ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Über die Gleichverteilung von Gitterpunkten auf m-dimensionalen Ellipsoiden*

von

C. Pommerenke (Göttingen)

Einleitung. Sei $\mathfrak{S}$ eine positiv definite symmetrische m-reihige Matrix mit ganzrationalen Elementen, und sei $m \geqslant 4$. In dieser Arbeit sollen die Lösungen der Gleichung

$$\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q} = n \tag{1}$$

untersucht werden, wo n eine gegebene natürliche Zahl und $\mathfrak{q}$ eine ganze m-reihige Spalte ist.

Für die Anzahl $r(n)$ der Lösungen von (1) gilt, falls $m \geqslant 5$ ist und man sich auf diejenigen n beschränkt, für die $r(n) \neq 0$ ist,

$$r(n) \sim c_1 n^{m/2-1} \sigma(n) \qquad (n \to \infty)\ (^1). \tag{2}$$

Dabei ist $\sigma(n)$ die sog. „singuläre Reihe", die mit Hilfe der Elemente von $\mathfrak{S}$ arithmetisch definiert ist. Wenn man alle quadratischen Formen betrachtet, die zum selben Geschlecht gehören und (für festes n) einen geeigneten Mittelwert über die Darstellungsanzahlen von n bildet, so ist dieser der Wert der rechten Seite von (2) (Siegel [8]). Aus (2) kann man (für $m \geqslant 5$)

$$r(n) \geqslant c_2 n^{m/2-1} > 0 \qquad (r(n) \neq 0) \tag{3}$$

folgern. Dies wurde zuerst von Tartakowsky [9] bewiesen. Es ist vielleicht von Interesse, hier einen etwas anderen Beweis zu geben.

---

* Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen. Herrn Professor C. L. Siegel möchte ich meinen Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und für seinen freundlichen Rat bei ihrer Durchführung.

(1) Es seien $c_1, c_2, \ldots$ nur von m und $\mathfrak{S}$ abhängige positive Konstanten.

Für $m = 4$ dagegen braucht (3) nicht erfüllt zu sein. Wenn beispielsweise $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}_4$ genommen wird, wo $\mathfrak{E}_4$ die vierreihige Einheitsmatrix ist, so hat (1) für $n = 2^k$ nur 24 Lösungen; es ist also $r(2^k) = 24$ im Widerspruch zu (3).

Man kann die Lösungen von (1) auch deuten als Gitterpunkte auf den m-dimensionalen Ellipsoiden

$$\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} = n. \tag{4}$$

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist nun, daß diese Gitterpunkte auf den Ellipsoiden (4) „gleichverteilt" sind. Genauer wird der folgende Satz bewiesen werden (Satz 5, § 7):

Sei H das Ellipsoid $\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} = 1$. Auf H werde die Metrik mit dem Bogenelement $ds^2 = (d\mathfrak{y})'\mathfrak{S}(d\mathfrak{y})$ eingeführt. Sei Δ ein Bereich auf H, der im Jordanschen Sinne meßbar ist (bezüglich der eben eingeführten Metrik). Die Flächeninhalte von H und Δ seien E und D. Es bezeichne $r(\Delta, n)$ die Anzahl der Lösungen von (1) mit $\mathfrak{q}/\sqrt{n} \in \Delta$. Für $m \geqslant 5$ gilt dann, wenn n unter der Einschränkung $r(n) \neq 0$ gegen ∞ strebt,

$$\frac{r(\Delta, n)}{r(n)} \to \frac{D}{E}. \tag{5}$$

Für $m = 4$ gilt (5), falls die Gültigkeit von (3) vorausgesetzt wird.

Es wurde vorhin schon erwähnt, daß (3) für $m = 4$ nicht erfüllt zu sein braucht. Für $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}_4$ ist auch (5) falsch. Denn wenn man Δ so wählt, daß $D = \frac{1}{48}E$ wird, so ist

$$\frac{r(\Delta, 2^k)}{r(2^k)} = \frac{\text{ganze Zahl}}{24},$$

kann also nicht $\to \frac{1}{48}$ streben.

Man überzeugt sich leicht, daß (5) ebenfalls nicht richtig zu sein braucht, wenn über Δ nur die Meßbarkeit im Lebesgueschen Sinne vorausgesetzt wird.

In einer Arbeit von Malyschew [4] wird ebenfalls das Problem der Gleichverteilung der Lösungen von (1) behandelt. Für den Fall $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}_4$ beweist Malyschew dort die Richtigkeit von (5) (in Beschränkung auf ungerade n, für die $r(n) \geqslant c_3 n > 0$ gilt) und gibt sogar eine sehr gute explizite Abschätzung (für gewisse Bereiche Δ). Er sagt weiter, daß sich seine Methode für jedes $\mathfrak{S}$ anwenden lasse, das unsere Voraussetzungen erfüllt. Er approximiert die charakteristische Funktion von Δ nicht durch Kugelfunktionen in m Variablen, wie es in meiner Arbeit geschieht, sondern durch m-fache Fourierreihen.

Mein Beweis verläuft in kurzen Zügen folgendermaßen: Aus den Kugelfunktionen in m Variablen (deren Theorie hier, soweit nötig, entwickelt wird) lassen sich leicht entsprechende Funktionen $Y_k(\mathfrak{y})$) für Ellipsoide gewinnen (dabei ist k der Grad von $Y_k(\mathfrak{y})$). Die charakteristische Funktion von Δ wird approximiert durch eine endliche Summe solcher $Y_k(\mathfrak{y})$, also $r(\Delta, n)$ durch eine Summe über Ausdrücke der Form

$$\frac{1}{n^{k/2}} \sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}=n} Y_k(\mathfrak{y}). \tag{6}$$

Für $k = 0$ ergibt sich dabei angenähert $Dr(n)/E$.

Aus den der Matrix $\mathfrak{S}$ zugeordneten Thetafunktionen erhält man durch einen Differentiationsprozeß Funktionen, die die obigen Ausdrücke als Koeffizienten haben (Diese Idee geht auf Hecke zurück; man vergleiche auch Schoeneberg [7]). Diese Funktionen sind ebenfalls Modulformen, und zwar für $k \geqslant 1$ Spitzenformen. Aus den bekannten Abschätzungen der Koeffizienten von Spitzenformen ergeben sich Aussagen über die Ausdrücke (6). Unter Zuhilfenahme von (3) folgt dann der Satz. Für einen Spezialfall gebe ich eine explizite Abschätzung, die nicht sehr gut ist, sich aber wohl mit der hier angewandten Methode nicht wesentlich verbessern läßt.

Die analytische Methode, die in dieser Arbeit benutzt wird, versagt für $m \leqslant 3$. Für $m = 3$ lassen sich jedoch die entsprechenden Resultate gewinnen, wenn man die Algebra der Quaternionen verwendet (vergl. Linnik [3]).

§ 1. Hilfssätze über verallgemeinerte Gaußsche Summen. Es sei $\mathfrak{S}$ eine symmetrische ganzzahlige m-reihige Matrix. Für $k > 0$, $(l, k) = 1$ werde definiert

$$H(l, k) = \frac{1}{k^{m/2}} \sum_{\mathfrak{r} \bmod k} e\left(\frac{l}{k}\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}\right),$$

wobei $e(z)$ eine Abkürzung für $e^{2\pi i z}$ ist und $\sum\limits_{\mathfrak{r} \bmod k}$ wie immer im Folgenden bedeuten soll, daß über ein vollständiges Restsystem $\bmod k$ der ganzen m-reihigen Spalte $\mathfrak{r}$ zu summieren ist. Es soll nun der Betrag von $H(l, k)$ abgeschätzt werden. Es gilt

$$|H(l, k)|^2 = \frac{1}{k^m} \sum_{\substack{\mathfrak{t} \\ \bmod k}} \sum_{\mathfrak{r}} e\left(\frac{l}{k}(\mathfrak{t}'\mathfrak{S}\mathfrak{t} - \mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r})\right).$$

Wenn man $\mathfrak{t} = \mathfrak{r} + \mathfrak{q}$ setzt, erhält man

$$|H(l, k)|^2 = \frac{1}{k^m} \sum_{\mathfrak{q} \bmod k} e\left(\frac{l}{k}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}\right) \sum_{\mathfrak{r} \bmod k} e\left(\frac{l}{k} 2\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}\right). \tag{1}$$

Nun gibt es zwei ganzzahlige Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ mit der Determinante 1, sodaß

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{V}$$

Diagonalgestalt hat. In (1) ersetze man $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{U}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{V}\mathfrak{r}$. Man erhält dann

$$(2)\qquad |H(l,k)|^2 = \frac{1}{k^m}\sum_{\mathfrak{q}\bmod k} e\left(\frac{l}{k}\,\mathfrak{q}'\mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U}\mathfrak{q}\right)\sum_{\mathfrak{r}\bmod k} e\left(\frac{l}{k}\,2\mathfrak{q}'\mathfrak{D}\mathfrak{r}\right).$$

Die innere Summe ist wegen $(l,k)=1$

$$(3)\qquad \sum_{\mathfrak{r}\bmod k} e\left(\frac{l}{k}(2\mathfrak{D}\mathfrak{q})'\mathfrak{r}\right) = \begin{cases} k^m, & k|2\mathfrak{D}\mathfrak{q},\\ 0, & k\nmid 2\mathfrak{D}\mathfrak{q}.\end{cases}$$

Hilfssatz 1. *Wenn $S=|\det\mathfrak{S}|>0$ ist, so gilt*

$$|H(l,k)|\leqslant\sqrt{2^m S}.$$

Beweis. Wenn $d_1,\ldots,d_m$ die Diagonalelemente von $\mathfrak{D}$ und $q_1,\ldots,q_m$ die Komponenten von $\mathfrak{q}$ bedeuten, so ist $k|2\mathfrak{D}\mathfrak{q}$ äquivalent mit

$$k|2d_\mu q_\mu,\qquad \frac{k}{(k,2d_\mu)}\Big|q_\mu\qquad (\mu=1,2,\ldots,m).$$

Diese Bedingungen haben die Lösungssysteme

$$(4)\qquad q_\mu = l_\mu\frac{k}{(k,2d_\mu)},\qquad l_\mu=0,\ldots,(k,2d_\mu)-1\qquad (\mu=1,\ldots,m),$$

welche $\bmod k$ voneinander verschieden sind und keine weiteren solche. Ihre Anzahl ist

$$\prod_{\mu=1}^{m}(k,2d_\mu)\leqslant 2^m|d_1\ldots d_m| = 2^m S.$$

Aus (2) und (3) folgt dann die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Unter der Voraussetzung $(k,2S)=1$ gilt*

$$|H(l,k)|=1.$$

Beweis. Aus $(k,2S)=1$ ergibt sich $(k,2d_\mu)=1$ für $\mu=1,2,\ldots,m$. Daher liefert (4) genau das eine Lösungssystem $q_\mu=0$, $\mu=1,2,\ldots,m$, d.h. $\mathfrak{q}=0$. In (2) bleibt also von der ersten Summe nur das Glied mit $\mathfrak{q}=0$ übrig; nach (3) ist daher

$$|H(l,k)|^2=1.$$

Hilfssatz 3. *Sei p eine Primzahl, und $S=p^s U$, U ganz, $p\nmid U$ und $\nu\geqslant 1$. Dann ist*

$$|H(l,2^\nu)|\leqslant 2^{(m+s)/2},\qquad p=2,$$
$$|H(l,p^\nu)|\leqslant p^{s/2},\qquad p>2.$$

Beweis. Für $p=2$ und $k=2^\nu$ ist $(k,2d_\mu)=2(2^{\nu-1},d_\mu)$. Daher liefert (4)

$$2^m\prod_{\mu=1}^{m}(2^{\nu-1},d_\mu)\leqslant 2^{m+s}$$

$\bmod 2^\nu$ verschiedene Lösungssysteme. Für $p>2$ und $k=p^\nu$ ist $(k,2d_\mu)=(p^\nu,d_\mu)$, es ergeben sich also

$$\prod_{\mu=1}^{m}(p^\nu,d_\mu)\leqslant p^s$$

Lösungen. Aus (2) und (3) erhält man dann die Behauptung.

