Über eine Anwendung der Methode von Turán, auf die Theorie des Restgliedes im Primidealsatz

von

W. STAŚ (Poznań)

1. Es bedeute wie üblich, $\Lambda(n)$ die Dirichletsche zahlentheoretische Funktion, welche $\log p$ ist, wenn $n = p^a$ eine Primzahlpotenz ist und sonst $= 0$; es sei ferner

$$(1.1) \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

$$(1.2) \quad \theta = \sup \{ \beta : \zeta(\varrho) = 0, \varrho = \beta + \gamma i, \tfrac{1}{2} \leq \beta < 1 \},$$

$\zeta(s)$ bedeutet die Riemannsche Zetafunktion;

$$(1.3) \quad \theta' = \inf \{ a : \psi(x) - x = O(x^a) \}.$$

Es ist in der Zahlentheorie wohl bekannt, daß

$$(1.4) \quad \theta = \theta'.$$

Aus (1.4) folgt: Wenn $\varrho_0 = \beta_0 + \gamma_0 i$ eine Wurzel der Riemannschen Zetafunktion im Streifen $0 < \sigma < 1$ auf der komplexen Ebene ist, dann gibt es für eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C = C(\varepsilon) > 0$ und eine Folge

$$1 < x_1 < x_2 < \dots \rightarrow +\infty$$

daß

$$(1.5) \quad |\psi(x_n) - x_n| > C(\varepsilon) x_n^{2\theta_0 - \varepsilon}.$$

Das ist aber keine *explizite* Abschätzung des Restgliedes $\psi(x) - x$. Eine, von einer einzigen Wurzel der Funktion $\zeta(s)$ abhängige explizite Ω Abschätzung, hat erst P. Turán gefunden ([5], Satz XXX).

P. Turán hat folgenden Satz bewiesen:

Wenn $\zeta(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ ($\beta_0 \geq \tfrac{1}{2}$, $\gamma_0 > 0$) und

$$(1.6) \quad T > \max(C_2, \exp \exp 60 \log^2 |\varrho_0|)$$

dann

$$(1.7) \quad \max_{1 \leq x \leq T} |\psi(x) - x| > T^{\theta_0} \exp \left(-21 \frac{\log T}{\sqrt{\log \log T}} \right)$$

und C_2 ist eine explizite numerische Konstante.

2. Es erhebt sich die Frage, ob man einen solchen Satz über das Restglied im Primidealsatz finden kann, bei dem die Abhängigkeit von Parametern des Körpers *explizite* gegeben ist. Die Antwort ist positiv. Bevor ich meinen Satz formuliere, führe ich folgende Bezeichnungen ein: ϕ sei eine beliebige algebraische Zahl, K — der durch ϕ erzeugte algebraische Zahlkörper, ν — der Grad des Körpers K , Δ — die Diskriminante des Körpers K , $\zeta_K(s)$ — die Dedekindsche Zetafunktion, $G(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ — die Koeffizienten der Dirichletschen Reihe der Funktion: $-\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(s)$

3. Es bedeuten C, C_1 explizit angebbare numerische Konstanten, η eine beliebige Zahl aus dem Intervall $0 < \eta \leq 2$ und

$$(3.1) \quad c_\eta = \exp \exp \exp(128/\eta),$$

$$(3.2) \quad c_K = \max \left\{ \exp(c_1 |\Delta|^{3/2}), \exp \exp \left(\frac{3}{2} \nu + 2 \right)^8 \right\},$$

$$(3.3) \quad c_{\theta_0} = \exp \exp(|\theta_0|^{1/\eta} + |\theta|^{28/\eta}).$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz. Wenn $\zeta_K(s)$ für $\theta_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ ($\frac{1}{2} \leq \beta_0 \leq 1$) verschwindet und

$$(3.4) \quad T > \max(c, c_\eta, c_K, c_{\theta_0}),$$

dann gilt

$$(3.5) \quad \max_{1 \leq x \leq T} \left| \sum_{n \leq x} G(n) - x \right| > T^{\theta_0} \exp \left\{ -(\eta+1) \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T} \right\}.$$

Dieser Satz gibt für $\nu = 1$, eine kleine Verschärfung der Abschätzung (1.7) von P. Turán.

Aus dem Satz (3.4) folgt einfach folgende Tatsache:

Bezeichne man

$$(3.6) \quad H(T) = \max_{1 \leq x \leq T} \left| \sum_{n \leq x} G(n) - x \right|.$$

Dann ist bei

$$(3.7) \quad T > \max(c, c_\eta, c_K)$$

im Bereich

$$(3.8) \quad \sigma \geq \frac{\log H(T)}{\log T} + (\eta+1) \frac{\log \log \log T}{\log \log T},$$

$$(3.9) \quad |t| \leq (\log \log T)^{\eta/28} - 1$$

die Funktion $\zeta_K(s) \neq 0$.

Nehmen wir nun an, es sei entgegen der Behauptung, $\theta = \beta + i\gamma$ eine Nullstelle von $\zeta_K(s)$ in dem Bereich (3.8), (3.9) dann muß

$$\max_{1 \leq x \leq T} \left| \sum_{n \leq x} G(n) - x \right| \leq T^{\theta} \exp \left\{ -(\eta+1) \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T} \right\}$$

bei

$$T > \max(c, c_\eta, c_K, c_{\theta_0})$$

gelten. Dies steht aber im Widerspruch zu (3.5).

Wir haben damit einen Weg gefunden, der zur Bestimmung endlicher nullstellenfreier Bereiche von $\zeta_K(s)$ führt.

