Ein ergodischer Satz

von

S. GŁADYSZ (Wrocław)

In den gewöhnlichen ergodischen Sätzen hat man es mit einer maßtreuen Abbildung φ, die in einem festgesetzten Raume S wirkt, zu tun. Die Frage kann man allgemeiner stellen: In S wirken nacheinander verschiedene von einem Parameter x abhängige Abbildungen $\varphi_x, \varphi_{Tx}, \varphi_{T^2x}, \ldots$ Dabei ist T eine maßtreue Abbildung des Parameterraumes X. Es zeigt sich (Satz 1), daß für $f \epsilon L^1$ auch in diesem Falle der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{T^kx} \ldots \varphi_{Tx}\varphi_x s)$$

fast überall für fast alle x existiert. Dies ist eine Verallgemeinerung des stochastischen ergodischen Satzes (z. B. [3]), wobei man x stochastisch unabhängig wählt. Die Beweise sind analog.

Eine der Folgerungen (Satz 5) stellt fest, daß für $|q|=1$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q(x)\cdot q(Tx)\cdot\ldots\cdot q(T^{k-1}x)\cdot f(T^kx)$$

fast überall existiert. Manche Anwendungen dieses Satzes werden wir anderswo bringen.

1. Wir setzen zwei Maßräume[1]) $(S,\mathcal{B},m)$ und $(X,\mathcal{E},\mu)$ fest. T sei eine μ-maßtreue Abbildung von X in sich $(T^{-1}E\epsilon\mathcal{E}$ und $\mu(T^{-1}E)=\mu(E)$ für jede Menge $E\epsilon\mathcal{E})$. $\Phi=\{\varphi_x|x\epsilon X\}$ bezeichnet eine Familie von m-maßtreuen Abbildungen φ_x von S in sich. Wir setzen voraus, daß diese Familie $\mathcal{B}\times\mathcal{E}$-meßbar ist; für jede Menge $B\epsilon\mathcal{B}$ gilt also $\{(s,x)|\varphi_x s\epsilon B\}\epsilon\mathcal{B}\times\mathcal{E}$, wobei $\mathcal{B}\times\mathcal{E}$ den Produktkörper bezeichnet.

[1]) Unter dem *Maßraum* $(S,\mathcal{B},m)$ verstehen wir einen Raum S, einen absolut additiven Mengenkörper $\mathcal{B}$ von meßbaren Teilmengen von S (dabei $S\epsilon\mathcal{B}$) und ein absolut additives Maß m mit $m(S)=1$.

SATZ 1. *Ist $f(s,x)\epsilon L^p(S\times X)$[2]), $p\geqslant 1$, so existiert für $(m\times\mu)$-fast alle (s,x) der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{T^{k-1}x} \ldots \varphi_{Tx}\varphi_x s, T^kx) = f^*(s,x).$$

Dabei $f^*\epsilon L^p(S\times X)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{T^{k-1}x}\ldots\varphi_x s, T^kx) - f^*(s,x) \right\|_{L^p(S\times X)} = 0.$$

Beweis. In dem Produktraume $S\times X$ definieren wir die Hilfsabbildung $\varphi^*(s,x)=(\varphi_x s, Tx)$, deren Iterationen die Gestalt $\varphi^{*k}(s,x)= =(\varphi_{T^{k-1}x}\ldots\varphi_x s, T^kx)$ haben.

Es ist leicht zu sehen, daß die Meßbarkeit der Familie Φ die $\mathcal{B}\times\mathcal{E}$-Meßbarkeit von φ^* zur Folge hat. So ist für jedes $B^*\epsilon\mathcal{B}\times\mathcal{E}$ (Satz von Fubini)

$$\begin{aligned}
(m\times\mu)(\varphi^{*-1}B^*) &= \int_{S\times X} \chi\big(\varphi^*(s,x)\big)(m\times\mu)\big(d(s,x)\big) \\
&= \int_X \mu(dx)\int_S \chi(\varphi_x s, Tx)\,m(ds) = \int_X \mu(dx)\int_S \chi(s,Tx)\,m(ds) \\
&= \int_S m(ds)\int_X \chi(s,Tx)\,\mu(dx) = \int_S m(ds)\int_X \chi(s,x)\,\mu(dx) \\
&= \int_{S\times X} \chi(s,x)(m\times\mu)\big(d(s,x)\big) = (m\times\mu)(B^*),
\end{aligned}$$

wobei χ die charakteristische Funktion der Menge B^* bezeichnet. Die Abbildung φ^* ist also $(m\times\mu)$-maßtreu und Satz 1 ist eine unmittelbare Folge des individuellen und statistischen Ergodensatzes.