§ 2. Die Transformationstheorie der verallgemeinerten Thetafunktionen. Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, kann man aus den Thetafunktionen in m Variablen neue Funktionen ableiten, deren Koeffizienten in einem engen Zusammenhang mit den Kugelfunktionen stehen.

Sei $\mathfrak{S}$ jetzt eine positiv definite symmetrische ganzzahlige Matrix mit der Determinante S und m Reihen $(m\geqslant 1)$. $\sum_{\mathfrak{q}}$ möge im Folgenden immer bedeuten, daß über jede Komponente der m-reihigen ganzzahligen Spalte $\mathfrak{q}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summieren ist. Auf die Reihenfolge kommt es dabei nicht an.

Hilfssatz 4. *Sei $z=x+iy$, $y>0$, k ganz und $\geqslant 0$, $\mathfrak{b}$ eine beliebige (m-reihige) reelle Spalte und $\mathfrak{c}$ eine komplexe Spalte, die $\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{c}=0$ erfüllt. Dann gilt*

$$(1)\qquad \sum_{\mathfrak{q}}\big(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})\big)^k e\big(z(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})\big)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{S}}\,e\left(\frac{1}{8}\,m\right)\cdot\frac{1}{(2z)^{m/2+k}}\sum_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{c}'\mathfrak{q})^k e\left(-\frac{1}{4z}\,\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}+\mathfrak{q}'\mathfrak{b}\right).$$

Beweis. Für $\operatorname{Re} t>0$ gilt (z. B. Landau [2], S. 62) (²)

$$\sum_{\mathfrak{q}}\exp\big(-\pi t(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})\big)=\frac{1}{\sqrt{S}}\,t^{-m/2}\sum_{\mathfrak{q}}\exp\left(-\frac{\pi}{t}\,\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}+2\pi i\,\mathfrak{q}'\mathfrak{b}\right).$$

(²) $\exp(x)$ bezeichnet e^x.

Wenn hierin $t = -2iz$ gesetzt wird, wobei $\arg(-iz) = -\frac{1}{2}\pi + \arg z$ sein soll, so erhält man (1) für $k = 0$. Sei (1) für k schon bewiesen, und seien $\beta_1, \ldots, \beta_m$ die Komponenten von $\mathfrak{b}$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ die von $\mathfrak{c}$. Wenn $\mathfrak{e}_\mu$ die μ-te Einheitsspalte ist, so gilt wegen $\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{c} = 0$

$$\sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \beta_\mu} \big(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})\big)^k = k\big(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})\big)^{k-1} \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu \mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{e}_\mu = 0.$$

Durch Anwendung von $\gamma_1 \frac{\partial}{\partial \beta_1} + \ldots + \gamma_m \frac{\partial}{\partial \beta_m}$ auf (1) folgt also

$$\sum_{\mathfrak{q}} \big(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})\big)^k \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \beta_\mu} [(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})] \cdot e\big(z(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})\big) \cdot (2\pi i z)$$

$$= \frac{e(\frac{1}{8}m)}{\sqrt{S}(2z)^{m/2+k}} \sum_{\mathfrak{q}} (\mathfrak{c}'\mathfrak{q})^k \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \beta_\mu} [\mathfrak{q}'\mathfrak{b}] \cdot e\left(-\frac{1}{4z} \mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}'\mathfrak{b}\right) \cdot (2\pi i).$$

Wenn man diese Gleichung durch $4\pi i z$ dividiert und

$$\sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \beta_\mu} [(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})] = 2 \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu \mathfrak{e}_\mu'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b}) = 2\mathfrak{c}'\mathfrak{S}(\mathfrak{q}+\mathfrak{b})$$

beachtet, erhält man (1) für $k+1$ statt k.

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{c} = 0$. *Für* $y = \operatorname{Im} z > 0$ *sei*

(2) $$\Theta_k(z, \mathfrak{c}) = \Theta_k(z) = \sum_{\mathfrak{q}} (\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{q})^k e(z\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}).$$

Dann gilt für jede Modulmatrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *mit* $c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4S)$ *und* $d > 0$

$$\Theta_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = H(b, d) \cdot (cz+d)^{m/2+k} \Theta_k(z),$$

wobei $-\pi < \arg(cz+d) < \pi$ *genommen werden soll, und es ist weiter*

$$|H(b, d)| = 1.$$

Beweis 1. Es sei zuerst $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine beliebige Modulmatrix mit $d > 0$. Für $\operatorname{Im} \zeta > 0$ setze man in (2)

$$z = \frac{\zeta}{d} + \frac{b}{d} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q} = d\left(\mathfrak{p} + \frac{\mathfrak{r}}{d}\right).$$

Man erhält dann

$$\Theta_k\left(\frac{\zeta}{d} + \frac{b}{d}\right)$$

$$= d^k \sum_{\mathfrak{r} \bmod d} \left[\sum_{\mathfrak{p}} \left(\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\left(\mathfrak{p} + \frac{\mathfrak{r}}{d}\right)\right)^k e\left(d\zeta\left(\mathfrak{p} + \frac{\mathfrak{r}}{d}\right)'\mathfrak{S}\left(\mathfrak{p} + \frac{\mathfrak{r}}{d}\right)\right)\right] e\left(\frac{b}{d}\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}\right).$$

Die Anwendung von (1) $\left(\text{mit } \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{r}}{d}\right)$ auf die innere Summe liefert

$$\Theta_k\left(\frac{\zeta}{d} + \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{\sqrt{S}} e\left(\frac{1}{8}m\right) \frac{d^k}{(2d\zeta)^{m/2+k}} \times$$

$$\times \sum_{\mathfrak{r} \bmod d} \left[\sum_{\mathfrak{q}} (\mathfrak{c}'\mathfrak{q})^k e\left(-\frac{1}{4d\zeta} \mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} + \frac{1}{d}\mathfrak{q}'\mathfrak{r}\right)\right] e\left(\frac{b}{d}\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}\right).$$

Daraus folgt für $\zeta = -\dfrac{1}{dz-c}$ wegen $-\dfrac{1}{d(dz-c)} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{bz-a}{dz-c}$

(3) $$\Theta_k\left(\frac{bz-a}{dz-c}\right) = \frac{1}{\sqrt{S}} e\left(\frac{1}{8}m\right) \cdot \left(-\frac{dz-c}{2d}\right)^{m/2+k} d^k \times$$

$$\times \sum_{\mathfrak{q}} (\mathfrak{c}'\mathfrak{q})^k e\left(\frac{1}{4} z \mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}\right) \sum_{\mathfrak{r} \bmod d} e\left(-\frac{c}{4d}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} + \frac{1}{d}\mathfrak{q}'\mathfrak{r} + \frac{b}{d}\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}\right).$$

2. Sei nun $c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4S)$ und $d > 0$. Dann ist $\frac{1}{4}c\mathfrak{S}^{-1}$ ganz. Man kann also in der inneren Summe in (3) $\mathfrak{r} = \mathfrak{t} + \frac{1}{2}c\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ mit ganzem $\mathfrak{t}$ schreiben. Das ergibt

$$-\frac{c}{4d}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} + \frac{1}{d}\mathfrak{q}'\mathfrak{r} + \frac{b}{d}\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}$$

$$= -\frac{c}{4d}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} + \frac{1}{d}\mathfrak{q}'\mathfrak{t} + \frac{c}{2d}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} + \frac{b}{d}\mathfrak{t}'\mathfrak{S}\mathfrak{t} + \frac{bc}{d}\mathfrak{t}'\mathfrak{q} + \frac{bc^2}{4d}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$$

$$= \frac{b}{d}\mathfrak{t}'\mathfrak{S}\mathfrak{t} + \frac{c}{4d}(1+bc)\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} + \frac{1}{d}(1+bc)\mathfrak{t}'\mathfrak{q}.$$

Da $1+bc = ad$ und da $\frac{1}{4}c\mathfrak{S}^{-1}$ ganz ist, sind die letzten beiden Summanden ganze Zahlen, sodaß die innere Summe in (3) zu

$$\sum_{\mathfrak{t} \bmod d} e\left(\frac{b}{d}\mathfrak{t}'\mathfrak{S}\mathfrak{t}\right) = d^{m/2} H(b, d)$$

wird. Daher folgt, wenn man in (4) noch z durch $-1/z$ ersetzt,

$$\Theta_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{m/2+k} H(b,d) \frac{e(\frac{1}{8}m)}{\sqrt{S}(2z)^{m/2+k}} \sum_{\mathfrak{q}} (\mathfrak{c}'\mathfrak{q})^k e\left(-\frac{1}{4z}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}\right).$$

Nochmalige Verwendung von (1) (mit $\mathfrak{b}=0$) ergibt die erste Behauptung des Satzes. Wegen $\mathfrak{c}\equiv 0 \pmod{4S}$ folgt weiter aus $ad-bc=1$, daß $ad\equiv 1 \pmod{4S}$, also $(d,2S)=1$ ist. Aus Hilfssatz 2 erhält man daher $|H(b,d)|=1$.

Aus Formel (3) möge noch eine Folgerung gezogen werden: Wenn man darin $\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c\end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ ersetzt, erhält man

Hilfssatz 5. *Für jede Modulmatrix mit $c>0$ gilt*

$$\frac{1}{(cz+d)^{m/2+k}}\Theta_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{2^k}\sum_{\mathfrak{q}} (\mathfrak{c}'\mathfrak{q})^k e\left(\frac{z}{4}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}\right) \times$$

$$\times\left[\frac{(-1)^k e(-\frac{1}{8}m)}{\sqrt{2^m S}\, c^{m/2}} \sum_{\mathfrak{r} \bmod c} e\left(\frac{d}{4c}\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} + \frac{1}{c}\mathfrak{q}'\mathfrak{r} + \frac{a}{c}\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}\right)\right],$$

wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer vom Betrage $\leqslant 1$ ist.

Die letzte Behauptung ergibt sich leicht aus einer geringen Erweiterung des Beweises von Hilfssatz 1, § 1.

Satz 2. *Sei $m\geqslant 1$ und $\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{c}=0$. Dann gilt für jedes $k=1,2,\ldots$ und $n\to\infty$*

$$\sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}=n} (\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{q})^k = O(n^{m/4+k/2-1/5}). \tag{4}$$

Beweis. Da $k>0$ ist, gilt wegen der absoluten Konvergenz der Reihe für $y>0$

$$\Theta_k(z) = \sum_{\mathfrak{q}} (\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{q})^k e(z\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}=n} (\mathfrak{c}'\mathfrak{S}\mathfrak{q})^k\Big) e(nz).$$

Aus Hilfssatz 5 folgt, wieder wegen $k>0$, daß das konstante Glied der Fourierentwicklung von

$$\frac{1}{(cz+d)^{m/2+k}}\Theta_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

verschwindet. Da andererseits $\Theta_k(z)$ nach Satz 1 eine ganze Modulform ist, ist $\Theta_k(z)$ eine Spitzenform der Dimension $-k-m/2$ zur Stufe $4S$. Die Abschätzung (4) folgt dann aus Theorem 2 einer Arbeit von Rankin [6].