Herrn Professor Paul Turán, der mir mehrmals Ratschläge und Suggestionen erteilt hat, bin ich zu besonderer Dankbarkeit verpflichtet.

Meinem Kollegen S. Knapowski, der mein Interesse für die Analytische Zahlentheorie erweckt hat, möchte ich hier meinen herzlichen Dank sagen.

4. Zum Beweis von Satz (3.4) benutzen wir folgenden Satz von P. Turán ([5], Satz X);

Für $m > 0$, $k \leq N$ und

$$|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_k|, \quad |z_1| \geq 1$$

und für beliebige komplexe Zahlen b_j gibt es eine ganze Zahl μ , so daß

$$m \leq \mu \leq m+N$$

und

$$|b_1 z_1^\mu + b_2 z_2^\mu + \dots + b_k z_k^\mu| \geq \left(\frac{1}{48e^2} \cdot \frac{N}{2N+m} \right)^N \min_{1 \leq j \leq k} |b_1 + b_2 + \dots + b_j|.$$

Jetzt stellen wir zuerst aus der Theorie der Dedekindschen Zetafunktionen diejenigen Sätze ohne Beweis zusammen, welche im folgenden notwendig sein werden:

a. Bezeichne man mit $F(n)$ die Anzahl der Ideale des Körpers mit der Norm n , dann ist für $\sigma > 1$

$$\zeta_K(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) n^{-s}$$

und die Reihe ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent ([2], Satz 95, S. 140-142).

b. Die Funktionen $\zeta_K(s)$ sind in der ganzen Ebene regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$. Das Residuum in diesem Pol ist $h\lambda$ wo h die Klassenzahl bezeichnet ([2], Satz 155).

c. Für $\sigma > 1$, $\zeta_K(s) \neq 0$ ([2], Satz 141).

d. Es sei

$$G(n) = \sum_{(Np)^m=n} \log Np$$

dann ist für $\sigma > 1$

$$(4.0) \quad -\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} G(n)n^{-s}$$

und die Reihe ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent ([2], Satz 184).

Zum Beweis des Satzes (3.4) sind noch folgende Hilfssätze nötig die wir beweisen müssen.

Das Lemma 1 ist eine kleine Verschärfung des bekannten Satzes von Phragmen-Lindelöf.

LEMMA 1. Ist $\varphi(s)$ regulär in

$$(4.1) \quad \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \quad -\infty < t < +\infty,$$

und gilt dort

$$(4.2) \quad |\varphi(s)| \leq c_1 e^{c_2 |t|}$$

so folgt aus

$$|\varphi(s)| \leq M$$

für $\sigma = \sigma_1$ und $\sigma = \sigma_2$ im ganzen Bereich (4.1) die Ungleichung

$$|\varphi(s)| \leq M.$$

Beweis. Es bedeute

$$f_\varepsilon(s) = e^{\varepsilon s^2} \varphi(s);$$

ε ist eine beliebige positive Zahl. Wir haben $s^2 = (\sigma^2 - t^2) + 2\sigma it$, $|f_\varepsilon(s)| = e^{\varepsilon(\sigma^2 - t^2)} |\varphi(s)|$ und $|f_\varepsilon(s)| \leq e^{\varepsilon \sigma^2} |\varphi(s)|$, weil $e^{-\varepsilon t^2} \leq 1$.

Es sei $\eta > 0$. Auf der Geraden $\sigma = \sigma_1$, $|f_\varepsilon(s)| \leq e^{\varepsilon \sigma_1^2} M \leq M(1 + \eta)$ bei genügend kleinem ε . Ebenso für $\sigma = \sigma_2$, $|f_\varepsilon(s)| \leq e^{\varepsilon \sigma_2^2} M \leq M(1 + \eta)$.

Wenn $\bar{\sigma}^2 = \max(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$ dann ist im Streifen $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $|f_\varepsilon(s)| \leq c_1 e^{\varepsilon \bar{\sigma}^2} e^{c_2 |t| - \varepsilon t^2}$.

Also bei fixem ε und $|t| \geq t_0$, $|f_\varepsilon(s)| \leq M(1 + \eta)$ in dem genzen Parallelogramm $\langle -t, t \rangle$, $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$. Aber

$$|\varphi(s)| = |f_\varepsilon(s)| e^{\varepsilon(t^2 - \sigma^2)} \leq M(1 + \eta) e^{\varepsilon(t^2 - \sigma^2)}$$

im $\langle -t, t \rangle$, $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$. Bei fixen σ, t für $\varepsilon \rightarrow 0$, $|\varphi(s)| \leq M(1 + \eta)$. Wenn jetzt $\eta \rightarrow 0$, dann ist $|\varphi(s)| \leq M$ im $\langle -t, t \rangle$, $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ bei $|t| \geq t_0$. Aber t kann beliebig groß sein. Wir haben also $|\varphi(s)| \leq M$ im (4.1).

LEMMA 2. Für die Koeffizienten $G(n)$ gilt folgende Abschätzung:

$$(4.3) \quad G(n) \leq K_1 \log^2 n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

und $K_1 = \nu \log 2$

Beweis. Wie bekannt ist

$$G(n) = \sum_{(Np)^m=n} \log Np.$$

Aber für $n \neq p^\lambda$, $G(n) = 0$. Es genügt deshalb nur eine Abschätzung von

$$G(p^\lambda) = \sum_{Np=p^{\lambda/d}} \log Np$$

durchzuführen. Die Summe erstreckt sich über alle Teiler d von λ und über alle Ideale p von der Norm $p^{\lambda/d}$; das bedeutet

$$G(p^\lambda) = \sum_{d|\lambda} \sum_{Np=p^{\lambda/d}} \log p^\lambda.$$

Wir bezeichnen weiter $\lambda/d = u$. Die Anzahl der Primideale p , die die Gleichung $Np = p^u$ erfüllen, ist $\leq \nu$. Es folgt daraus

$$G(p^\lambda) \leq \nu \sum_{d|\lambda} \log p^\lambda,$$

und schließlich $G(p^\lambda) = \lambda \nu \log p^\lambda$.