Wegen der in der Einleitung gegebenen Interpretation interessiert uns noch die Konvergenz der ergodischen Mittel bei festem x. Hängt die Funktion f von x nicht ab, so gibt es keine Schwierigkeiten.

Ist $f(s)\epsilon L^p(S)$, $p\geqslant 1$, so existiert für μ-fast alle Werte des Parameters x der Grenzwert

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{T^kx}\ldots\varphi_x s) = f^*(s,x)\,\epsilon\, L^p(S)$$

für m-fast alle s und es ist

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{T^kx}\ldots\varphi_x s) - f^*(s,x) \right\|_{L^p(S)} = 0.$$

[2]) $L^p(S)$ ist die Gesamtheit aller meßbaren Funktionen (deren reeller und imaginärer Teil meßbar ist), für welche $\|f\|_{L^p(S)} = [\int_S |f(s)|^p m(ds)]^{1/p} < \infty$ ist.

Beweis. Da (1) unmittelbar aus dem Satze 1 und aus dem Fubinischen Satze folgt, so braucht nur die Beziehung (2), also wegen (1) die gleichgradige Summierbarkeit der Funktionen $|f_n|^p$ bewiesen zu werden, wobei

$$f_n(s,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{T^k x}\dots\varphi_x s)-f^*(s,x)$$

ist.

Weil $f^*\in L^p(S)$ für μ-fast alle x, so ist für fast alle x folgendes richtig. Für jedes $\varepsilon>0$ existiert ein solches $\delta(\varepsilon,x)$, daß

$$\int_B |f(s)|^p m(ds)<\varepsilon, \qquad \int_B |f^*(s,x)|^p m(ds)<\varepsilon,$$

wenn nur $m(B)<\delta$ ist. Aus der Minkowskischen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\int_B |f_n|^p m(ds) &\leqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big[\int_B |f(\varphi_{T^k x}\dots\varphi_x s)|^p m(ds)\Big]^{1/p}+\Big[\int_B |f^*|^p m(ds)\Big]^{1/p}\right\}^p \\ &\leqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big[\int_{\varphi_x^{-1}\dots\varphi_{T^k x}^{-1}B} |f(s)|^p m(ds)\Big]^{1/p}+\Big[\int_B |f^*|^p m(ds)\Big]^{1/p}\right\}^p.\end{aligned}$$

Da die Abbildungen φ_x maßtreu sind, so ist

$$m(\varphi_x^{-1}\dots\varphi_{T^k x}^{-1}B)=m(B),$$

und daraus folgt

$$\int_B |f_n|^p m(ds)\leqslant\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{1/p}+\varepsilon^{1/p}\right\}^p=2^p\varepsilon.$$

Die Funktionen $|f_n|^p$ sind also gleichgradig summierbar.

Hängt die Funktion f von den beiden Variablen s und x wesentlich ab, so können wir die Konvergenz in $L^p(S)$ nur mit Hilfe des Wienerschen dominierenden Ergodensatzes ([5], Theorem V) begründen. Ist dieser Satz anwendbar, so gilt

$$\sup_n |f_n| = \sup_n\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{T^{k-1}x}\dots\varphi_x s, T^k x)-f^*(s,x)\right|\in L^p(S)$$

für fast alle x. Dies und die Konvergenz fast überall ergibt

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^p(S)}=0 \qquad \text{für fast alle } x.$$

Aber die Konvergenz der Integrale selbst ist immer gesichert:

Ist $f(s,x)\in L^1(S\times X)$, so ist für fast alle x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_S f(\varphi_{T^{k-1}x}\dots\varphi_x s, T^k x)\, m(ds)=\int_S f^*(s,x)\, m(ds).$$