Will man sich mit einer schwächeren Abschätzung begnügen, nämlich mit $O(n^{m/4+k/2})$ statt $O(n^{m/4+k/2-1/5})$, so kann man das Resultat von Rankin vermeiden und dafür eine einfache Schlußweise von Hecke verwenden

(man vergleiche den Beweis von Satz 3, § 3 oder auch den Beweis von Satz 6, § 7). Für $m\geqslant 5$ genügt die schwächere Abschätzung für spätere Zwecke. Man vergleiche dazu den Beweis von Satz 5, § 7.

§ 3. Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch eine quadratische Form. Sei wieder $\mathfrak{S}$ eine positiv definite symmetrische ganzzahlige Matrix mit m Reihen, und sei jetzt $m\geqslant 5$. Für $y>0$ werde definiert

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{l=-\infty \\ (l,k)=1}}^{+\infty} \frac{e(\frac{1}{8}m)}{\sqrt{2^m S}} H(l,k) \frac{1}{(kz-l)^{m/2}}.$$

Nach Hilfssatz 1, § 1 ist $|H(l,k)|\leqslant\sqrt{2^m S}$; wegen $\frac{1}{2}m>2$ konvergiert also die Reihe absolut.

Hilfssatz 6. *Für $\varrho>0$, $\operatorname{Im} w>0$ gilt*

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(h+w)^{\varrho}} = (2\pi)^{\varrho} e^{-\pi i\varrho/2}\frac{1}{\Gamma(\varrho)}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varrho-1} e(nw).$$

Ein einfacher Beweis mit Hilfe der Poissonschen Summenformel findet sich bei Siegel [8], S. 572.

Satz 3. *Sei $r(n)$ die Anzahl der Darstellungen $n=\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}$ der natürlichen Zahl n durch ganze Spalten $\mathfrak{q}$. Für $m\geqslant 5$ und $n\to\infty$ gilt dann*

$$r(n) = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}m)\sqrt{S}} n^{m/2-1}\sigma(n) + O(n^{m/4})$$

mit

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{l=1 \\ (l,k)=1}}^{k} \frac{1}{k^{m/2}} H(l,k) e\left(-n\frac{l}{k}\right).$$

Beweis. 1. Nach der Definition und nach Hilfssatz 6 (mit $\varrho=\frac{1}{2}m$ und $w=z-l/k$) ist

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{l=1 \\ (l,k)=1}}^{k}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e(\frac{1}{8}m)}{\sqrt{2^m S}} H(l,k) \frac{1}{(kz-l+kh)^{m/2}}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{l=1 \\ (l,k)=1}}^{k} \frac{e(\frac{1}{8}m)}{\sqrt{2^m S}}\cdot\frac{1}{k^{m/2}} H(l,k) \frac{(2\pi)^{m/2} e(-\frac{1}{8}m)}{\Gamma(\frac{1}{2}m)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/2-1} e\left(nz-n\frac{l}{k}\right),$$

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}m)\sqrt{S}} n^{m/2-1}\sigma(n) e(nz). \tag{1}$$

2. Aus der Definition von $f(z)$ folgt andererseits für jede Modulmatrix (mit $c > 0$)

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{l=-\infty\\(l,k)=1}}^{+\infty}\frac{e(\frac{1}{8}m)}{\sqrt{2^m S}}H(l,k)\frac{(cz+d)^{m/2}}{(\mu z-\nu)^{m/2}}$$

mit $\nu = dl-bk$, $\mu = -cl+ak$. Also ist

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \frac{e(\frac{1}{8}m)\,e(-\frac{1}{4}m)}{\sqrt{2^m S}}H(a,c)(cz+d)^{m/2}$$

$$= 1+\sum_{\nu/\mu\neq -d/c}\sum\frac{e(\frac{1}{8}m)}{\sqrt{2^m S}}H(l,k)\frac{(cz+d)^{m/2}}{(\mu z-\nu)^{m/2}}.$$

Wegen $|H(l,k)| \leqslant \sqrt{2^m S}$ ist daher für $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, $y \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(2) $$\left|\frac{1}{(cz+d)^{m/2}}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \frac{e(-\frac{1}{8}m)}{\sqrt{2^m S}}H(a,c)\right|$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|\mu z-\nu|^{m/2}}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{|\nu|\leqslant 2\mu|z|}+\sum_{|\nu|>2\mu|z|}\Bigg)$$

$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{4\mu|z|+1}{(\mu y)^{m/2}}+\sum_{|\nu|>2\mu|z|}\left(\frac{2}{|\nu|}\right)^{m/2}\right) \leqslant C_1\frac{1}{y^{m/2-1}},$$

wo C_1 (und ebenso im Folgenden C_2 usw.) höchstens von m und $\mathfrak{S}$ abhängt.

3. Aus Hilfssatz 5, § 2 folgt für $c > 0$, $y \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\left|\frac{1}{(cz+d)^{m/2}}\Theta_0\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \frac{e(-\frac{1}{8}m)}{\sqrt{2^m S}}H(a,c)\right| \leqslant C_2\exp\left(-\frac{\pi}{2S}y\right).$$

Unter Benutzung von (2) ergibt sich daher (für $c > 0$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, $y \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$)

(3) $$\left|\frac{1}{(cz+d)^{m/2}}\left(\Theta_0\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)-f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)\right| \leqslant C_3\cdot\frac{1}{y^{m/2-1}}.$$

Für $c = 0$ überzeugt man sich leicht direkt von der Richtigkeit dieser Ungleichung.

Jeder Punkt z^* der oberen Halbebene läßt sich durch eine passende Modulsubstitution

$$z^* = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $c \geqslant 0$ in einen Punkt z mit $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, $y \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$ überführen. Wegen

$$y^* = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

und wegen $m \geqslant 5$ ergibt (3) (für jedes z^* mit $y^* > 0$)

(4) $$y^{*m/4}|\Theta_0(z^*)-f(z^*)| \leqslant C_3\frac{1}{y^{m/4-1}} \leqslant C_4.$$

4. Wegen

$$\Theta_0(z) = \sum_{\mathfrak{q}} e(z\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}r(n)\,e(nz)$$

und wegen (1) ist

$$r(n)-\frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}m)\sqrt{S}}n^{m/2-1}\sigma(n) = \int_0^1\left(\Theta_0\left(x+\frac{i}{n}\right)-f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right)e\left(-n\left(x+\frac{i}{n}\right)\right)dx.$$

Aus (4) folgt dann, daß der absolute Betrag dieses Ausdrucks

$$\leqslant e^{2\pi}C_4 n^{m/4}$$

ist, womit Satz 3 bewiesen ist.

§ 4. Abschätzung der singulären Reihe. Um aus Satz 3 eine asymptotische Abschätzung von $r(n)$ zu gewinnen, muß man noch die sog. „singuläre Reihe" $\sigma(n)$ nach unten abschätzen.

Sei $\mathfrak{S}$ eine ganzzahlige symmetrische m-reihige Matrix, die nicht notwendig positiv definit zu sein braucht, und sei $S = \det\mathfrak{S} \neq 0$. Sei n eine (nicht notwendig positive) ganze Zahl. Für $m \geqslant 5$ sei wieder

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l \bmod k}{}' \frac{1}{k^{m/2}}H(l,k)\,e\left(-n\frac{l}{k}\right),$$

wo $\sum\limits_{l \bmod k}{}'$ wie immer im Folgenden bedeuten möge, daß l ein reduziertes Restsystem $\bmod k$ durchläuft. Wegen $m \geqslant 5$ folgt aus Hilfssatz 1, daß die Reihe absolut konvergiert.

Hilfssatz 7. *Sei $A(n,k)$ die Anzahl der* mod k *verschiedenen Lösungen der Kongruenz* $\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q} \equiv n \pmod{k}$. *Dann gilt für* $(k,k')=1$

$$A(n,k)A(n,k') = A(n,kk').$$

Hilfssatz 8. *Sei p eine Primzahl und $p^N \nmid 2n$. Dann ist*

$$\frac{A(n,p^\mu)}{p^{\mu(m-1)}}$$

für $\mu \geqslant 2N-1$ von μ unabhängig.

Die Beweise finden sich in der Arbeit von Siegel [8]. Man definiere nun

$$a_p(n) = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{p^{\nu m/2}}\sum_{l \bmod p^\nu}{}' H(l,p^\nu)\, e\left(-n\frac{l}{p^\nu}\right).$$

Hilfssatz 9. *Für $n \neq 0$ ist*

$$\sigma(n) = \prod_p a_p(n).$$

Für $p^N \nmid 2n$ gilt

$$a_p(n) = \frac{A(n,p^{2N-1})}{p^{(2N-1)(m-1)}}.$$

Beweis. Sei h eine natürliche Zahl und $k|h$. Aus

$$k^{m/2}H(l,k) = \sum_{\mathfrak{r} \bmod k} e\left(\frac{l}{k}\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}\right) = \left(\frac{k}{h}\right)^m \sum_{\mathfrak{r} \bmod h} e\left(\frac{l}{k}\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}\right)$$

folgt für jedes ganze n (dabei ist $q = \frac{h}{k}l$)

$$(1)\qquad \sum_{k|h}\frac{1}{k^{m/2}}\sum_{l \bmod k}{}' H(l,k)\, e\left(-n\frac{l}{k}\right) = \frac{1}{h^m}\sum_{\mathfrak{r} \bmod h}\sum_{q=1}^{h} e\left(\frac{q}{h}(\mathfrak{r}'\mathfrak{S}\mathfrak{r}-n)\right) = \frac{A(n,h)}{h^{m-1}}.$$

Nun sei $n \neq 0$. In (1) setze man $h = p^\mu$. Für genügend großes μ ist dann nach Hilfssatz 8 der letzte Ausdruck von μ unabhängig. Aus der Definition von $a_p(n)$ ergibt sich daher

$$(2)\qquad a_p(n) = \frac{A(n,p^\mu)}{p^{\mu(m-1)}}.$$

Nach Hilfssatz 7 und 8 ist also für jedes natürliche h und genügend großes μ

$$(3)\qquad \frac{A(n,h)}{h^{m-1}} = \prod_{p|h}\frac{A(n,p^\mu)}{p^{\mu(m-1)}} = \prod_{p|h} a_p(n).$$

Wenn man nun in (1) $h = r!$ setzt und $r \to \infty$ streben läßt, so folgt aus (3), daß $\sigma(n) = \prod_p a_p(n)$ ist. Der zweite Teil von Hilfssatz 9 folgt sofort aus (2) und aus Hilfssatz 8.

Satz 4. *Sei $m \geqslant 5$. Dann gibt es ein positives $\varkappa = \varkappa(m,\mathfrak{S})$, sodaß für die n mit $\sigma(n) \neq 0$ gilt*

$$\sigma(n) \geqslant \varkappa > 0.$$

Beweis. 1. Der Beweis dieses Satzes wird aufgrund vieler Fallunterscheidungen ziemlich lang werden. Es werden die einzelnen Faktoren der Produktentwicklung

$$\sigma(n) = \prod_p a_p(n)$$

getrennt nach unten abgeschätzt.