Wenn wir $p^\lambda = n$ setzen, dann gilt (4.3).

LEMMA 3. Für $\sigma = 2$,

$$(4.4) \quad |\zeta_K(s)| > K_2 > 0$$

und $K_2 = (6/\pi^2)^\nu$.

Beweis. Für $\sigma = 2$, gilt

$$\frac{1}{|\zeta_K(s)|} = \left| \prod_p (1 - (Np)^{-s}) \right| \leq \prod_p (1 + (Np)^{-2}) < \prod_p \left(\frac{1}{1 - 1/(Np)^2} \right) = \zeta_K(2)$$

([2], Satz 141).

Wie bekannt ist, jedes Primideal $\mathfrak{p}$ enthält genau eine Primzahl p und $N\mathfrak{p} = p^i$, $1 \leq i \leq \nu$ ([2], Satz 107). Für diese Zahl p ist $N\mathfrak{p} \geq p$. Die Anzahl der Primideale, die die Primzahl p enthalten ist $\leq \nu$. Also ist

$$\zeta_K(2) \leq \prod_p \left(\frac{1}{1-1/p^2} \right)^\nu = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^\nu = \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^\nu.$$

LEMMA 4. In $2 \leq \sigma \leq 4$, gilt

$$(4.5) \quad |(s-1)\zeta_K(s)| \leq \left(\frac{1}{6} \pi^2 \right)^\nu (|t|+3).$$

Beweis. Für $\sigma \geq 2$ und wegen Lemma 3

$$|\zeta_K(s)| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^\sigma} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^2} = \zeta_K(2) \leq \left(\frac{1}{6} \pi^2 \right)^\nu$$

([2], Satz 142).

LEMMA 5. Im Streifen $-1 < \sigma < 2$ — zuerst grob — gilt

$$(4.6) \quad |(s-1)\zeta_K(s)| \leq a e^{(\nu+1)|t|},$$

wo a eine Konstante ist die von ζ_K abhängt.

Beweis. Wir haben vor allem

$$|(s-1)\zeta_K(s)| \leq \sum_{\tilde{\mathcal{K}}} |(s-1)\zeta_K(s, \tilde{\mathcal{K}})|$$

([2], Satz 142).

Für $t \geq t_0 \geq 1$,

$$|(s-1)\zeta_K(s, \tilde{\mathcal{K}})| \leq \alpha_1 e^{(\nu+1)t}$$

([2], Seite 88).

Die Anzahl der Klassen $\tilde{\mathcal{K}}$ ist endlich ([2], Satz 125). Also

$$|(s-1)\zeta_K(s)| \leq \alpha_2 e^{(\nu+1)t}$$

für $-1 < \sigma < 2$, $t \geq t_0 \geq 1$. Die Funktion $(s-1)\zeta_K(s)$ ist auf der ganzen Ebene regulär, ist also im Parallelogramm $1 \leq \sigma \leq 2$, $0 \leq t \leq t_0$ beschränkt

$$|(s-1)\zeta_K(s)| \leq \alpha_3.$$

Bei $\alpha = \max(\alpha_2, \alpha_3)$, im ganzen Bereich $-1 < \sigma < 2$, gilt also (4.6) wenn wir nur bemerken, daß

$$\zeta_K(\bar{s}) = \overline{\zeta_K(s)}.$$

LEMMA 6. Für $\sigma = -1$, $-\infty < t < +\infty$,

$$(4.7) \quad |(s-1)\zeta_K(s)| \leq C^\nu |\Delta|^{3/2} (|t|+1)^{3\nu/2+1},$$

wobei t_0, C numerische Konstanten sind.

Beweis. Wie bekannt ist ([2], Satz 156)

$$(4.8) \quad f(s) = \frac{\zeta_K(s)}{\zeta_K(1-s)} = \left(\frac{1}{2} (2\pi)^s \right)^\nu |\Delta|^{1/2-s} (\cos \frac{1}{2}\pi s)^{-(r_1+r_2)} (\sin \frac{1}{2}\pi s)^{-r_2} (\Gamma(s))^{-\nu}.$$

Für $\sigma = -1$ ([2], S. 83, Formel (134), (135))

$$(4.9) \quad \cos \frac{1}{2}\pi s = \frac{1}{2} e^{\pi i t/2} e^{\pi i/2} (1+O(1/t)),$$

$$(4.10) \quad \sin \frac{1}{2}\pi s = \frac{1}{2} i e^{\pi i t/2} e^{\pi i/2} (1+O(1/t))$$

und

$$(4.11) \quad \Gamma(s) = b e^{-\pi i t/2} t^{-3/2} e^{i t (\log t - 1)} (1+O(1/t))$$

([2], Satz 160), wobei $|b| = c$, c — eine numerische Konstante ist. Aus

(4.8), (4.9), (4.10) und (4.11), für $t \geq t_0 > 1$ gilt

$$(4.12) \quad |f(-1+it)| \leq \frac{1}{(c\pi)^\nu} |\Delta|^{3/2} t^{3\nu/2}.$$

Aber

$$(4.13) \quad |\zeta_K(2-it)| \leq \zeta_K(2) \leq \left(\frac{1}{6} \pi^2 \right)^\nu.$$

Aus (4.8) folgt weiter

$$(4.14) \quad |\zeta_K(-1+it)| \leq |f(-1+it)| |\zeta_K(2-it)|.$$

Schließlich aus (4.12), (4.13) und (4.14) ergibt sich (4.7) für $\sigma = -1$, $t \geq t_0 > 1$. Für $\sigma = -1$, $0 \leq t \leq t_0$, $t_0 > 1$, folgt (4.7) sofort aus (4.8), (4.13), (4.14) und aus bekannten Eigenschaften der Funktionen $\sin z$, $\cos z$ und $\Gamma(z)$.

