According to the third lemma we have $c_{t+1} \equiv 0 \pmod{n}$ $(t=1,2,\ldots,p)$.

The condition is necessary. Let us suppose that

$$c_{t+1} \equiv \sum_{k=0}^{t-1} \binom{a}{t-k} \frac{1}{n^k} \equiv 0 \pmod{n}, \qquad 1 \leqslant t. \tag{7}$$

It immediately follows from (7) that

$$c_{t+1} \equiv \binom{a}{1} \frac{1}{n^{t-1}} \equiv 0 \pmod{n} \quad i.\,e. \quad c_{p+1} \equiv \frac{a}{n^{p-1}} \equiv 0 \pmod{n} \quad (t=1,2,\ldots,p)$$

or $a=\varrho n^p$, q. e. d.

Now we are able to finish the demonstration of the impossibility of

$$(10)_n^{a+s}+1=n^{a+s}+1=(n+1)^a=(11)_n^a. \tag{8}$$

On the left side of (8) there are at least $a+s-1\geqslant 2$ zeros; let us suppose that on the right side of (8) we have exactly p $(\geqslant 2)$ zeros, *i. e.* according to the theorem $a=\varrho n^p$, $\varrho \not\equiv 0 \pmod{n}$ the number of zeros on the left side of (8) is $a+s-1=\varrho n^p+s-1 \geqslant \varrho n^p \geqslant n^p > p$, *i. e.* c_{p+2} equals zero on the left side of (8) and differs from zero on the right side of (14), equality (6) being thus excluded.

It can easily be proved in the same manner as above that if $n\equiv 2 \pmod{4}$, the necessary (but not sufficient), condition for the existence of p successive zeros in the development $(n+1)^a=(11)_n^a$ is $a=2\varrho(n/2)^p$.

Generalization. Instead of $|n^{a+s}-(n+1)^a| \neq 1$, $n\geqslant 2$, $a\geqslant 2$, $s\geqslant 1$ I shall prove the inequality

$$|n^{a+s}-(n+1)^a| \geqslant \max(5,n+2), \qquad (n-2)^a+(a-2)^2+(s-1)^2 \neq 0.$$

Proof.

$$|n^{a+s}-(n+1)^a| \neq 2 \quad \text{and} \quad \neq 4 \tag{9}$$

because $n^{a+s}-(n+1)^a \equiv 1 \pmod{2}$. Considering $(n,n+1)=1$ we obtain the inequalities $|n^{a+s}-(n+1)^a| \neq n$ and $\neq n+1$.

We have to prove that $|n^{a+s}-(n+1)^a| \neq k$ $(1 \neq k \leqslant n-1)$. In fact

$$|n^{a+s}-(n+1)^a| \equiv \pm 1 \pmod{(n+1)}, \tag{10}$$

since $1 \neq k \leqslant n-1$; we must have $k \not\equiv \pm 1 \pmod{(n+1)}$. Taking into account (9), (10) we infer that

$$|n^{a+s}-(n+1)^a| \geqslant \max(5,n+2), \qquad \text{q. e. d.}$$

Sur l'équation $x^z-y^t=1$, où $|x-y|=1$

par A. Schinzel (Warszawa)

Dans la Note précédente R. Hampel a démontré le

Théorème. *L'équation*

$$x^z-y^t=1 \tag{1}$$

n'a pas, en nombres naturels x,y,z,t supérieurs à 1, *d'autres solutions que* $x=3$, $y=2$, $z=2$, $t=3$, *si* $|x-y|=1$.

Le but de la Note présente est de donner une démonstration plus courte de ce théorème.

Démonstration. Je démontrerai d'abord que l'équation (1) n'a pas de solutions en nombres naturels x,y,z,t supérieurs à 1, si

$$x-y=-1. \tag{2}$$

En effet, d'après (1) et (2) on a $(x+1)^t+1=x^z$. Le côté gauche, divisé par x, donne le reste 2 et le côté droit le reste 0 et, comme $x>1$, il en résulte que $x=2$, donc $y=3$ et d'après (1) on a $2^z-3^t=1$.

Or, B. A. Hausmann a démontré dans The American Mathematical Monthly 48 (1941), p. 482, que les nombres 2^m-1 où $m>1$ et 2^m+1 où $m>3$ ne sont pas des puissances de nombres naturels aux exposants naturels >1. Il en résulte que l'équation $2^z-3^t=1$ a en nombres naturels z et t une seule solution $z=2$, $t=1$[1]).

Il ne nous reste qu'a examiner le cas où

$$x-y=1. \tag{3}$$

Supposons que le système de nombres naturels x,y,z,t plus grands que 1 et différent que le système 3,2,2,3 est une solution de l'équation (1). S'il était ici $y=2$, on aurait $2^t+1=x^z$ et, vu que $z>1$, il résulterait du théorème mentionné de Hausmann que $t\leqslant 3$. Pour $t=3$ on aurait $9=x^z$, ce qui donne, d'après $z>1$, $x=3$, $z=2$, contrairement à l'hypothèse que le système x,y,z,t est distinct du système 3,2,2,3. Pour $t=2$ on aurait $5=x^z$, ce qui est impossible pour $z>1$. On a ainsi $y\neq 2$.

[1]) Voir aussi W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Warszawa-Wrocław 1950, p. 44, exercice 9.