Zuerst sollen einige Ungleichungen bewiesen werden:

Sei $S = \det\mathfrak{S} = p^s U$, U ganz, $p \nmid U$. Nach Hilfssatz 3 ist dann

$$|H(l,p^\nu)| \leqslant \begin{cases} 2^{(s+m)/2}, & p=2,\\ p^{s/2}, & p>2.\end{cases}$$

Daraus ergibt sich für $p > 2$

$$(4)\qquad \left|\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{p^{\nu m/2}}\sum_{l \bmod p^\nu}{}' H(l,p^\nu)\, e\left(-n\frac{l}{p^\nu}\right)\right| \leqslant \sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{(p-1)p^{\nu-1}p^{s/2}}{p^{\nu m/2}} \leqslant \frac{p^{s/2}}{p^{(N+1)(m/2-1)}}.$$

Für $p = 2$ ergibt sich dagegen

$$(5)\qquad \left|\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu m/2}}\sum_{l \bmod 2^\nu}{}' H(l,2^\nu)\, e\left(-n\frac{l}{p^\nu}\right)\right| \leqslant \sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{2^{\nu-1}2^{(s+m)/2}}{2^{\nu m/2}} = \frac{2^{(s+m)/2-1}}{2^{m/2}-1}\cdot\frac{1}{2^{N(m/2-1)}}.$$

2. Der einfachste Fall ist $p \nmid 2S$. Dann ist $p > 2$ und $s = 0$; es folgt daher aus (4) (mit $N = 0$)

$$a_p(n) \geqslant 1 - \Big|\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big| \geqslant 1 - \frac{1}{p^{m/2-1}},$$

wegen $m \geqslant 5$ also

$$\prod_{p \nmid 2S} a_p(n) \geqslant \prod_{p \nmid 2S}\left(1 - \frac{1}{p^{3/2}}\right) = \varkappa_0 > 0. \tag{6}$$

3. Sei nun $p > 2$, und sei N eine noch zu bestimmende natürliche Zahl. Man kann $\mathfrak{S}$ durch eine $\operatorname{mod} p^N$ unimodulare Transformation in eine Diagonalmatrix $\mathfrak{A}$ überführen (Minkowski [5], S. 22). Dabei bleibt $A(0, p^N)$ invariant, ist also jetzt die Lösungsanzahl der Kongruenz

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x} = p^{l_1} a_1 x_1^2 + \ldots + p^{l_m} a_m x_m^2 \equiv 0 \pmod{p^N}$$

wobei $p \nmid a_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ gelten soll.

Falls die Anzahl der geraden l_ν mindestens gleich der Anzahl q der ungeraden l_ν, also $q \leqslant \frac{1}{2}m$ ist, so sei N gerade und $> \max\limits_\nu l_\nu$. Wenn man $k_\nu = [\frac{1}{2}l_\nu]$ und

$$x_\nu = p^{N/2-k_\nu} y_\nu, \qquad y_\nu = 1, \ldots, p^{N/2+k_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

setzt, so erhält man $p^{N/2+k_\nu}$ Werte von x_ν, also

$$p^{\frac{1}{2}Nm + \sum\limits_{\nu=1}^{m} k_\nu}$$

Werte von $\mathfrak{x}$, die $\operatorname{mod} p^N$ verschieden sind. Für diese ist wegen $l_\nu \geqslant 2k_\nu$

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x} = a_1 p^{l_1+N-2k_1} y_1^2 + \ldots \equiv 0 \pmod{p^N}.$$

Da $S = \det\mathfrak{S} \equiv \det\mathfrak{A} \pmod{p^N}$ und da q die Anzahl der ungeraden l_ν ist, so gilt

$$s = \sum_{\nu=1}^{m} l_\nu = 2\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu + q.$$

Daher ist

$$\frac{A(0, p^N)}{p^{N(m-1)}} \geqslant \frac{p^{Nm/2+(s-q)/2}}{p^{N(m-1)}} = \frac{p^{(s-q)/2}}{p^{N(m/2-1)}}. \tag{7}$$

Wenn umgekehrt die Anzahl der geraden l_ν kleiner ist als die Anzahl der ungeraden l_ν, so nenne man jetzt die erstere q, sodaß wieder $q \leqslant \frac{1}{2}m$ gilt. Wenn man dann N ungerade, $k_\nu = [\frac{1}{2}(l_\nu - 1)]$ und

$$x_\nu = p^{(N-1)/2-k_\nu} y_\nu, \qquad y_\nu = 1, \ldots, p^{(N+1)/2+k_\nu}$$

wählt, so kommt man wieder zur Abschätzung (7).

Für p^N/n ist nun

$$a_p(n) = 1 + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{p^{\nu m/2}} \sum_{l \bmod p^\nu}{}' H(l, p^\nu) + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{1}{p^{\nu m/2}} \sum_{l \bmod p^\nu}{}' H(l, p^\nu)\, e\left(-n\frac{l}{p^\nu}\right).$$

Nach (1) (mit $h = p^N$, $n = 0$) sind die ersten beiden Summanden zusammen

$$\frac{A(0, p^N)}{p^{N(m-1)}};$$

nach (7) und (4) ist also

$$a_p(n) \geqslant \frac{p^{s/2}}{p^{N(m/2-1)}}\left(\frac{1}{p^{q/2}} - \frac{1}{p^{m/2-1}}\right) = \varkappa_p'. \tag{8}$$

Wegen $q \leqslant \frac{1}{2}m$ und $m \geqslant 5$ ist $\varkappa_p' > 0$.

Wenn umgekehrt $p^N \nmid n$ gilt, so ist nach Hilfssatz 9

$$a_p(n) = \frac{A(n, p^{2N-1})}{p^{(2N-1)(m-1)}} \geqslant \frac{1}{p^{(2N-1)(m-1)}}$$

oder $= 0$. Zusammen mit (8) folgt hieraus die Existenz eines positiven $\varkappa_p = \varkappa_p(m, \mathfrak{S})$ derart, daß für jedes n mit $a_p(n) \neq 0$ gilt

$$a_p(n) \geqslant \varkappa_p > 0. \tag{9}$$

4. Der Fall der Primzahl 2 ist etwas komplizierter. Eine Transformation auf Diagonalgestalt ist nicht immer möglich. Man kann aber durch eine $\operatorname{mod} 2^N$ unimodulare Transformation erreichen, daß $\mathfrak{S}$ übergeht in eine Matrix $\mathfrak{A}$, in der außer Diagonalelementen der Form $2^l a$ noch eventuell zweireihige Kästchen der Form

$$2^l\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2\bar{a} \end{pmatrix}$$

vorkommen, wo a, $\bar{a}$ und b ungerade sind (Minkowski [5], S. 25). Wieder ist $S = \det\mathfrak{S} \equiv \det\mathfrak{A} \pmod{2^N}$; wenn also $2^{l_1}, \ldots, 2^{l_m}$ die Zweierpotenzen in den Diagonalelementen bzw. die doppelt gezählten Zweierpotenzen in den Kästchen sind, so ist $s = l_1 + \ldots + l_m$.

Wenn nun die Anzahl der geraden l_ν mindestens gleich der Anzahl q der ungeraden l_ν ist (also $q \leqslant \frac{1}{2}m$), so sei N ungerade (im Gegensatz zum Fall $p > 2$). Man setze $k_\nu = [\frac{1}{2}l_\nu]$ und

$$x_\nu = 2^{(N-1)/2-k_\nu} y_\nu. \tag{10}$$

Dann sieht man, daß sich $\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ zusammensetzt aus Summanden der Formen

$$2^{N-1-2k+l}ay^2 \quad \text{und} \quad 2\cdot 2^{N-1-2k+l}(ay^2+by\bar{y}+\bar{a}\bar{y}^2).$$

Wegen $l \geqslant 2k$ kann man den Faktor 2^{N-1} ausklammern. Übrig bleiben Summanden der Formen

$$ay^2, \quad 2ay^2, \quad 2(ay^2+by\bar{y}+\bar{a}\bar{y}^2) \quad \text{und} \quad 4(ay^2+by\bar{y}+\bar{a}\bar{y}^2).$$

Wenn man y_ν von 1 bis $2^{(N+1)/2+k_\nu}$ laufen läßt, so erhält man nach (10) für $\mathfrak{x}$ Werte, die $\bmod 2^N$ verschieden sind. Man sieht sofort, daß für die Hälfte dieser Werte $\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x}/2^{N-1}$ gerade ist (wenn keine Summanden der Form ay^2 vorkommen, sogar für alle Werte). Mithin gilt

$$A(0, 2^N) \geqslant \tfrac{1}{2}\prod_\nu 2^{(N+1)/2+k_\nu} = 2^{(N+1)m/2-1+\Sigma k_\nu}.$$

Wegen

$$s = \sum_\nu l_\nu = 2\sum_\nu k_\nu + q$$

ist

$$\frac{A(0, 2^N)}{2^{N(m-1)}} \geqslant \frac{2^{(N+1)m/2-1+(s-q)/2}}{2^{N(m-1)}} = \frac{2^{(m+s-q)/2-1}}{2^{N(m/2-1)}}. \tag{11}$$

Wenn die Anzahl der geraden l_ν (diese werde jetzt q genannt) kleiner ist als die Anzahl der ungeraden l_ν, so gilt wieder $q \leqslant \frac{1}{2}m$. Man wähle jetzt N gerade, $k_\nu = [\frac{1}{2}(l_\nu - 1)]$ und

$$x_\nu = 2^{(N-2)/2-k_\nu}y_\nu, \qquad y_\nu = 1, \ldots, 2^{(N+2)/2+k_\nu}.$$

Dann erhält man ganz entsprechend wiederum (11).

Wenn $2^N | n$ ist, so schließt man genauso wie für $p > 2$ unter Benutzung von (11) und (5), daß

$$a_p(n) \geqslant \frac{2^{(m+s)/2-1}}{2^{N(m/2-1)}}\left(\frac{1}{2^{q/2}} - \frac{1}{2^{m/2-1}-1}\right) = \varkappa_2' \tag{12}$$

ist. Wegen $q \leqslant \frac{1}{2}m$ ist für $m \geqslant 6$ $\varkappa_2' > 0$, ebenso für $m = 5$, $q = 0$ oder 1.