Wenn wir noch bemerken, daß

$$(4.15) \quad \zeta_K(\bar{s}) = \overline{\zeta_K(s)}.$$

dann gilt die Abschätzung (4.7) auf der ganzen Geraden $\sigma = -1$.

LEMMA 7. In dem Streifen $-1 \leq \sigma \leq 2$,

$$(4.17) \quad |(s-1)\zeta_K(s)| \leq K_3 (|t|+1)^{K_4},$$

wobei

$$(4.18) \quad K_3 = C_6^\nu |\Delta|^{3/2},$$

$$(4.19) \quad K_4 = \frac{3}{2} \nu + 2$$

und C_6 eine numerische Konstante ist.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$(4.20) \quad G(s) = \frac{(s-1)\zeta_K(s)}{(s+3)^{3\sigma/2+2}}.$$

Auf der Geraden $\sigma = -1$

$$(4.21) \quad |s+3|^{3\sigma/2+2} = (t^2+4)^{3\sigma/4+1}.$$

Aus (4.7), (4.20) und (4.21) folgt auf der Geraden $\sigma = -1$

$$|G(s)| \leq C_6'' |\Delta|^{3/2}.$$

Auf der Geraden $\sigma = 2$

$$(4.22) \quad |s+3|^{3\sigma/2+2} = (s^2+t^2)^{3\sigma/4+1}.$$

Aus dem Lemma 4 folgt für $\sigma = 2$

$$|G(s)| \leq \frac{(\frac{1}{6}\pi^2)^v(1+|t|)}{(s^2+t^2)^{3\sigma/4+1}}$$

für alle t . Also auf der Geraden:

$$(4.23) \quad \sigma = -1, \quad |G(s)| \leq C_6'' |\Delta|^{3/2};$$

$$(4.24) \quad \sigma = 2, \quad |G(s)| \leq 1.$$

Aus dem Lemma 5 folgt, daß im Streifen $-1 < \sigma < 2$

$$|G(s)| \leq \alpha e^{(v+1)|t|}.$$

Nach Lemma 1, wenn man $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 2$, $\varphi(s) = G(s)$ und $M = C_6'' |\Delta|^{3/2}$ einsetzt, gilt:

$$|G(s)| \leq C_6'' |\Delta|^{3/2}$$

im ganzen Bereich $-1 \leq \sigma \leq 2$, $-\infty < t < +\infty$. Wegen (4.20) gilt endlich (4.17).

LEMMA 8. Es sei $V(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta_K(s)$ im Parallelogramm $\sqrt{\delta} \leq x \leq 1$, $T \leq y \leq T+1$, wo $0 < \delta < \frac{1}{100}$; dann ist (mit K_2, K_3, K_4 aus (4.4), (4.18) und (4.19) resp.)

$$(4.25) \quad V(T) \leq C_1(\delta) \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|T|+3)^{K_4} \right)$$

bei jedem reellen T und $C_1(\delta) = 4\delta^{-5/6}$.

Beweis. Es sei $z_l = 2 + i(T + l\delta^{1/3})$, $l = 1, 2, \dots, [\delta^{-1/3}]$. In unserem Parallelogramm hat ζ_K ebensoviele Nullstellen wie $(s-1)\zeta_K(s)$.

Im Kreis $|z - z_l| \leq 2 = R$ wegen (4.4) und (4.17) ist

$$\left| \frac{(z-1)\zeta_K(z)}{(z_l-1)\zeta_K(z_l)} \right| \leq \frac{K_3}{K_2} (|T|+3)^{K_4}.$$

Es bezeichne k_1 den Kreis $|z - z_l| \leq 2(1 - \frac{1}{4}\sqrt{\delta}) = r$ und V_1 die Anzahl der Nullstellen von $(s-1)\zeta_K(s)$ in diesem Kreis. Aus der Jensenschen Abschätzung ist ([1], S. 49)

$$V_1 \log \frac{R}{r} = V_1 \log \frac{2}{2 - \frac{1}{2}\sqrt{\delta}} \leq \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|T|+3)^{K_4} \right).$$

Daraus folgt

$$V_1 \leq \frac{4}{\sqrt{\delta}} \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|T|+3)^{K_4} \right).$$

Die Kreise k_1 bedecken aber das Parallelogramm $\sqrt{\delta} \leq x \leq 1$, $T \leq y \leq T+1$, also es gilt (4.25).

LEMMA 9. Wenn $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta_K(s)$ im Parallelogramm $\sqrt{\delta} \leq x \leq 1$, $|y| \leq T$ bei $T > 0$ bezeichnet, dann ist

$$(4.26) \quad N(T) \leq C_2(\delta) (T+1) \log \left(\frac{K_3}{K_2} (T+3)^{K_4} \right)$$

und $C_2(\delta) = 8\delta^{-5/6}$.