Beweis. Wenn man annimmt, daß

$$F(x)=\int_S f(s,x)\, m(ds)=E\{f|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}\}\ {}^{3)} \tag{3}$$

ist, wo mit $(\emptyset,S)$ der Körper, der nur die leere Menge $\emptyset$ und den ganzen Raum S enthält, bezeichnet ist, so bekommt man wegen der Maßtreue von φ_x

$$\int_S f(\varphi_{T^{k-1}x}\dots\varphi_x s, T^k x)\, m(ds)=\int_S f(s,T^k x)\, m(ds)=F(T^k x).$$

Da $F\in L^1(X)$, ergibt der individuelle Ergodensatz weiter

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_S f(\varphi_{T^{k-1}x}\dots\varphi_x s, T^k x)\, m(ds)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(T^k x)=F^*(x)$$

für fast alle x. Es bleibt also noch zu zeigen, daß

$$F^*(x)=\int_S f^*(s,x)\, m(ds) \qquad \text{f. ü.}$$

Da F^* eine ergodische Grenze ist, so ist ([1], S. 465) $F^*(x)=E\{F|\mathcal{E}_T\}$, wobei $\mathcal{E}_T$ der Körper von $\mathcal{E}$-meßbaren und T-invarianten Mengen ist. Daraus und aus (3), wenn man die Funktionen $F(x)$ und $F^*(x)$ im Produkte $S\times X$ betrachtet, erhält man

$$F^*(x)=E\{F|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}_T\}=E\{E\{f|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}\}|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}_T\}=E\{f|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}_T\},$$

weil $(\emptyset,S)\times\mathcal{E}_T\subset(\emptyset,S)\times\mathcal{E}$. Anderseits ist

$$G(x)=\int_S f^*(s,x)\, m(ds),$$

wegen der m-Maßtreue von φ_x und wegen der φ^*-Invarianz von f^*, $\mathcal{E}_T$-meßbar; es ist nämlich

$$G(Tx)=\int_S f^*(s,Tx)\, m(ds)=\int_S f^*(\varphi_x s,Tx)\, m(ds)=\int_S f^*(s,x)\, m(ds)=g(x).$$

[3]) Ist $\mathcal{F}\subset\mathcal{B}$, und f $\mathcal{B}$-meßbar und summierbar, so bedeutet $E\{f|\mathcal{F}\}=f_1$ den konditionellen erwarteten Wert von f in Bezug auf $\mathcal{F}$, also eine Funktion f_1, die summierbar und $\mathcal{F}$-meßbar ist und die dabei die Gleichung $\int_F f=\int_F f_1$ erfüllt für jede Menge $F\in\mathcal{F}$. Eine solche Funktion existiert sicher und ist bis auf eine Menge von Maße Null bestimmt.

Daraus folgt (da $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ und die $\mathcal{F}_1$-Meßbarkeit von $g = E\{f|\mathcal{F}_2\}$, $g = E\{f|\mathcal{F}_1\}$ nach sich zieht)

$$\int_S f^*(s,x)\,m(ds) = E\{f^*|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}\} = E\{f^*|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}_T\}$$

$$= E\{E\{f|(\mathcal{B}\times\mathcal{E})_{\varphi^*}\}|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}_T\},$$

wobei $(\mathcal{B}\times\mathcal{E})_{\varphi^*}\subset\mathcal{B}\times\mathcal{E}$, den Körper von φ^*-invarianten Mengen bezeichnet. Die Gestalt von φ^* ergibt $(\emptyset,S)\times E_T\subset(\mathcal{B}\times\mathcal{E})_{\varphi^*}$, woraus endlich

$$\int_S f^*(s,x)\,m(ds) = E\{f|(\emptyset,S)\times\mathcal{E}_T\} = F^*(x)$$

folgt.