Für $m = 5$, $q = 2$ geht man folgendermaßen vor: Es seien etwa drei gerade und zwei ungerade l_ν vorhanden (den anderen Fall behandelt man entsprechend), und zwar seien l_1, l_2 und l_3 gerade, l_4 und l_5 ungerade. Es sei N gerade und $> \max_\nu l_\nu + 1$. Man setze $k_\nu = [\frac{1}{2}l_\nu]$ und

$$x_\nu = 2^{N/2-1-k_\nu}y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 5).$$

Dann setzt sich $\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ zusammen aus Summanden der Formen

$$2^{N-2-2k+l}ay^2 \quad \text{und} \quad 2\cdot 2^{N-2-2k+l}(ay^2+by\bar{y}+\bar{a}\bar{y}^2),$$

sodaß man wegen $l \geqslant 2k$ den Faktor 2^{N-2} ausklammern kann. Wenn die y_ν von 1 bis $2^{N/2+1+k_\nu}$ laufen, so erhält man für $\mathfrak{x}$ Werte, die $\bmod 2^N$ verschieden sind. Damit $\mathfrak{x}'\mathfrak{A}\mathfrak{x} \equiv 0 \pmod{2^N}$ wird, muß noch eine Kongruenz mod 4 in $\mathfrak{y}$ gelöst werden. Man sieht leicht, daß die Lösungen volle Restklassen mod 2 sind. In jeder solchen Restklasse liegen

$$\prod_{\nu=1}^{5} 2^{N/2+k_\nu}$$

der obigen $\mathfrak{y}$. Nun soll gezeigt werden, daß mindestens vier Restklassen eine Lösung der Kongruenz mod 4 liefern. Die Kongruenz hat eine der folgenden vier Formen:

$$(\alpha) \qquad a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2+2(a_4y_4^2+a_5y_5^2) \equiv 0 \pmod 4)$$

Dann sind die Restklassen $(0,0,0,0,0)$, $(0,0,0,1,1)$ und

$$\begin{cases} (1,1,0,1,1),\ (1,1,0,0,0) & \text{für} \quad a_1+a_2 \equiv 0 \pmod 4, \\ (1,1,0,1,0),\ (1,1,0,0,1) & \text{für} \quad a_1+a_2 \not\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

Lösungen (Dabei sind die Restklassen durch einen Repräsentanten $\mathfrak{y}'$ charakterisiert).

$$(\beta) \qquad a_1y_1^2+2(a_2y_2^2+b_2y_2y_3+a_3y_3^2)+2(a_4y_4^2+a_5y_5^2) \equiv 0 \pmod 4;$$

Lösungen sind die Restklassen

$$(0,1,0,1,0),\ (0,1,0,0,1),\ (0,0,1,1,0),\ (0,0,1,0,1),$$

$$(\gamma) \qquad a_1y_1^2+a_2y_2^2+a_3y_3^2+4(a_4y_4^2+b_4y_4y_5+a_5y_5^2) \equiv 0.$$

$$(\delta) \qquad a_1y_1^2+2(a_2y_2^2+b_2y_2y_3+a_3y_3^2)+4(a_4y_4^2+b_4y_4y_5+a_5y_5^2) \equiv 0.$$

In den letzten beiden Fällen sind die vier Restklassen $(0, 0, 0, y_4, y_5)$ Lösungen.

Mithin ist

$$A(0, 2^N) \geqslant 4\prod_{\nu=1}^{5} 2^{N/2+k_\nu}.$$

Da $s = \sum l_\nu = 2\sum k_\nu + 2$ ist, folgt

$$\frac{A(0, 2^N)}{2^{4N}} \geqslant \frac{2^{2+5N/2+s/2-1}}{2^{4N}} = \frac{2^{s/2+1}}{2^{3N/2}}.$$

Man erhält daher statt (12) (mit $m = 5$)

$$\alpha_p(n) \geqslant \frac{2^{3/2+8/2}}{2^{3N/2}}\left(\frac{1}{2^{1/2}} - \frac{1}{2^{3/2}-1}\right) > 0. \tag{13}$$

Wenn $2^N \nmid n$ ist, so gilt nach Hilfssatz 9

$$\alpha_p(n) = \frac{A(n, p^{2N+1})}{p^{(2N+1)(m-1)}} \geqslant \frac{1}{p^{(2N+1)(m-1)}}$$

oder $= 0$. Zusammen mit (12) bzw. (13) folgt hieraus, daß es ein $\varkappa_2 = \varkappa_2(m, \mathfrak{S}) > 0$ gibt, sodaß für jedes n mit $\alpha_2(n) \neq 0$ gilt

$$\alpha_2(n) \geqslant \varkappa_2 > 0. \tag{14}$$

5. Zusammengefaßt gilt also nach (6), (9) und (14)

$$\sigma(n) = \prod_p \alpha_p(n) = \prod_{p \nmid 2S} \alpha_p(n) \cdot \prod_{p|2S} \alpha_p(n) \tag{15}$$

$$\geqslant \varkappa_0 \prod_{p|2S} \varkappa_p = \varkappa > 0,$$

wenn nicht $\sigma(n)$ dadurch Null wird, daß ein $\alpha_p(n)$ verschwindet. Damit ist Satz 4 bewiesen. Es ergibt sich noch leicht die

Folgerung. *Sei $\mathfrak{S}$ positiv definit und $m \geqslant 5$. Dann gibt es ein $\varrho = \varrho(m, \mathfrak{S}) > 0$, sodaß für die $n > 0$ mit $r(n) \neq 0$*

$$r(n) \geqslant \varrho n^{m/2-1} > 0$$

ist, wobei $r(n)$ die Lösungszahl von $\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q} = n$ ist.

Beweis. Wenn $\sigma(n) = 0$ ist, so verschwindet ein $\alpha_p(n)$. Nach Hilfssatz 9 ist daher $A(n, p^\mu) = 0$ für ein gewisses μ, d. h.

$$\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q} \equiv n \pmod{p^\mu}$$

ist unlösbar, woraus auch die Unlösbarkeit der entsprechenden Gleichung, also $r(n) = 0$ folgt. Wenn dagegen $\sigma(n) \neq 0$ ist, so ergeben (15) und Satz 3 die Behauptung.

Man sieht übrigens leicht ein, daß für kein $m \geqslant 5$ das $\varkappa$ aus Satz 4 durch eine positive Zahl ersetzt werden kann, die unabhängig von $\mathfrak{S}$ ist. Man nehme nämlich (für festes $m \geqslant 5$) die Formen

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{S}_k\mathfrak{x} = x_1^2 + \ldots + x_4^2 + 2^k(x_5^2 + \ldots + x_m^2).$$

Aus $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}_k\mathfrak{x} \equiv 2^l \pmod{2^k}$ folgt $x_1^2 + \ldots + x_4^2 \equiv 2^l \pmod{2^k}$, wobei $k = 2l+3$ sein soll. Wenn sich die Ausdrücke $A^{(k)}$ und $\alpha_2^{(k)}$ auf die obigen Formen,

A^* und α^* auf die Form $x_1^2 + \ldots + x_4^2$ beziehen, so ist nach Hilfssatz 9

$$\alpha_2^{(k)}(2^l) = \frac{A^{(k)}(2^l, 2^k)}{2^{k(m-1)}} = \frac{2^{k(m-4)} A^*(2^l, 2^k)}{2^{k(m-1)}} = \frac{A^*(2^l, 2^k)}{2^{3k}}.$$

Nach Hilfssatz 9 und den Untersuchungen von Kloosterman [1] ist dies $= \alpha_2^*(2^l)$, und diese Zahl strebt $\to 0$ für $l \to \infty$. Da die Determinante von $\mathfrak{S}_k$ keine Primzahl außer 2 enthält, folgt aus Hilfssatz 9, daß $\prod_{p>2} \alpha_p^{(k)}(2^l)$ nach oben beschränkt ist. Folglich gilt, wenn man wieder $k = 2l+3$ schreibt, für $l \to \infty$

$$\sigma^{(2l+3)}(2^l) \to 0.$$

§ 5. Hilfssätze über die Approximation von Funktionen. In diesem Paragraphen sollen für den späteren Gebrauch einige Hilfssätze bewiesen werden, die unabhängig vom Rest der Arbeit sind. Sei Λ: $|\mathfrak{x}| = 1$, wobei $\mathfrak{x}$ eine m-reihige reelle Spalte ist ($m \geqslant 3$). Das euklidische Oberflächenelement auf Λ sei durch $d\Omega$ bezeichnet. Weiter mögen $c_1, c_2, \ldots$ und $C_1, C_2, \ldots$ positive Zahlen sein, die höchstens von m, $\mathfrak{S}$ und später von Γ abhängen.

Hilfssatz 10. *Für $\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = 1$ ist*

$$T_n = \int_\Lambda (\mathfrak{x}'\mathfrak{y}+1)^n d\Omega_\mathfrak{y} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

unabhängig von $\mathfrak{x}$, und es gilt

$$T_n \geqslant c_1 2^n n^{-(m-1)/2}.$$

Beweis. Für jedes $\mathfrak{x} \in \Lambda$ gibt es eine orthogonale Matrix $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{X}\mathfrak{e}$, wo $\mathfrak{e}$ die erste Einheitsspalte ist. Es sei $\mathfrak{y} = \mathfrak{X}\mathfrak{v}$, und v die erste Komponente von $\mathfrak{v}$. Dann ist

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{y} = \mathfrak{e}'\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathfrak{v} = \mathfrak{e}'\mathfrak{v} = v,$$

also

$$T_n = \int_\Lambda (v+1)^n d\Omega_\mathfrak{v}.$$

Folglich hängt T_n nicht von $\mathfrak{x}$ ab. Für $v = 1 - 1/n$ ist wegen $\mathfrak{v}'\mathfrak{v} = 1$

$$|\mathfrak{v} - \mathfrak{e}| = \sqrt{2(1-v)} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Daher ist die Oberfläche der Kugelkappe $1 - 1/n \leqslant v \leqslant 1$ von Λ

$$\geqslant c_2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{m-1}.$$

Daraus folgt

$$T_n \geqslant \int\limits_{1-1/n\leqslant v\leqslant 1} (v+1)^n d\Omega \geqslant c_3 2^n \int\limits_{1-1/n\leqslant v\leqslant 1} d\Omega \geqslant c_1 2^n n^{-(m-1)/2}.$$

Nun sei Γ ein im Jordanschen Sinne meßbarer Bereich mit der Oberfläche G auf Λ. Seine charakteristische Funktion $f(\mathfrak{x})$ (d. h. $f(\mathfrak{x}) = 1$ für $\mathfrak{x}\in\Gamma$, $= 0$ für $\mathfrak{x}\notin\Gamma$) ist im Riemannschen Sinne auf Λ integrierbar. Für jedes $\delta > 0$ sei ein Bereich Φ_δ mit der Oberfläche F_δ konstruiert, der folgende Eigenschaften besitzt:

(E) Φ_δ ist J-meßbar und zu Γ punktfremd; wenn $\mathfrak{y}\in\Lambda$, $|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| \leqslant 2\sqrt{\delta}$ für mindestens ein $\mathfrak{x}\in\Gamma$ gilt, so ist $\mathfrak{y}\in\Phi_\delta\cup\Gamma$.