Beweis. Wegen (4.25) haben wir

$$N(T) \leq 2(V(0) + V(1) + \dots + V([T]-1) + V([T])) \\ \leq 8\delta^{-5/6} (1 + [T]) \log \left(\frac{K_3}{K_2} ([T]+3)^{K_4} \right).$$

LEMMA 10. Wenn $0 < \delta < \frac{1}{4^4 \cdot 10^{24}}$, dann gilt in dem Streifen

$$16\delta^{1/4} \leq x \leq 3$$

$$(4.27) \quad \left| \frac{\zeta'_K(z)}{\zeta_K(z)} + \frac{1}{z-1} - \sum_{\substack{|x-z_k| \leq 4\delta^{1/4} \\ |y-z_k| \leq 4\delta^{1/4}}} \frac{1}{z-z_k} \right| \leq C_3(\delta) \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|y|+5)^{K_4} \right)$$

wo z_k die Nullstellen von $\zeta_K(z)$ sind und $C_3(\delta) = \frac{5}{33} \delta^{-1/2}$.

Beweis. Zum Beweis dieses Lemmas benützen wir den folgenden Satz ([5], S. 184). Wenn $G(z)$ regulär im Kreis $|z - z'| \leq R$ ist, z' fix, und wenn $z_1, z_2, \dots$ die Wurzeln von $G(z)$ in diesem Kreis sind, und wenn $G(z)$ die Ungleichung

$$\left| \frac{G(z)}{G(z')} \right| \leq e^M, \quad (M > 1)$$

erfüllt, dann gilt im Kreis $|z - z'| \leq (1 - 2\varepsilon)R$ für $0 < \varepsilon < 10^{-6}$ die Abschätzung:

$$\left| \frac{G'}{G}(z) - \sum_{\substack{|x - x_k| \leq R\varepsilon/2 \\ |y - y_k| \leq R\varepsilon/2}} \frac{1}{z - z_k} \right| < \frac{5}{\varepsilon^2} \frac{M}{R}.$$

Wir setzen

$$G(z) = (z - 1)\zeta_K(z), \quad z' = 2 + iy', \quad R = 2, \quad \varepsilon = 4\delta^{1/4}.$$

Es gilt im Kreis $|z - z'| \leq 2$, wegen Lemmas 3 und 7

$$\left| \frac{(z - 1)\zeta_K(z)}{(z' - 1)\zeta_K(z')} \right| \leq \exp \left(\log \left(\frac{K_3}{K_2} (|y'| + 3)^{K_4} \right) \right)$$

und

$$M = \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|y'| + 3)^{K_4} \right) > 1.$$

In dem Kreis

$$|z - (2 + iy')| \leq 2(1 - 8\delta^{1/4})$$

gilt dann wegen $|y'| < |y| + 2$

$$\left| \frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(z) - \frac{1}{z - 1} - \sum_{\substack{|x - x_k| \leq 4\delta^{1/4} \\ |y - y_k| \leq 4\delta^{1/4}}} \frac{1}{z - z_k} \right| \leq \frac{5}{32} \delta^{-1/2} \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|y| + 5)^{K_4} \right).$$

Diese Kreise aber bedecken den Streifen $16\delta^{1/4} \leq x \leq 3$.

LEMMA 11. Wenn $0 < \delta < 1/4^4 \cdot 10^{24}$, dann kann man in dem Streifen $\delta^{1/10} \leq x \leq 2\delta^{1/10}$ der komplexen Ebene eine gebrochene Linie L angeben, deren Strecken parallel mit der X - bzw. Y -Achse sind. Auf L gelten folgende Abschätzungen:

Wenn die Ordinaten der Strecken, welche mit der X -Achse parallel sind, T_k heißen, dann gilt für jede ganze Zahl k , wenn $k < T_k < k + 1$:

$$(4.28) \quad \left| \frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(z) \right| < C_1 \delta^{-5/3} \log^2 \left(\frac{K_3}{K_2} (|k| + 6)^{K_4} \right);$$

C_1 ist eine numerische Konstante.

Bei $|k| > 1$, gilt diese Formel auch für

$$32\delta^{1/4} \leq x \leq 3, \quad y = T_k.$$

Auf den Strecken die mit der Y -Achse parallel sind, ist

$$(4.29) \quad \left| \frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(z) \right| \leq C_2 \delta^{-53/30} \log^2 \left(\frac{K_3}{K_2} (|y| + 5)^{K_4} \right),$$

wo C_2 eine numerische Konstante ist.

Beweis. Um dieses zu beweisen betrachte man das Parallelogramm

$$32\delta^{1/4} \leq x \leq 3, \quad k \leq y \leq k + 1.$$

Schneiden wir einen Streifen von der Breite $4\delta^{1/4}$ von beiden Seiten – die mit der X -Achse parallel sind – des Parallelogramms ab. Dann teilen wir durch Parallele zu der X -Achse das neue Parallelogramm in $V(k) + 1$ kongruente Teilparallelogramme. Mindestens eines von ihnen enthält keine Nullstelle von $\zeta_K(z)$. Durch seine Mitte legt man den Abschnitt

$$y = T_k, \quad 32\delta^{1/4} \leq x \leq 3.$$

Auf dieser Strecke gilt wegen Lemma 10, die Ungleichung

$$(4.30) \quad \left| \frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(z) \right| < \frac{5}{32} \delta^{-1/2} \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|T_k| + 5)^{K_4} \right) + \sum_k \frac{1}{|z - z_k|} + \frac{1}{|z - 1|}.$$

Für $|k| \leq 1$ gilt $\frac{1}{|z - 1|} \leq \frac{1}{4} \delta^{-1/4}$ und für $|k| > 1$, $\frac{1}{|z - 1|} < \frac{1}{|k|}$.