Die Untersuchung der Gestalt der Grenzfunktion f^* trifft gewöhnlich auf Schwierigkeiten. Wenn die Funktion f von x unabhängig ist, interessiert uns am meißten die Frage, wann die ergodische Grenze f^* auch von x (wesentlich) unabhängig ist. Folgendes Beispiel zeigt, daß die Ergodizität (metrische Transitivität) aller Abbildungen φ_x und T dies nicht garantiert. Wir nehmen an:

$$S=\{s_1,s_2,s_3\},\qquad m\{s_1\}=m\{s_2\}=m\{s_3\}=\tfrac{1}{3},$$

$$X=\{x_1,x_2\},\qquad \mu\{x_1\}=\mu\{x_2\}=\tfrac{1}{2},$$

$$\varphi_{x_1}s_1=s_2,\quad \varphi_{x_1}s_2=s_3,\quad \varphi_{x_1}s_3=s_1,$$

$$\varphi_{x_2}=\varphi_{x_1}^{-1},\quad Tx_1=x_2,\quad Tx_2=x_1.$$

Die Transformationen T, φ_{x_1} und φ_{x_2} sind ergodisch, aber die ergodische Grenze der Funktion

$$f(s)=\begin{cases}1, & \text{wenn } s=s_1,\\ 0, & \text{im anderen Falle,}\end{cases}$$

hängt wesentlich von beiden Variablen s und x ab.

Ist die Abbildung φ^* ergodisch oder sind die gegenüber der Abbildung φ^*-invarianten Mengen von der Gestalt $B\times X$, $B\in\mathcal{B}$, so ist die ergodische Grenze einer jeden Funktion von x unabhängig. In dem uns interessierenden Falle können aber diese Mengen auch anderer Gestalt sein.

Satz 2. *Für jede Funktion $f(s)\in L^1(S)$ ist ihre ergodische Grenze f^* von der Veränderlichen x dann und nur dann (wesentlich) unabhängig, wenn für jede in Bezug auf die Abbildung φ^* invariante Funktion $h(s,x)\in L^1(S\times X)$ die Gleichung*

$$H(s)=\int_X h(s,x)\,\mu(dx)=H(\varphi_x s) \tag{4}$$

$(m\times\mu)$-fast überall gilt.

Beweis. Es seien $\mathcal{F}=\mathcal{B}\times(\emptyset,X)$ und $\mathcal{H}=(\mathcal{B}\times\mathcal{E})_{\varphi^*}$ Körper von φ^*-invarianten Mengen. Dann ist $f^*=E\{f|\mathcal{H}\}$ und die Unabhängigkeit der Funktion f^* von x, also ihre $\mathcal{F}$-Meßbarkeit, ist mit

$$E\{E\{f|\mathcal{H}\}|\mathcal{F}\}=E\{f|\mathcal{H}\}$$

gleichbedeutend. Ebenso ist (4) gleichbedeutend mit

$$E\{E\{h|\mathcal{F}\}|\mathcal{H}\}=E\{h|\mathcal{F}\}$$

und Satz 2 folgt unmittelbar aus dem

Hilfssatz. *$\mathcal{F}$ und $\mathcal{H}$ seien zwei Borelsche Körper. Die Beziehung*

$$E\{E\{f|\mathcal{H}\}|\mathcal{F}\}=E\{f|\mathcal{H}\}$$

gilt für jede $\mathcal{F}$-meßbare Funktion $f\in L^1$ dann und nur dann, wenn für jede $\mathcal{H}$-meßbare Funktion $h\in L^1$ die Beziehung $E\{E\{h|\mathcal{F}\}|\mathcal{H}\}=E\{h|\mathcal{F}\}$ gilt.

2. Jetzt setzen wir den Maßraum $(S,\mathcal{B},m)$ fest: $S=[0,1)$, $\mathcal{B}$ = der Körper der Borelschen Mengen und m = das Lebesguesche Maß.

Satz 3. *Es sei T eine μ-maßtreue Abbildung von X in sich und $\varphi(x)$ eine reelle $\mathcal{E}$-meßbare Funktion. Ist $f(s)\in L^p(S)$, $p\geqslant 1$, eine Borelsche Funktion mit der Periode 1, so existiert $(m\times\mu)$-f. ü.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(s+s_k(x))=f^*(s,x),$$

wobei

$$s_k(x)=\varphi(x)+\varphi(Tx)+\ldots+\varphi(T^kx).$$

Dabei $f^*\in L^p(S\times X)$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(s+s_k(x))-f^*(s,x)\right\|_{L^p(S\times X)}=0.$$

Beweis. Wir definieren die Abbildungen

$$\varphi_x s=[s+\varphi(x)] \bmod 1$$

von S in sich, welche bei jedem festen x $\mathcal{B}$-meßbar und m-maßtreu sind. Es ist leicht zu sehen, daß die Meßbarkeit von $\varphi(x)$ die Meßbarkeit der Familie $\Phi=\{\varphi_x|x\in X\}$ garantiert und solcherweise der Satz 3 aus Satz 1 folgt.