Sei

$$\varphi_n(\mathfrak{x}) = \frac{1}{T_n}\int\limits_{\Gamma\cup\Phi_\delta} (\mathfrak{x}'\mathfrak{y}+1)^n d\Omega_{\mathfrak{y}}.$$

Für dieses Polynom höchstens n-ten Grades gilt

$$1-\varphi_n(\mathfrak{x}) = \frac{1}{T_n}\int\limits_{\Lambda-(\Gamma\cup\Phi_\delta)} (\mathfrak{x}'\mathfrak{y}+1)^n d\Omega_{\mathfrak{y}}. \tag{1}$$

Wenn $\mathfrak{x}\in\Gamma$ und $\mathfrak{y}\in\Lambda-(\Gamma\cup\Phi_\delta)$ ist, d. h. $\mathfrak{y}\notin\Gamma\cup\Phi_\delta$, so gilt $|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2 > 4\delta$, woraus wegen $|\mathfrak{x}| = |\mathfrak{y}| = 1$

$$0 \leqslant 1+\mathfrak{x}'\mathfrak{y} \leqslant 2(1-\delta)$$

folgt. Aus (1) und aus Hilfssatz 10 ergibt sich daher

$$1-\varphi_n(\mathfrak{x}) \leqslant C_1(1-\delta)^n n^{(m-1)/2} \qquad (\mathfrak{x}\in\Gamma). \tag{2}$$

Nun sei

$$\psi_n(\mathfrak{x}) = \varphi_n(\mathfrak{x}) + C_1(1-\delta)^n n^{(m-1)/2}. \tag{3}$$

Aus $\varphi_n(\mathfrak{x}) \geqslant 0$ und aus (2) folgt dann sofort

$$\psi_n(\mathfrak{x}) \geqslant f(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x}\in\Lambda). \tag{4}$$

Außerdem kann man in

$$\int\limits_\Lambda \varphi_n(\mathfrak{x})\,d\Omega_{\mathfrak{x}} = \int\limits_\Lambda \left(\frac{1}{T_n}\int\limits_{\Gamma\cup\Phi_\delta} (\mathfrak{x}'\mathfrak{y}+1)^n d\Omega_{\mathfrak{y}}\right) d\Omega_{\mathfrak{x}}$$

die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhält nach Hilfssatz 10 den Wert

$$\int\limits_{\Gamma\cup\Phi_\delta} \frac{1}{T_n} T_n\,d\Omega_{\mathfrak{y}} = G+F_\delta.$$

Mithin ist

$$\int\limits_\Lambda \psi_n(\mathfrak{x})\,d\Omega = G+F_\delta+C_2(1-\delta)^n n^{(m-1)/2}. \tag{5}$$

Hilfssatz 11. *Es gibt Polynome* $P_\nu(\mathfrak{x})$ *und* $Q_\nu(\mathfrak{x})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

$$P_\nu(\mathfrak{x}) \leqslant f(\mathfrak{x}) \leqslant Q_\nu(\mathfrak{x}),$$

$$\int\limits_\Lambda P_\nu(\mathfrak{x})\,d\Omega \to G, \qquad \int\limits_\Lambda Q_\nu(\mathfrak{x})\,d\Omega \to G \qquad (\nu\to\infty).$$

Beweis. Da Γ J-meßbar ist, kann man ein $\delta = \delta_\nu > 0$ und ein Φ_{δ_ν} der vorhin beschriebenen Art so bestimmen, daß $F_{\delta_\nu} < 1/\nu$ ist. Zu diesem δ_ν wähle man dann $n = n_\nu$ so, daß

$$C_2(1-\delta_\nu)^{n_\nu} n_\nu^{(m-1)/2} < \frac{1}{\nu}$$

ist. Wenn man $Q_\nu(\mathfrak{x}) = \psi_{n_\nu}(\mathfrak{x})$ setzt (mit $\delta = \delta_\nu$), so folgt aus (4), daß $f(\mathfrak{x}) \leqslant Q_\nu(\mathfrak{x})$ ist, und nach (5) gilt weiter

$$0 \leqslant \int\limits_\Lambda Q_\nu(\mathfrak{x})\,d\Omega - G < \frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu} = \frac{2}{\nu}.$$

Wenn man $\Lambda-\Gamma$ statt Γ betrachtet, erhält man die Polynome $P_\nu(\mathfrak{x})$.

Wenn man über den Bereich Γ voraussetzt, daß er „vernünftig" berandet ist, so kann man explizite Abschätzungen für die Approximation in Hilfssatz 11 erhalten. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf Folgendes:

Hilfssatz 12. *Sei* Γ *ein Bereich auf* Λ *mit der Oberfläche* G, *dessen Rand eine analytische* ($(m-2)$-*dimensionale*) *Fläche ist. Dann gibt es Polynome* $P_h(\mathfrak{x})$ *und* $Q_h(\mathfrak{x})$ *höchstens* h-*ten Grades* $(h = 2, 3, \ldots)$, *die folgende Eigenschaften besitzen:*

$$|P_h(\mathfrak{x})| \leqslant C_3, \qquad |Q_h(\mathfrak{x})| \leqslant C_3,$$

$$P_h(\mathfrak{x}) \leqslant f(\mathfrak{x}) \leqslant Q_h(\mathfrak{x}),$$

$$\int\limits_\Lambda Q_h(\mathfrak{x})\,d\Omega - G \quad\text{und}\quad G-\int\limits_\Lambda P_h(\mathfrak{x})\,d\Omega < C_4\left(\frac{\log h}{h}\right)^{m/2-1}.$$

Beweis: Sei $\delta = \delta_h = (m-\frac{3}{2})\log h/h$, $h>1$, und Φ_{δ_h} die Menge der $\mathfrak{y}\in\Lambda$ mit $\mathfrak{y}\notin\Gamma$, für die $|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| \leqslant 2\sqrt{\delta_h}$ für mindestens ein $\mathfrak{x}\in\Gamma$ gilt. Dann hat Φ_{δ_h} die Eigenschaften (E), und man sieht leicht, daß für die Oberfläche F_{δ_h} von Φ_{δ_h} gilt

(6) $$F_{\delta_h} < C_5 \sqrt{\delta_h}^{\,m-2}.$$

Wenn man also für $Q_h(\mathfrak{x})$ das Polynom $\psi_h(\mathfrak{x})$ nimmt, das durch (3) definiert wurde (mit $\delta = \delta_h = (m-\frac{3}{2})\log h/h$), so ist nach (4) $Q_h(\mathfrak{x}) \geqslant f(\mathfrak{x})$ und nach (5) und (6)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Lambda} Q_h(\mathfrak{x})\,d\Omega - G &\leqslant C_5\,\delta_h^{m/2-1} + C_2(1-\delta_h)^h h^{(m-1)/2}\\ &\leqslant C_6\left(\frac{\log h}{h}\right)^{m/2-1} + C_7\exp\left(-(m-\tfrac{3}{2})\log h + \tfrac{1}{2}(m-1)\log h\right)\\ &\leqslant C_4\left(\frac{\log h}{h}\right)^{m/2-1}.\end{aligned}$$

Schließlich folgt aus (3) (wegen $0 \leqslant \varphi_n(\mathfrak{x}) \leqslant 1$), daß $|Q_h(\mathfrak{x})| \leqslant C_3$ ist. Durch Betrachtung von $\Lambda - \Gamma$ statt Γ erhält man $P_h(\mathfrak{x})$.

§ 6. Hilfssätze über Kugelfunktionen. Zur Bequemlichkeit des Lesers mögen hier einige bekannte Sätze über Kugelfunktionen bewiesen werden.

Sei $m \geqslant 2$ und $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_m^2}$. Jedes homogene Polynom k-ten Grades mit komplexen Koeffizienten, das $\Delta U = 0$ erfüllt, wird Kugelfunktion k-ten Grades genannt ([3]). Wenn $\mathfrak{c}$ eine isotrope Spalte ist (d. h. $\mathfrak{c}'\mathfrak{c} = 0$ erfüllt), so ist $(\mathfrak{c}'\mathfrak{x})^k$ eine Kugelfunktion k-ten Grades, wie man leicht nachrechnet. Hiervon gilt auch die Umkehrung:

Hilfssatz 13. *Zu jeder Kugelfunktion $U(\mathfrak{x})$ des Grades $k \geqslant 1$ gibt es endlich viele isotrope Spalten $\mathfrak{c}_n$, sodaß gilt*

$$U(\mathfrak{x}) = \sum_n (\mathfrak{c}_n'\mathfrak{x})^k.$$

Beweis: Für $m = 2$ folgt das daraus, daß jedes reelle harmonische Polynom (in zwei Variablen) der Realteil eines Polynoms in $x_1 + ix_2$ ist. Sei die Behauptung schon für alle Kugelfunktionen bewiesen, für die entweder die Variablenzahl $< m$ ist oder der Grad $< k$ ($m \geqslant 3$, $k \geqslant 2$; für $k = 1$ überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Behauptung).

([3]) In der Literatur wird häufig $\dfrac{1}{|\mathfrak{x}|^k}U(\mathfrak{x})$ als Kugelfunktion bezeichnet. Das erfordert aber, oft zwischen der Kugelfunktion und dem zugeordneten harmonischen Polynom zu unterscheiden.

Sei $U(\mathfrak{x})$ eine Kugelfunktion k-ten Grades in m Variablen. Dann ist $U_{x_\mu} = \partial U/\partial x_\mu$ (für $\mu = 1, 2, \ldots, m$) eine Kugelfunktion $(k-1)$-ten Grades. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es endlich viele isotrope Spalten $\mathfrak{c}_{n\mu} \neq 0$ ($n = 1, 2, \ldots, N_\mu$) mit

$$U_{x_\mu}(\mathfrak{x}) = \sum_{n=1}^{N_\mu} (\mathfrak{c}_{n\mu}'\mathfrak{x})^{k-1}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Es gibt nun wegen $\mathfrak{c}_{n\mu} \neq 0$ eine reelle Spalte $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}'\mathfrak{a} = 1$ (ihre Komponenten seien $a_1, \ldots, a_m$), sodaß $b_{n\mu} = \mathfrak{c}_{n\mu}'\mathfrak{a} \neq 0$ ist für alle n und μ. Es existiert weiter eine orthogonale Matrix $\mathfrak{A}$, in der $\mathfrak{a}$ die letzte Spalte ist. Sei $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}'\mathfrak{x}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_m} U(\mathfrak{A}\mathfrak{y}) &= a_1 U_{x_1}(\mathfrak{A}\mathfrak{y}) + \ldots + a_m U_{x_m}(\mathfrak{A}\mathfrak{y})\\ &= \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_\mu} a_\mu (\mathfrak{c}_{n\mu}'\mathfrak{A}\mathfrak{y})^{k-1}.\end{aligned}$$

Durch Integration folgt hieraus wegen $b_{n\mu} = \mathfrak{c}_{n\mu}'\mathfrak{a} \neq 0$

(1) $$U(\mathfrak{A}\mathfrak{y}) = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_\mu} \frac{a_\mu}{kb_{n\mu}} (\mathfrak{c}_{n\mu}'\mathfrak{A}\mathfrak{y})^k + U^*,$$

wo das Polynom U^* nur noch von $y_1, \ldots, y_{m-1}$ abhängt. Daher ist

$$0 = \Delta_{\mathfrak{y}} U(\mathfrak{A}\mathfrak{y}) = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{n=1}^{N_\mu} \frac{a_\mu}{kb_{n\mu}} \Delta_{\mathfrak{y}}\big((\mathfrak{c}_{n\mu}'\mathfrak{A}\mathfrak{y})^k\big) + \Delta_{\mathfrak{y}} U^*.$$

Die Eigenschaft der Isotropie und der Operator Δ sind gegenüber orthogonalen Transformationen invariant. Wegen $\dfrac{\partial^2}{\partial y_m^2}U^* = 0$ ist also $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial y_{m-1}^2}\right)U^* = 0$. Da sich jede $(m-1)$-reihige isotrope Spalte durch Hinzufügung einer 0 zu einer m-reihigen isotropen Spalte ergänzen läßt, kann man nach Induktionsvoraussetzung U^* in der im Hilfssatz geforderten Weise darstellen. Aus (1) folgt dann die Behauptung.