Wenn d die Breite jedes Streifens bezeichnet, dann ist wegen (4.25)

$$(4.31) \quad d > \frac{1 - 8\delta^{1/4}}{V(k) + 1} \geq \frac{1 - 8\delta^{1/4}}{1 + 4\delta^{-5/6} \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|k| + 3)^{K_4} \right)}.$$

Die Anzahl der Nullstellen von $\zeta_K(z)$ im Bereich $|x - x_k| \leq 4\delta^{1/4}$, $|y - y_k| \leq 4\delta^{1/4}$ ist nicht größer als $V(k)$ und der Abstand jedes Punktes der Geraden $y = T_k$ von der nächsten Wurzel ist kleiner als die Hälfte der Streifenbreite.

Danach, aus (4.30) und (4.31), für $|k| > 1$, $32\delta^{1/4} \leq x \leq 3$, $k \leq T_k \leq k + 1$, ergibt sich (4.28).

Es ist leicht zu bemerken, daß für jedes k und

$$(4.32) \quad \delta^{1/10} \leq x \leq 2\delta^{1/10}, \quad k \leq T_k \leq k + 1,$$

und (4.28) gilt.

Es sei weiter $W(k, k + 2) = V(k) + V(k + 1)$. Aus (4.25) ist für jedes k

$$(4.33) \quad W(k, k + 2) \leq 8\delta^{-5/6} \log \left(\frac{K_3}{K_2} (|T| + 3)^{K_4} \right).$$

Jetzt beachte man das Parallelogramm $\delta^{1/10} \leq x \leq 2\delta^{1/10}$, $k \leq y \leq k + 2$. Das Intervall $(\delta^{1/10}, 2\delta^{1/10})$ teilen wir in $W(k, k + 2) + 1$ gleiche Teilintervalle. Durch die Punkte dieser Teilung legen wir Parallele zu der Y -Achse. Mindestens einer von den Streifen enthält keine Nullstelle von $\zeta_K(z)$.

Durch seine Mitte legt man einen Abschnitt, der zwei benachbarte Geraden T_k und T_{k+1} verbindet.

Wenn b die Breite des Streifens bezeichnet, dann ist

$$(4.34) \quad b \geq \frac{\delta^{1/10}}{1+W(k, k+2)}.$$

Der Abstand jedes Punktes unseres Abschnittes von nächster Wurzel ist nicht kürzer als die Hälfte der Streifenbreite. Aus (4.27), (4.33) und (4.34) folgt einfach (4.29).

5. Jetzt wenden wir uns zum Beweis des Satzes (3.4). Es bezeichnen $C_1, C_2, C_3, \dots$ die explizit angebbare numerische Konstanten.

Beweis. Es sei

$$(5.1) \quad 0 < \eta \leq 2, \quad \varepsilon = 1 + \frac{1}{2}\eta.$$

Wir führen jetzt folgende Bezeichnungen ein:

$$(5.2) \quad K_0 = \varepsilon \frac{\log T}{\log \log T}, \quad N_0 = \log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^2,$$

Wegen (3.1) ist für $T > \max(C_1, C_\eta)$

$$(5.3) \quad K_0 > N_0 > 9.$$

Ferner gibt es für $T > \max(C_2, C_\eta)$ ein ganzes $L > 2$, so daß

$$(5.4) \quad (L^{K_0} <) L^{K_0+N_0} \leq T < L^{K_0+N_0+1} (< L^{3K_0}).$$

Für dieses L gilt:

$$(5.5) \quad \log^{1/3} T < L < \log^{1/\varepsilon} T.$$

Es sei T_L eine in Lemma 11 definierte Grösse, also

$$(5.6) \quad L < T_L < L+1.$$

Von der ganzen Zahl k fordern wir vorläufig nur

$$(5.7) \quad K_0 \leq k+1 \leq K_0+N_0.$$

Bezeichnen wir weiter

$$(5.8) \quad L^{k+1} = \xi, \quad \frac{1}{\log(L^{k+1})} = \eta = \frac{1}{\log \xi}.$$

Wir betrachten jetzt das Integral

$$(5.9) \quad I(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\bar{\eta}-iT_L}^{1+\bar{\eta}+iT_L} \frac{\xi^s}{s^{k+1}} F(s) ds,$$

wo

$$(5.10) \quad F(s) = -\left(\zeta(s) + \frac{\zeta'_K(s)}{\zeta_K(s)}\right),$$

$\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zetafunktion. Wegen (4.0), ist für $\sigma > 1$

$$(5.11) \quad F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)-1}{n^s}.$$

Weil diese Reihe absolut konvergent ist, können wir gliedweise integrieren:

$$(5.12) \quad I(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (G(n)-1) \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\bar{\eta}-iT_L}^{1+\bar{\eta}+iT_L} \frac{(\xi/n)^s}{s^{k+1}} ds.$$

Aber

$$(5.13) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\bar{\eta}-i\infty}^{1+\bar{\eta}+i\infty} \frac{r^s}{s^{k+1}} ds = \begin{cases} \frac{1}{k!} \log^k r, & r \geq 1, \\ 0, & 0 \leq r \leq 1, \end{cases}$$

und

$$(5.14) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\bar{\eta}-iT_k}^{1+\bar{\eta}+iT_k} \frac{(\xi/n)^s}{s^{k+1}} ds \right| \leq \frac{e}{2\pi k} \cdot \frac{\xi}{n^{1+\bar{\eta}}} T_L^{-k}.$$

