D'où, comme dans le travail [1], résulte que l'équation (3) a au moins deux solutions pour tous les k pairs $< \prod_{i=1}^{26} p_i > 2\cdot 10^{58}$. Nous avons donc:

THÉORÈME. *L'équation $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ a au moins deux solutions pour tous les nombres naturels $k \leqslant 2\cdot 10^{58}$.*

Il est à remarquer que M. Cieślakowski a construit une table des valeurs de la fonction $\varphi(x)$ pour $10^4 < x \leqslant 2\cdot 10^4$ et il a trouvé 4 nouvelles solutions de l'équation $\varphi(x+1) = \varphi(x)$, à savoir 10604, 11715, 13365, 18315, ainsi que 55 nouvelles solutions de l'équation $\varphi(x+2) = \varphi(x)$, mais aucune nouvelle solution de l'équation $\varphi(x+3) = \varphi(x)$.

Travail cité

[1] A. Schinzel, *Sur l'équation $\varphi(x+k) = \varphi(x)$*, Acta Arith. 4 (1958), p. p. 181-184.

Reçu par la Rédaction le 22. 4. 1959

ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Über eine Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz

von

W. STAŚ (Poznań)

1. Wir bezeichnen mit $\Lambda(n)$ die bekannte zahlentheoretische Funktion, welche $= \log p$ ist, wenn n eine Primzahlpotenz ist und sonst $= 0$.

Es sei ferner

$$R(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) - x, \tag{1.1}$$

das sogenannte Restglied im Primzahlsatz.

Wie bekannt, hat P. Turán folgende explizite untere Abschätzung des $|R(x)|$ gefunden ([4], Satz. XXX):

Wenn $\zeta(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\beta_0 \geqslant \frac{1}{2}, \gamma_0 > 0)$ und

$$T > \max(c_1, \exp\exp 60 \log^2 |\varrho_0|) \tag{1.2}$$

dann

$$|R(\xi)| = \max_{1\leqslant x\leqslant T} |R(x)| > T^{\beta_0} \exp\left(-21 \frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right) \tag{1.3}$$

und c_1 ist eine explizite positive numerische Konstante.

Herr Professor P. Turán, hat mir eine Verschärfung der Abschätzung (1.3), durch Verbesserung der Lokalisation von ξ in $1 \leqslant x \leqslant T$, suggeriert.

Aus dem Satz (1.2) und der bekannten oberen Abschätzung des Restgliedes, folgt trivial eine Verbesserung der Lokalisation.

Wenn nämlich ε eine beliebige positive Zahl bedeutet, $\zeta(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\beta_0 \geqslant \frac{1}{2}, \gamma_0 > 0)$ und

$$T > \max(c_2, \exp\exp 60 \log^2 |\varrho_0|)$$

dann

$$\max_{T^{\beta_0-\varepsilon}\leqslant x\leqslant T} \left|\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) - x\right| > T^{\beta_0} \exp\left(-21 \frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right) \tag{1.4}$$

und c_2 ist eine Konstante die von ε abhängt.

Es wäre interessant, das Intervall $T^{\beta_0-\varepsilon} \leqslant x \leqslant T$ zu verkürzen.

Ich habe folgendes Resultat bekommen:

Satz. *Wenn* $\zeta(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\frac{1}{2} \leqslant \beta_0 < 1)$ *und*

$$T > \max\big(c_3, \exp\exp(2|\varrho_0|)\big), \tag{1.5}$$

dann

$$\max_x |R(x)| > T^{\beta_0} \exp\left(-8\frac{\log T}{\log\log T}\right), \tag{1.6}$$

$$T\exp\left(-\frac{\log T \log\log\log T}{(\log\log T)^2}\right) - 1 \leqslant x \leqslant T,$$

und c_3 *ist eine explizite numerische Konstante.*

2. Zum Beweis von (1.4) benutzen wir folgenden Satz ([3], Satz X; [1]):

Wenn

$$|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \ldots \geqslant |z_n|$$

beliebige komplexe Zahlen sind, $m > 0$ *und* $n \leqslant L_1$, *dann gibt es eine ganze Zahl* ν, *so daß*

$$m \leqslant \nu \leqslant m + L_1$$

und

$$|z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| \geqslant \left(\frac{L_1}{23(m+L_1)}\right)^{L_1} |z_1|^\nu. \tag{2.1}$$

3. Es bezeichnen $c_4, c_5, \ldots$ explizit angebbare numerische Konstanten. Übersichtlichkeitshalber führen wir einige abkürzende Bezeichnungen ein.