Hilfssatz 14. *Sei $U(\mathfrak{x})$ eine Kugelfunktion k-ten Grades, und $P(\mathfrak{x})$ eine beliebiges Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades. Dann gilt*

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|=1} P(\mathfrak{x})\,U(\mathfrak{x})\,d\Omega = 0.$$

Beweis. Es genügt anzunehmen, daß $P(\mathfrak{x})$ homogen vom Grade $l < k$ ist. Sei die Behauptung schon für homogene Polynome eines Grades $< l$ $(< k)$ bewiesen. Die Greensche Formel besagt

(2) $$\int\limits_{|\mathfrak{x}|\leqslant 1} (P\Delta U - U\Delta P)\,d\mathfrak{x} = \int\limits_{|\mathfrak{x}|=1}\left(P\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial P}{\partial n}\right)d\Omega,$$

wo $\partial U/\partial n$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen ist. Der Homogenität wegen ist

$$\frac{\partial U}{\partial n} = kU, \qquad \frac{\partial P}{\partial n} = lP.$$

Weiter ist $\Delta U = 0$ und ΔP entweder 0 oder ein homogenes Polynom eines Grades $l' \leqslant l-2$. Daher ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|\leqslant 1} U\Delta P\,d\mathfrak{x} = \int\limits_{|\mathfrak{y}|=1}\int\limits_0^1 r^k U(\mathfrak{y}) r^{l'}\Delta P(\mathfrak{y})\cdot r^{m-1}\,dr\,d\Omega$$
$$= \frac{1}{k+l'+m}\int\limits_{|\mathfrak{y}|=1} U\Delta P\,d\Omega = 0;$$

aus (2) ergibt sich daher

$$(k-l)\int\limits_{|\mathfrak{x}|=1} PU\,d\Omega = 0.$$

Wegen $k > l$ liefert das die Behauptung.

Nun sei $V_k(\xi)$ für $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ definiert durch

$$\frac{1-t^2}{(1-2t\xi+t^2)^{m/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(\xi)t^k \qquad (|t| < 1).$$

Hilfssatz 15. *Für festes reelles $\mathfrak{z}$ mit $|\mathfrak{z}| = 1$ ist $|\mathfrak{x}|^k V_k\left(\mathfrak{z}'\frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}\right)$ eine reelle Kugelfunktion k-ten Grades. Für $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ ist*

$$|V_k(\xi)| \leqslant Ck^{m-2}$$

mit einer höchstens von m abhängigen Konstanten C.

Beweis. Für $t > 0$, $|\mathfrak{x}|t < 1$ ist

(3) $$\frac{1-|\mathfrak{x}|^2t^2}{(1-2(\mathfrak{z}'\mathfrak{x})t+|\mathfrak{x}|^2t^2)^{m/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} V_k\left(\mathfrak{z}'\frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}\right)|\mathfrak{x}|^k t^k.$$

Die Anwendung der Operation

$$\Delta_{\mathfrak{x}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

auf die linke Seite dieser Gleichung ergibt 0, woraus

$$\Delta_{\mathfrak{x}}\left(|\mathfrak{x}|^k V_k\left(\mathfrak{z}'\frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}\right)\right) = 0$$

folgt. Aus (3) ergibt sich weiter, daß $|\mathfrak{x}|^k V_k\left(\mathfrak{z}'\frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}\right)$ ein homogenes Polynom k-ten Grades in $\mathfrak{x}$ ist, also eine Kugelfunktion des Grades k.

Wenn man $\xi = \cos\vartheta$ setzt, so entnimmt man aus der Definition, daß für $m > 2$ (für $m = 2$ ist das zu Beweisende eine bekannte Tatsache)

$$\sum_{k=0}^{\infty} V_k(\cos\vartheta)t^k = \left(1+\frac{2}{m-2}t\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{1}{(1-2t\cos\vartheta+t^2)^{m/2-1}}$$
$$= \left(1+\frac{2}{m-2}t\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{1}{(1-te^{i\vartheta})^{m/2-1}}\cdot\frac{1}{(1-te^{-i\vartheta})^{m/2-1}}\right]$$

gilt. Also ist $V_k(\cos\vartheta)$ eine Summe von Gliedern der Form $a_l\cos l\vartheta$ mit $a_l \geqslant 0$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$. Daraus folgt

(4) $$|V_k(\cos\vartheta)| \leqslant V_k(1).$$

Aus der Definition ergibt sich

$$\frac{1+t}{(1-t)^{m-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(1)t^k,$$

also

$$V_k(1) \leqslant 2\binom{m-2+k}{m-2} = 2\frac{k^{m-2}}{(m-2)!} \qquad (k\to\infty).$$

Zusammen mit (4) folgt hieraus die Behauptung.

Hilfssatz 16. *Sei $Q(\mathfrak{x})$ ein reelles Polynom höchstens h-ten Grades. Dann ist für $|\mathfrak{x}| = 1$*

$$Q(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{h} X_k(\mathfrak{x})$$

mit

$$X_k(\mathfrak{x}) = \frac{1}{L}\int\limits_{|\mathfrak{z}|=1} V_k(\mathfrak{z}'\mathfrak{x})Q(\mathfrak{z})\,d\Omega_{\mathfrak{z}} \qquad \left(L = \int\limits_{|\mathfrak{z}|=1} d\Omega_{\mathfrak{z}}\right),$$

und $|\mathfrak{x}|^k X_k(\mathfrak{x}/|\mathfrak{x}|)$ *ist eine reelle Kugelfunktion k-ten Grades (also* X_0 *eine Konstante).*

Beweis. Für $|\mathfrak{x}| = 1$, $0 \leqslant t < 1$ gilt

$$(5)\quad \frac{1}{L}\int\limits_{|\mathfrak{z}|=1} \frac{1-t^2}{(1-2(\mathfrak{z}'\mathfrak{x})t+t^2)^{m/2}} Q(\mathfrak{z})\,d\Omega_{\mathfrak{z}} = \sum_{k=0}^{h}\left(\frac{1}{L}\int\limits_{|\mathfrak{z}|=1} V_k(\mathfrak{z}'\mathfrak{x})Q(\mathfrak{z})\,d\Omega_{\mathfrak{z}}\right)t^k,$$

da nach Hilfssatz 14 und 15 die Koeffizienten von t^k für $k > h$ verschwinden. Man lasse nun $t \to 1$ streben. Da $Q(\mathfrak{z})$ auf $|\mathfrak{z}| = 1$ stetig ist, konvergiert die linke Seite von (5) nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie gegen $Q(\mathfrak{x})$, während die rechte Seite gegen $\sum_0^h X_k(\mathfrak{x})$ strebt. Da $|\mathfrak{x}|^k V_k(\mathfrak{z}'\mathfrak{x}/|\mathfrak{x}|)$ eine reelle Kugelfunktion des Grades k ist, gilt dasselbe für $|\mathfrak{x}|^k X_k(\mathfrak{x}/|\mathfrak{x}|)$.

§ 7. Der Hauptsatz über die Gleichverteilung. Sei $\mathfrak{S}$ eine positiv definite symmetrische ganzzahlige m-reihige Matrix und H das m-dimensionale Ellipsoid $\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} = 1$. Es gibt eine nicht-ausgeartete reelle Matrix $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}'\mathfrak{T}$. Auf H werde die folgende „$\mathfrak{S}$-Metrik" zugrunde gelegt: Durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{T}\mathfrak{y}$ wird $\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} = 1$ auf $\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = 1$ abgebildet, d. h. H auf die m-dimensionale Einheitskugel A. Das Bogenelement $(ds)^2 = (d\mathfrak{x})'(d\mathfrak{x})$ der euklidischen Metrik auf A geht dabei über in $(ds)^2 = (d\mathfrak{y})'\mathfrak{S}(d\mathfrak{y})$. Dies sei das Bogenelement der $\mathfrak{S}$-Metrik auf H. Sie bleibt bei allen Transformationen $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{C}\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ invariant. Der Flächeninhalt von H (im Sinne der $\mathfrak{S}$-Metrik) sei E.

Es bedeute wieder $r(n)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von $\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q} = n$, und $r(\varDelta, n)$ die Anzahl derjenigen Lösungen, für die $\mathfrak{q}/\sqrt{n}$ einem gewissen Bereich $\varDelta$ auf H angehört.

Satz 5. *Sei $\varDelta$ ein Bereich auf H, dessen Jordanscher Flächeninhalt (im Sinne der $\mathfrak{S}$-Metrik) existiere und $= D$ sei.*

Dann gilt für $m \geqslant 5$

$$(1)\qquad \frac{r(\varDelta, n)}{r(n)} \to \frac{D}{E} \qquad (n \to \infty),$$

wenn man sich auf die n mit $r(n) \neq 0$ beschränkt.

Für $m = 4$ gilt (1), falls es eine Konstante $\varrho = \varrho(\mathfrak{S}) > 0$ gibt, sodaß $r(n) = 0$ oder $r(n) \geqslant \varrho n$ ist.

Beweis. 1. Durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{T}\mathfrak{y}$ geht $\varDelta$ über in einen J-meßbaren Bereich Γ auf A. Sein Flächeninhalt ist

$$G = \frac{L}{E}D.$$

Nach Hilfssatz 11 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein reelles Polynom $Q(\mathfrak{x})$ mit

$$(2)\qquad f(\mathfrak{x}) \leqslant Q(\mathfrak{x})$$

und

$$(3)\qquad \int\limits_A Q(\mathfrak{x})\,d\Omega - \frac{L}{E}D < \frac{1}{2}L\varepsilon,$$

wobei $f(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von Γ ist. Wenn h der Grad von $Q(\mathfrak{x})$ ist, so gibt es nach Hilfssatz 16 reelle Kugelfunktionen (in m Variablen) $X_k(\mathfrak{x})$ der Grade k $(k = 0, 1, \ldots, h)$ sodaß für $\mathfrak{x} \in A$

$$(4)\qquad Q(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{h} X_k(\mathfrak{x})$$

ist. Dabei ist X_0 eine Konstante. Da für $k \geqslant 1$

$$\int\limits_A X_k(\mathfrak{x})\,d\Omega = 0$$

ist (Hilfssatz 14), folgt aus (4) und (3)

$$(5)\qquad X_0 = \frac{1}{L}\int\limits_A Q(\mathfrak{x})\,d\Omega < \frac{D}{E} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Andererseits gibt es nach Hilfssatz 13 für $k \geqslant 1$ komplexe Spalten $\mathfrak{b}_{k\nu}$ mit $\mathfrak{b}_{k\nu}'\mathfrak{b}_{k\nu} = 0$, sodaß gilt

$$X_k(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{N_k} (\mathfrak{b}_{k\nu}'\mathfrak{x})^k.$$

Man setze wieder $\mathfrak{x} = \mathfrak{T}\mathfrak{y}$. Wenn $\mathfrak{b}_{k\nu} = \mathfrak{T}\mathfrak{c}_{k\nu}$ und $Y_k(\mathfrak{y}) = X_k(\mathfrak{T}\mathfrak{y})$ ist, erhält man

$$(6)\qquad \mathfrak{c}_{k\nu}'\mathfrak{S}\mathfrak{c}_{k\nu} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, h;\ \nu = 1, 2, \ldots, N_k)$$

und

$$(7)\qquad Y_k(\mathfrak{y}) = \sum_{\nu=1}^{N_k} (\mathfrak{c}_{k\nu}'\mathfrak{S}\mathfrak{y})^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, h).$$