Aus (5.8), (5.7), (5.5) und (4.3) ist

$$(5.15) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} (G(n)-1) \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\bar{\eta}-iT_L}^{1+\bar{\eta}+iT_L} \frac{(\xi/n)^s}{s^{k+1}} ds \right| < C_2 K_1 \log^4 T;$$

und schließlich

$$(5.16) \quad |I(T)| \leq \left| \sum_{n \leq \xi} (G(n)-1) \frac{\log^k(\xi/n)}{k!} \right| + C_3 K_1 \log^4 T.$$

Es sei

$$(5.17) \quad \Delta(x) = \sum_{n \leq x} G(n) - x,$$

dann ist

$$G(1)-1 = \Delta(1), \quad G(n)-1 = \Delta(n) - \Delta(n-1).$$

Aus (5.16), (5.17) und (5.4) folgt

$$(5.18) \quad |I(T)| \leq C_4 K_1 \log^4 T + \frac{\log^k T}{k!} \max_{1 \leq x \leq T} |\Delta(x)|.$$

Jetzt finden wir eine untere Abschätzung von $I(T)$. Wir müssen deswegen eine Konturintegration ausführen.

Der Integrationsweg lautet:

- I. $I(T)$; $\sigma = 1 + \eta$, $-T_L \leq t \leq T_L$,
- II. $I_1(T)$; die gebrochene Linie L (Lemma 11),
- III. $I_2(T)$; $\sigma' \leq \sigma \leq 1 + \eta$, $t = T_L$, $\delta^{1/10} \leq \sigma' \leq 2\delta^{1/10}$,
- IV. $I_3(T)$; $\sigma'' \leq \sigma \leq 1 + \eta$, $t = -T_L$, $\delta^{1/10} \leq \sigma'' \leq 2\delta^{1/10}$.

Wir setzen hier

$$(5.19) \quad \delta = (2 \cdot 10^3)^{-10}.$$

Es sei weiter $I_1'(T)$ das Integral auf den senkrechten Strecken der Linie L und $I_1''(T)$ auf den horizontalen.

Aus dem Lemma 11 und einer bekannten Abschätzung für die Riemannsche Zetafunktion ([5], S. 114) ist

$$(5.20) \quad |I_1'(T)| \leq \frac{1}{2\pi} \xi^{2\delta^{1/10}} \int_{-T_L}^{T_L} \frac{1}{(\delta^{2/10} + t^2)^{(k+1)/2}} \times \\ \times \left[C_5 \{1 + (|t| + 2)^{(1-\delta^{1/10})/2}\} \log(|t| + 2) + \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\delta^{1/10})^2 + t^2}} + \right. \\ \left. + C\delta^{-53/30} \log^2 \left(\frac{K_3}{K_2} (|t| + 5)^{K_4} \right) \right] dt.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$(5.21) \quad |I_1''(T)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-[T_L]-1}^{j=[T_L]+1} \int_{\delta^{1/10}}^{2\delta^{1/10}} \frac{\xi^\sigma}{(\sigma^2 + j^2)^{(k+1)/2}} \times \\ \times \left[C_5 \{1 + (|j| + 2)^{(1-\sigma)/2}\} \log(|j| + 2) + \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma)^2 + j^2}} + \right. \\ \left. + C\delta^{-5/3} \log^2 \left(\frac{K_3}{K_2} (|j| + 6)^{K_4} \right) \right] d\sigma.$$

Ganz grob abschätzend, für $T > \max(C_6, C_\eta, C_K)$, wo C_K in (3.2) definiert ist, haben wir

$$(5.22) \quad |I_1(T)| \leq C_7 T^M \log^2 T,$$

wo

$$M = 2\delta^{1/10} + \frac{2\epsilon \log(\delta^{-1/10})}{\log \log T}.$$

Es ist leicht zu berechnen, daß für $T > \max(C_8, C_\eta, C_K)$,

$$(5.23) \quad |I_2(T)| \leq C_9 \log T, \quad |I_3(T)| \leq C_{10} \log T.$$

gilt. Nach dem Residuensatz wegen (5.22), (5.23) und (5.18) für $T > \max(C_{12}, C_\eta, C_K)$ gilt:

$$(5.24) \quad \left| \sum_{|e| < T_L} \frac{\xi^e}{e^{k+1}} \right| \leq \frac{\log^k T}{k!} \max_{1 \leq e \leq T} |\Delta(x)| + K_1 C_{11} T^M \log^4 T,$$

wo

$$M = 2\delta^{1/10} + \frac{2\epsilon \log(\delta^{-1/10})}{\log \log T}.$$

Wir summieren nach den Nullstellen ρ von $\zeta_K(s)$, die rechts von L vortreten.

Wir haben weiter

$$(5.25) \quad \left| \sum_{|e| < T_L} \frac{\xi^e}{e^{k+1}} \right| = \left(\frac{L^{\rho_0}}{|e_0|} \right)^{k+1} \left| \sum_e \left(L^{e-\rho_0} \frac{e_0}{e} \right)^{k+1} \right|.$$

Aber für $T > \max(C_{12}, C_\eta, C_K, C_{e_0})$ ist

$$(5.26) \quad L^{\rho_0} > (\log^{1/3e} T)^{\rho_0} > (\log^{1/6} T)^{\rho_0} > |e_0|.$$

Von unten abschätzend, erhalten wir

$$(5.27) \quad \left(\frac{L^{\rho_0}}{|e_0|} \right)^{k+1} \geq T^{\rho_0} \exp(-2(\log \log T)^3 \log^{1/\epsilon} T) |e_0|^{-\epsilon \log T / \log \log T}$$

Bei der Abschätzung von $\sum_e (L^{e-\rho_0} e_0 / e)^{k+1}$ wenden wir den Satz von P. Turán (S. 181) an.