Il en résulte que l'équation (1) n'a pas de solution en nombres naturels x,y,z,t superieurs à 1 et autres que 3,2,2,3, où y est une puissance du nombre 2 à l'exposant naturel. En effet si $x,2^s,z,t$ serait une telle solution, $x,2,z,ts$ serait évidemment une solution de l'équation (1) en nombres naturels >1 et s'il était $x=3$, $y=2$, $z=2$, $ts=3$, on aurait ou bien $s=1$, ce qui donne la solution 3,2,2,3, ou bien $t=1$, ce qui est impossible.

Supposons maintenant que x,y,z,t est une solution de l'équation (1) en nombres naturels >1 autre que 3,2,2,3 et qu'on a la formule (3). On a donc

$$y^t+1=(y+1)^z, \tag{4}$$

d'où, d'après $z>1$, on trouve $t>z$, donc $t-1\geqslant z$. Le nombre y ne pouvant pas, comme nous le savons, être une puissance du nombre 2, et vu $y>1$, il existe un diviseur premier p de y. Soit s l'exposant de la plus grande puissance de p qui divise y, et soit g une racine primitive pour le module p^{st}. Comme, d'après $p|y$, on a $(y+1,p^{st})=1$, il existe un nombre naturel i tel que $g^i\equiv y+1 \pmod{p^{st}}$, d'où, d'après $p^s|y$, on a $g^i\equiv 1 \pmod{p^s}$. S'il était $g^i\equiv 1 \pmod{p^{s+1}}$, alors d'après $t>1$, d'où $g^i\equiv y+1 \pmod{p^{s+1}}$, on aurait $y\equiv 0 \pmod{p^{s+1}}$, donc $p^{s+1}|y$, contrairement à la définition du nombre s. On a donc $g^i\equiv 1 \pmod{p^s}$ et $g^i\not\equiv 1 \pmod{p^{s+1}}$. Or, g étant une racine primitive pour le module p^{st}, g est de même une racine primitive pour le module p^s, donc d'après $g^i\equiv 1 \pmod{p^s}$, on a $\varphi(p^s)|i$, et comme $g^i\not\equiv 1 \pmod{p^{s+1}}$, on n'a pas $\varphi(p^{s+1})|i$. On a donc $p^{s-1}(p-1)|i$ et on n'a pas $p^s(p-1)|i$, d'où il résulte qu'on n'a pas $p^s|i$.

D'autre part, d'après $g^i\equiv y+1 \pmod{p^{st}}$, (4) et $p^s|y$, on a $g^{iz}\equiv(y+1)^z\equiv 1 \pmod{p^{st}}$, d'où $p^{st-1}(p-1)|iz$, donc $iz=up^{st-1}$, où u est un nombre naturel. Or comme $p^{s-1}|i$ et comme on n'a pas $p^s|i$, on a $i=vp^{s-1}$, où $(v,p)=1$. On a donc $vz=p^{s(t-1)}u$ et, d'après $(v,p)=1$, on trouve $p^{s(t-1)}|z$. Or, nous avons trouvé précédemment $t-1\geqslant z$: on a donc $p^{(t-1)s}\geqslant p^{zs}\geqslant zs+1\geqslant z+1$, ce qui est incompatible avec $p^{(t-1)s}|z$.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Sur l'équation $x^z-y^t=a^t$, où $|x-y|=a$

par A. Rotkiewicz (Warszawa)

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant

Théorème. *L'équation*

$$x^z-y^t=a^t \tag{1}$$

où a est un nombre naturel, n'a pas en nombres naturels x,y,z,t plus grands que 1, d'autres solutions que $x=3$, $y=2$, $z=2$, $t=3$, si

$$|x-y|=a, \quad \textit{et} \quad (x,y)=1. \tag{2}$$

Pour $a=1$ nous en obtenons le théorème de R. Hampel.

Démonstration. M. M. Birkhoff et Vandiver ont démontré le théorème T suivant (cf. [1] et [2], p. 388):

T. *Si a,b et n sont des nombres naturels, $a>b$, $(a,b)=1$, et $n>2$, le nombre a^n-b^n a au moins un diviseur premier p tel que $p|a^n-b^n$ et qu'on n'a pas $p|a^k-b^k$ pour $k=1,2,\ldots,n-1$, sauf le cas où $a=2$, $b=1$, $n=6$*[1]).

Supposons maintenant que x,y,z,t sont des nombres naturels >1, differents de 3,2,2,3 respectivement, a — un nombre naturel, et qu'on a les formules (1) et (2). D'après (2) on a $x-y=\pm a$, donc

$$x=y\pm a \tag{3}$$

et d'après (1) et (3) on trouve

$$y^t+a^t=(y\pm a)^z. \tag{4}$$

D'après (3) et $(x,y)=1$ on a $(y,a)=1$ et d'après le théorème T le nombre $y^{2t}-a^{2t}$ pour $t>1$ a un diviseur premier p tel que $p|y^{2t}-a^{2t}$ et qu'on n'a pas $p|y^k-a^k$ pour $k=1,2,\ldots,2t-1$, sauf le cas où $y=2$, $a=1$, $t=3$ si $y>a$ et le cas $a=2$, $y=1$, $t=3$ si $y<a$. On n'a donc pas $p|y^t-a^t$ et, comme $(y^t-a^t)(y^t+a^t)=y^{2t}-a^{2t}$, on trouve $p|y^t+a^t$.

D'après (4) on a donc $p|y\pm a$ d'où $p|y^2-a^2$, contrairement à

$$p\,\text{non}|y^k-a^k \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,2t-1, \quad \text{si} \quad t>1.$$

[1]) Je donnerai ailleurs une démonstration élémentaire du théorème T.