, y_1, \dots, y_n, u, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)| \leq M \sum_{i=1}^n |\bar{q}_i - q_i|.$$

We assume that the projection of Ω on the space of points $(x, y_1, \dots, y_n)$ covers entirely the following Haar's pyramid

$$(1.1) \quad x^0 \leq x \leq x^0 + a, \quad |y_i - y_i^0| \leq a_i - M(x - x^0) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$a > 0, \quad M > 0, \quad a_i > aM.$$

We assume that the functions $u(x, y_1, \dots, y_n)$, $v(x, y_1, \dots, y_n)$ are continuous in (1.1) and the inequality

$$u(x^0, y_1, \dots, y_n) < v(x^0, y_1, \dots, y_n)$$

holds for $|y_i - y_i^0| \leq a_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

We suppose that if, for a point $P(x, y_1, \dots, y_n)$ of (1.1), the equality

$$u(x, y_1, \dots, y_n) = v(x, y_1, \dots, y_n)$$

is satisfied, then the functions u and v possess the total differentials in P and the inequalities

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)_P \geq f \left(x, y_1, \dots, y_n, v, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial y_n} \right)_P,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P < f \left(x, y_1, \dots, y_n, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n} \right)_P$$

hold.