Ganz ähnlich beweist man den

SATZ 4. *Wenn zusätzlich $\varphi(x)$ natürlichwertig ist, dann existiert (unter den Voraussetzungen von Satz 3) $(m\times\mu)$-f. ü. der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\big(s\cdot p_k(x)\big)=f^*(s,x),$$

wobei

$$p_k(x)=\varphi(x)\cdot\varphi(Tx)\cdot\ldots\cdot\varphi(T^kx).$$

Dabei $f^*\epsilon L^p(S\times X)$ und

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\big(s\cdot p_k(x)\big)-f^*(s,x)\Big\|_{L^p(S\times X)}=0.$$

Der folgende Satz ist deshalb bemerkenswert, da er den Charakter eines gewöhnlichen ergodischen Satzes trägt. In den Voraussetzungen wie auch in der Thesis ist nämlich die Rede nur von einer Abbildung T und von einer Veränderlichen x. Die zweite Veränderliche s erscheint nur als Hilfsmittel im Beweise.

SATZ 5. *Ist T eine μ-maßtreue Abbildung von X in sich, $q(x)$ eine $\mathcal{E}$-meßbare Funktion mit $|q(x)|=1$, so existiert für jede Funktion $f(x)\epsilon L^p(X)$, $p\geqslant 1$, μ-f. ü. der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(x)\cdot q(Tx)\cdot\ldots\cdot q(T^{k-1}x)\cdot f(T^kx)=F(x). \tag{5}$$

Dabei $F\epsilon L^p(X)$ und

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(x)\cdot\ldots\cdot q(T^{k-1}x)\cdot f(T^kx)-F(x)\Big\|_{L^p(X)}=0. \tag{6}$$

Die Grenzfunktion F erfüllt μ-f. ü. die Gleichungen

$$F(x)=q(x)F(Tx) \tag{7}$$

und

$$\int_E\big(f(x)/F(x)\big)\mu(dx)=\mu(E) \tag{8}$$

für jede T-invariante Menge $E\epsilon\mathcal{E}$, für welche $|F(x)|>a>0$.

Beweis. Wir betrachten die Familie Φ von Abbildungen

$$\varphi_x s=[s+\varphi(x)]\bmod 1$$

von S in sich, wo $q(x)=\exp\varphi(x)$, $0\leqslant\varphi(x)<1$, $\exp s=e^{2\pi is}$. Wegen der Meßbarkeit von $\varphi(x)$ ist die Familie Φ dieser m-maßtreuen Abbildungen $\mathcal{B}\times\mathcal{E}$-meßbar. Satz 1, angewandt auf die Funktion $g(s,x)=f(x)\cdot\exp s$, ergibt die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(\varphi_{T^{k-1}x}\ldots\varphi_x s,T^kx)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(T^kx)\cdot\exp\big(s+\varphi(x)+\ldots+\varphi(T^{k-1}x)\big)$$
$$=\exp s\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(x)\cdot\ldots\cdot q(T^{k-1}x)\cdot f(T^kx)=\exp s\cdot F(x).$$

Daraus folgt (5), und ebenso erhält man (6).

(7) folgt aus der φ^*-Invarianz der Funktion $\exp s\cdot F(x)$:

$$\exp\big(s+\varphi(x)\big)\cdot F(Tx)=\exp s\cdot F(x).$$

Ist E eine T-invariante Menge und $|F(x)|>0$ für $x\epsilon E$, so ist

$$\int_E\frac{f(x)}{F(x)}\mu(dx)=\iint_{E\times S}\exp s\cdot f(x)\frac{1}{\exp s\cdot F(x)}\mu(dx)\cdot m(ds)$$
$$=\iint_{E\times S}\exp s\cdot F(x)\frac{1}{\exp s\cdot F(x)}\mu(dx)\cdot m(ds)=\mu(E),$$

da die Menge $E\times S$ φ^*-invariant ist, und weil $\exp s\cdot F(x)$ der konditionelle erwartete Wert von $\exp s\cdot f(x)$ in Bezug auf φ^*-invariante Mengen ist. Damit ist (8) bewiesen.