Wir setzen $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ ein. Die Zahlen $L^{e-\rho_0} (e_0 / e)$ ebenso wie T_L sind von k unabhängig. Diese Zahlen können die Rolle der z_j spielen. Wir müssen noch prüfen, ob die Bedingung $\max |z_j| \geq 1$ erfüllt ist. Diese Bedingung wird erfüllt sein, wenn sich e_0 zwischen den Wurzeln e befindet, für die $|e| < T_L$.

Es ist wirklich so, weil wegen (3.1)-(3.4) und für $T > \max(C_{13}, C_\eta, C_{e_0}, C_k)$

$$(5.28) \quad T_L \geq L > \log^{1/3e} T > \exp\left(\frac{\epsilon-1}{7\epsilon} \log \log \log T\right) > |e_0| > |I_{e_0}|$$

ist. Im Satz von P. Turán setzen wir weiter $\mu = k+1$, $m = K_0$ ein.

Man muß noch prüfen, ob die Bedingung (5.7) jetzt erfüllt ist.

Es genügt zu zeigen, daß N_0 oder sogar eine kleinere Zahl, die Rolle N im (3.1) spielen kann. Zu diesem Zweck berechnen wir die Anzahl der

Glieder unserer Summe. Diese Anzahl ist gleich der Menge der Nullstellen von $\zeta_K(s)$ in unserem Bereich. Wegen Lemma 9 und (5.6), für $T > \max(C_{14}, C_\eta, C_K, C_{e_0})$, ist

$$(5.29) \quad N(T_L) \leq N = \log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^{3/2}$$

und

$$(5.30) \quad N(T_L) \leq N < \log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^2 = N_0.$$

Man kann also

$$(5.31) \quad N = \log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^{3/2}$$

einsetzen.

Wir haben schließlich aus (3.1), (5.2), (5.31) für $T > \max(C_{15}, C_\eta, C_K, C_{e_0})$

$$(5.32) \quad \sum_e \left(L^{e-e_0} \frac{e_0}{e} \right)^{k+1} > \exp(-\log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^{5/2}).$$

Aus (5.25), (5.27) und (5.32) folgt

$$(5.33) \quad \left| \sum_e \frac{\xi^e}{e^{k+1}} \right| \geq T^{e_0} |e_0|^{-\log T / \log \log T} \exp(-3 \log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^3).$$

Wenn wir jetzt die obere Abschätzung (5.24) berücksichtigen, so haben wir

$$(5.34) \quad T^{e_0} |e_0|^{-\log T / \log \log T} \exp(-3 \log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^3) \leq K_1 C_{11} T^M \log^4 T + \frac{\log^k T}{k!} \max_{1 \leq x \leq T} |\Delta(x)|,$$

wo

$$M = 2\delta^{1/10} + \frac{2\varepsilon \log(\delta^{-1/10})}{\log \log T}.$$

Aus (5.2), (5.3), (5.7) folgt

$$(5.35) \quad \frac{1}{k!} \log^k T < \exp\left(\left(\varepsilon + \frac{4}{7}(\varepsilon-1)\right) \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T}\right).$$

Wir haben also

$$(5.36) \quad \exp\left(\left(\varepsilon + \frac{4}{7}(\varepsilon-1)\right) \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T}\right) \max_{1 \leq x \leq T} |\Delta(x)| \geq T^{e_0} |e_0|^{-\log T / \log \log T} \exp(-3 \log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^3) - K_1 C_{11} T^M \log^4 T,$$

wo

$$M = 2\delta^{1/10} + \frac{2\varepsilon \log(\delta^{-1/10})}{\log \log T}.$$

Aus (5.28), für $T > \max(C_{15}, C_\eta, C_{e_0}, C_K)$, ist

(5.37)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{T^{e_0} \exp(-3 \log^{1/\varepsilon} T (\log \log T)^3)}{|e_0|^{\log T / \log \log T}} > \frac{1}{2} T^{e_0} \exp\left(-\frac{2}{7}(\varepsilon-1) \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T}\right).$$

Man kann aber sehr einfach beweisen, daß für $T > \max(C_{16}, C_\eta, C_K, C_{e_0})$,

$$(5.38) \quad \frac{1}{2} T^{e_0} \exp\left(-\frac{2}{7}(\varepsilon-1) \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T}\right) > K_1 C_{11} T^M \log^4 T,$$

wo

$$M = 2\delta^{1/10} + \frac{2\varepsilon \log(\delta^{-1/10})}{\log \log T},$$

ist. Aus (5.36), (5.37), (5.38), gilt für (3.4):

$$(5.39) \quad \exp\left(\left(\varepsilon + \frac{4}{7}(\varepsilon-1)\right) \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T}\right) \max_{1 \leq x \leq T} |\Delta(x)| \geq T^{e_0} \exp\left(-\frac{3}{7}(\varepsilon-1) \frac{\log T \log \log \log T}{\log \log T}\right).$$

Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] A. E. Ingham, *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge 1932.
- [2] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Leipzig und Berlin 1927.
- [3] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford 1951.
- [4] P. Turán, *On the Remainder-Term of Prime-Number-Formula I*, Acta Math. Hung. 1 (1950), p. 48-63.
- [5] — *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
ADAM MICKIEWICZ UNIVERSITÄT IN POZNAN

Reçu par la Rédaction le 5. 9. 1958