Für die charakteristische Funktion $g(\mathfrak{y})$ von $\varDelta$ gilt nach (2) und (4)

$$g(\mathfrak{y}) \leqslant \sum_{k=0}^{h} Y_k(\mathfrak{y}).$$

Unter Beachtung von (7) folgt daraus

$$r(\Delta, n) = \sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}=n,\ \mathfrak{q}/\sqrt{n}\in\Delta} 1 = \sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}=n} g\left(\frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\leqslant \sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}=n}\left(X_0 + \sum_{k=1}^{h}\sum_{\nu}\left(\mathfrak{c}'_{k\nu}\mathfrak{S}\frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{n}}\right)^k\right),$$

$$r(\Delta, n) \leqslant X_0 r(n) + \sum_{k=1}^{h}\sum_{\nu}\frac{1}{n^{k/2}}\left(\sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}=n}(\mathfrak{c}'_{k\nu}\mathfrak{S}\mathfrak{q})^k\right).$$

Nach Satz 2, § 2 gilt nun wegen (6) für festes ν und jedes $k = 1, 2, \ldots$ für $n \to \infty$

$$(8) \qquad \frac{1}{n^{k/2}}\sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{S}\mathfrak{q}=n}(\mathfrak{c}'_{k\nu}\mathfrak{S}\mathfrak{q})^k = O(n^{m/4-1/5}).$$

Daraus folgt unter Benutzung von (5)

$$r(\Delta, n) \leqslant \left(\frac{D}{E} + \frac{\varepsilon}{2}\right) r(n) + O(n^{m/4-1/5}) \qquad (n \to \infty).$$

Für $m \geqslant 5$ ist nach der Folgerung aus Satz 4 für $r(n) \neq 0$

$$r(n) \geqslant \varrho n^{m/2-1}, \qquad \varrho = \varrho(m, \mathfrak{S}) > 0.$$

Für $m = 4$ wurde das vorausgesetzt. Daher ergibt sich endlich

$$\frac{r(\Delta, n)}{r(n)} \leqslant \frac{D}{E} + \frac{\varepsilon}{2} + O(n^{-m/4+4/5}).$$

Für $n > n_0(\varepsilon, \Delta, m, \mathfrak{S})$ ist dies wegen $m \geqslant 4$

$$< \frac{D}{E} + \varepsilon.$$

Ganz enstprechend leitet man eine untere Abschätzung her.

Für $m \geqslant 5$ hätte übrigens in (8) die schwächere Abschätzung $O(n^{m/4})$ zum Beweise genügt, die sich, wie am Schluß von § 2 bemerkt wurde, erheblich leichter herleiten läßt. Wie man weiter dem Beweis entnimmt, gilt (1) für $m = 4$ ohne die zusätzliche Voraussetzung $r(n) \geqslant \varrho n > 0$ (für $r(n) \neq 0$), wenn man sich auf eine Folge der n beschränkt, für die $n^{-4/5} r(n) \to \infty$ strebt.

Man kann in Satz 5 für spezielle Fälle eine explizite Abschätzung erhalten, wenn man sich statt auf Hilfssatz 11 auf Hilfssatz 12 stützt:

Satz 6. *Sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ die m-reihige Einheitsmatrix und $m \geqslant 5$ (also $H = \Lambda$). Sei Γ ein Bereich auf Λ mit der Oberfläche G. Der Rand von Γ sei (der Einfachheit halber) eine analytische Fläche. Dann gilt für $n \to \infty$*

$$\frac{r(\Gamma, n)}{r(n)} = \frac{G}{L} + O\left(\frac{(\log\log n)^{m-2}}{(\log n)^{m/2-1}}\right)$$

(Wegen $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$ ist immer $r(n) > 0$ für $n \geqslant 0$).

Beweis. Seien $P_h(\mathfrak{x})$ und $Q_h(\mathfrak{x})$ die Polynome aus Hilfssatz 12. Nach Hilfssatz 16 ist dann

$$(9) \qquad Q_h(\mathfrak{x}) = X_0 + \sum_{k=1}^{h} X_k(\mathfrak{x}),$$

wobei X_0 eine Konstante und

$$X_k(\mathfrak{x}) = \frac{1}{L}\int_{\Lambda} V_k(\mathfrak{z}'\mathfrak{x}) Q_h(\mathfrak{z})\, d\Omega_{\mathfrak{z}}$$

ist. Da nach Hilfssatz 12 $|Q_h(\mathfrak{x})| \leqslant C_1$ ist (wo $C_1, C_2, \ldots$ positive Konstanten sind, die höchstens von m und Γ abhängen), folgt aus Hilfssatz 15

$$(10) \qquad |X_k(\mathfrak{x})| \leqslant C_2 k^{m-2} \qquad (\mathfrak{x} \in \Lambda).$$

Nun ist wieder für $k \geqslant 1$

$$(11) \qquad X_k(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{N_k}(\mathfrak{c}'_{k\nu}\mathfrak{x})^k$$

mit komplexen Spalten $\mathfrak{c}_{k\nu}$, die $\mathfrak{c}'_{k\nu}\mathfrak{c}_{k\nu} = 0$ erfüllen. Man setze zur Abkürzung

$$F_k(z) = \sum_{\nu=1}^{N_k}\Theta_k(z, \mathfrak{c}_{k\nu}).$$

Dann ist nach (11)

$$(12) \qquad F_k(z) = \sum_{\mathfrak{q}} X_k(\mathfrak{q})\, e(z\mathfrak{q}'\mathfrak{q}).$$

Wegen $\mathfrak{c}'_{k\nu}\mathfrak{c}_{k\nu} = 0$ kann man Hilfssatz 5, § 2 anwenden. Man ersetze darin $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{c}_{k\nu}$ und summiere über ν. Wegen (12) erhält man dann (für $c > 0$)

$$\frac{1}{(cz+d)^{m/2+k}} F_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{2^k}\sum_{\mathfrak{q}} X_k(\mathfrak{q})\, e\left(\frac{z}{4}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}\right)[\ldots],$$

wo in der eckigen Klammer eine Zahl steht, die absolut $\leqslant 1$ ist. Daher ist

$$(13) \qquad \left|\frac{1}{(cz+d)^{m/2+k}} F_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right| \leqslant \sum_{\mathfrak{q}} X_k(\mathfrak{q})\, e^{-\pi y \mathfrak{q}'\mathfrak{q}/2}.$$

Es ist $X_k(\mathfrak{q}) = n^{k/2} X_k(\mathfrak{q}/\sqrt{n})$ für $n > 0$, und die Anzahl $r(n)$ der Lösungen von $\mathfrak{q}'\mathfrak{q} = n$ ist trivialerweise $\leqslant C_3 n^{m/2}$. Unter Beachtung von (10) folgt daher, daß die linke Seite von (13)

$$\leqslant C_4 k^{m-2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{(m+k)/2} e^{-\pi n y/2}$$

ist. Wegen

$$n^{(m+k)/2} e^{-\pi n y/4} \leqslant \left(\frac{2(m+k)}{\pi e y}\right)^{(m+k)/2}$$

folgt für $c > 0$ und $y \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$ schließlich (da $2/\pi e < 1$ ist)

$$\left|\frac{1}{(cz+d)^{m/2+k}} F_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right| \leqslant C_5 k^{k/2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi\sqrt{3}n/8} \left(\frac{1}{y}\right)^{m/2+k/2} \tag{14}$$

$$\leqslant C_6 k^{k/2} \left(\frac{1}{y}\right)^{m/2+k/2}.$$

Man kann jedes z^* mit $0 < y^* = \operatorname{Im} z^* < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ durch eine Modulsubstitution

$$z^* = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $c > 0$ in ein z mit $y \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$ überführen. Daher ist nach (14) (für jedes z^* mit $0 < y^* < \frac{1}{2}\sqrt{3}$)

$$y^{*m/4+k/2} |F_k(z^*)| = \frac{y^{m/4+k/2}}{|cz+d|^{m/2+k}} |F_k(z^*)| \leqslant C_6 k^{k/2}.$$

Wegen (12) ergibt sich hieraus durch eine bekannte Schlußweise (wie in § 3)

$$\left|\sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{q}=n} X_k\left(\frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant C_7 k^{k/2} n^{m/4}. \tag{15}$$

Aus Gleichung (9) folgt (man vergleiche den Beweis von Satz 5)

$$r(\Gamma, n) \leqslant X_0 r(n) + \sum_{k=1}^{h} \left(\sum_{\mathfrak{q}'\mathfrak{q}=n} X_k\left(\frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{n}}\right)\right). \tag{16}$$

Hilfssatz 12 ergibt (anstelle von (5))

$$X_0 < \frac{G}{L} + C_8 \left(\frac{\log h}{h}\right)^{m/2-1}. \tag{17}$$

Aus (15), (16) und (17) folgt nun wegen $r(n) \geqslant \varrho n^{m/2-1}$, $\varrho = \varrho(m) > 0$ (Folgerung aus Satz 4, mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$)

$$\frac{r(\Gamma, n)}{r(n)} - \frac{G}{L} \leqslant C_8 \left(\frac{\log h}{h}\right)^{m/2-1} + C_9 \left(\frac{1}{n}\right)^{m/4-1} h^{h/2}.$$

Wenn man (für genügend großes n) $h = \left[\dfrac{\log n}{4 \log\log n}\right]$ setzt, ergibt sich schließlich

$$\frac{r(\Gamma, n)}{r(n)} - \frac{G}{L} \leqslant C_{10} \left(\frac{(\log\log n)(\log\log n)}{\log n}\right)^{m/2-1} +$$

$$+ C_{10} \exp\left[\left(-\frac{1}{4}m+1\right)\log n + \frac{1}{8}\cdot\frac{\log n}{\log\log n}\cdot\log\log n\right]$$

$$\leqslant C_{11} \frac{(\log\log n)^{m-2}}{(\log n)^{m/2-1}}.$$

Entsprechend erhält man die untere Abschätzung.

Literaturverzeichnis

[1] H. D. Kloosterman, *On the representation of numbers in the form* $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, Acta Math. 49 (1926), S. 407-464.

[2] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Leipzig und Berlin 1918.

[3] Ju. W. Linnik, *Asymptotische Verteilung der ganzzahligen Punkte auf der Sphäre* (russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR 96 (1954), S. 909-912.

[4] A. W. Malyschew, *Über die Verteilung der ganzzahligen Punkte auf der vierdimensionalen Sphäre* (russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR 114 (1957), S. 25-28.

[5] H. Minkowski, *Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Ges. Abh. Bd. 1, S. 3-114.

[6] R. A. Rankin, *The order of the Fourier coefficients of integral modular forms*, Proc. Cambr. phil. soc. 35 (1939), S. 357-372.

[7] B. Schoeneberg, *Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen*, Math. Ann. 116 (1939), S. 511-523.

[8] C. L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, Annals of Math. 36 (1935), S. 527-606.

[9] W. A. Tartakowsky, *Expressions pour le nombre des représentations d'un nombre par une forme quadratique positive à plus de trois variables*, Comptes Rendus, Paris 186 (1928). S. 1337-1340; *La détermination de la totalité des nombres représentables par une forme quadratique positive à plus de quatre variables*, S. 1401-1403.

Reçu par la Rédaction le 10. 12. 1958