Folgenden Satz von Hopf und Chinczin ([2], S. 56) erhält man, wenn man $q(x)=a$ in Satz 5 annimmt:

Ist $f(x)\epsilon L^p$, $p\geqslant 1$, und $a=\mathrm{const}$ mit $|a|=1$, so ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a^k\cdot f(T^kx)=F(x)\epsilon L^p$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a^k\cdot f(T^kx)-F(x)\Big\|_{L^p}=0.$$

Der Fall $f\equiv 1$ ergibt den

SATZ 6. *Ist T eine μ-maßtreue Abbildung von X in sich, $q(x)$ eine $\mathcal{E}$-meßbare Funktion mit $|q|=1$, so existiert μ-f. ü. der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q(x)\cdot q(Tx)\cdot\ldots\cdot q(T^kx)=F(x). \tag{9}$$

Ist dabei T ergodisch, so folgt aus der Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_X q(x)\cdot\ldots\cdot q(T^k x)\,\mu(dx)=0 \tag{10}$$

$F(x)=0$ *μ-f. ü.*

Beweis. (9) folgt unmittelbar aus (5).

Die Ausdrücke unter dem Integralzeichen in (10) sind gemeinsam beschränkt und darum ist

$$\int_X F(x)\,\mu(dx)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_X q(x)\cdot\ldots\cdot q(T^k x)\,\mu(dx)=0.$$

Ist T eine ergodische Abbildung, so ergibt sich aus (7) $|F(x)|=a=$ $=$const. Wäre $a>0$, so würde aus (8)

$$1=\mu(X)=\int_X\frac{\mu(dx)}{F(x)}=\frac{1}{a^2}\int_X\overline{F}(x)\,\mu(dx)=0$$

folgen. Es muß also $a=0$ sein.

Der bewiesene Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Robbins[4]) ([4], S. 787):

Haben die (en bloc) stochastisch unabhängigen Funktionen $q_n(x)$ dieselben Verteilungsfunktionen und ist dabei $|q_1(x)|=1$, so ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q_1(x)\ldots q_n(x)=0 \tag{11}$$

f. ü., ausgenommen den trivialen Fall $q_1(x)=1$ f. ü.

Beweis. Wir betrachten q_n als Koordinaten eines Punktes im abzählbaren Produkte mit der Achsenverschiebung (Shifttransformation) als Abbildung T. Satz 6 liefert sofort die Existenz der Grenze (11).

Wenn $q_1(x)\neq 1$ auf einer Menge vom Maße >0 ist, so ist

$$\int_X q_1(x)\,\mu(dx)=\beta\neq 1,$$

wobei $|\beta|\leqslant 1$. Aus der Gleichverteilung und der stochastischen Unabhängigkeit erhält man weiter

[4]) Diesen Satz erhielt auch unabhängig von Robbins C. Ryll-Nardzewski, der den Beweis auf die Spektralanalysis unitärer Operatoren im Hilbertschen Raume stützte. Ein Beweis von Steinhaus ist demjenigen von Robbins ähnlich. Kakutani erhielt diesen Satz aus dem stochastischen Ergodensatze ([4], S. 795).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_X q_1(x)\cdot\ldots\cdot q_n(x)\,\mu(dx)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{\varkappa=1}^{k}\int_X q_\varkappa(x)\,\mu(dx)=\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta^k=0.$$

(10) ist also erfüllt. Dieses und die Tatsache, daß T ergodisch ist, ergibt (11).

Literaturnachweis

[1] J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York 1953.

[2] E. Hopf, *Ergodentheorie*, Ergebnisse der Math., Berlin 1937.

[3] S. Kakutani, *Random ergodic theorem and Markoff processes with a stable distribution*, Second Symp. on Math. Stat. and Prob., Berkeley 1950, S. 247-261.

[4] H. Robbins, *On the equidistribution of sums of independent random variables*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), S. 786-799.

[5] N. Wiener, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. 5 (1938), S. 1-18.

Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1955