Es sei $T > 100$ und

$$A = \log\log T, \tag{3.1}$$

$$B = (\log\log T)^{-1}. \tag{3.2}$$

Es sei weiter

$$m = \frac{1}{A-B}\log\left(T\exp\left(-\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}\right)\right), \tag{3.3}$$

$$L_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^3}. \tag{3.4}$$

Dann für $T > c_4$ folgt

$$m > L_1. \tag{3.5}$$

Von der ganzen Zahl k fordern wir vorlaüfig nur daß

$$m \leqslant k \leqslant \frac{\log T}{A+B}. \tag{3.6}$$

Für $T > c_5$ ist

$$m + L_1 \leqslant \frac{\log T}{A+B}. \tag{3.7}$$

Wie bekannt ist, für jedes $l \geqslant 2$ existiert ein T_l mit

$$l \leqslant T_l \leqslant l+1 \tag{3.8}$$

so daß auf der Strecke

$$t = T_l, \qquad -\frac{3}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2 \tag{3.9}$$

die Ungleichung

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \leqslant c_0 \log^2 T_l \tag{3.10}$$

gilt.

Es sei weiter

$$l = \frac{\log T}{(\log\log T)^4} \tag{3.11}$$

gewählt.

4. Wir betrachten das Integral (vergl. [5], S. 36)

$$I_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} \left(e^{A\omega}\frac{e^{B\omega}-e^{-B\omega}}{2B\omega}\right)^k F(\omega)\,d\omega, \tag{4.1}$$

wo

$$F(s) = -\left(\zeta(s) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right); \tag{4.2}$$

$\zeta(s)$ ist die Riemannsche Zetafunktion.

Für $\sigma > 1$ hat man wie bekannt

$$F(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n^\omega}. \tag{4.3}$$

Wenn man (4.3) in (4.1) einsetzt, bekommt man für $\sigma > 1$

$$I_k = \sum_n \big(\Lambda(n)-1\big)\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\left(e^{A\omega}\frac{e^{B\omega}-e^{-B\omega}}{2B\omega}\right)^k \frac{d\omega}{n^\omega}. \tag{4.4}$$

Das letzte Integral schreiben wir weiter in der Form

$$(4.5)\qquad \frac{1}{(2B)^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{(e^{Ak+B(2j-k)}/n)^{\omega}}{\omega^k}\,d\omega$$

und wenden jetzt die bekannte Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{r^{\omega}}{\omega^k}\,d\omega = \begin{cases}\dfrac{1}{(k-1)!}\log^{k-1}r, & r\geqslant 1,\\ 0, & 0<r<1\end{cases}$$

an. Bezeichnen wir noch

$$(4.6)\qquad G_k = \big((2B)^k(k-1)!\big)^{-1},$$

$$(4.7)\qquad H(n) = \sum_j(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\big(2Bj+(A-B)k-\log n\big)^{k-1},$$

$$\frac{1}{2B}\big(\log n+(B-A)k\big)\leqslant j\leqslant k,$$

dann gilt

$$(4.8)\qquad I_k = G_k\sum_n\big(\Lambda(n)-1\big)H(n),\qquad e^{(A-B)k}\leqslant n\leqslant e^{(A+B)k}.$$

Sei jetzt T so gewählt daß $e^{(A-B)k}$ ganz ist. Durch partielle Summation gilt dann

$$(4.9)\ I_k = \sum_n R(n)\big(H(n)-H(n+1)\big)+l_1+l_2,\qquad e^{(A-B)k}\leqslant n\leqslant[e^{(A+B)k}-1],$$

wo

$$(4.10)\qquad l_1 = R([e^{(A+B)k}])H([e^{(A+B)k}]),$$

und

$$(4.11)\qquad l_2 = -R([e^{(A-B)k}-1])H(e^{(A-B)k})$$

bezeichnet.

Nach leichten Abschätzungen ist weiter

$$(4.12)\qquad |H(n)-H(n+1)|\leqslant\frac{1}{n}(k-1)2^{2(k-1)}(kB)^{k-2}+$$

$$+\Big|\sum_j(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\big(2Bj+(A-B)k-\log n\big)^{k-1}\Big|,$$

$$\frac{1}{2B}\big(\log n+(B-A)k\big)\leqslant j<\frac{1}{2B}\big(\log(n+1)+(B-A)k\big).$$

Wenn wir mit S die Summe in (4.9) bezeichnen, bekommen wir nach (4.12)

$$(4.13)\qquad |S|\leqslant\mu_1+\mu_2,$$

wo

$$(4.14)\qquad \mu_1 = \sum_n|R(n)|\Big|\sum\Big|,\qquad e^{(A-B)k}\leqslant n\leqslant[e^{(A+B)k}-1]$$

($\sum$ bezeichnet die Summe in (4.12)) und

$$(4.15)\quad \mu_2 = (k-1)2^{2(k-1)}(kB)^{k-2}\sum_n\frac{|(R(n)|}{n},\qquad e^{(A-B)k}\leqslant n\leqslant[e^{(A+B)k}-1].$$

Nach leichten Abschätzungen hat man weiter

$$(4.16)\qquad \mu_1\leqslant 2^k(2Bk)^{k-1}\max_x R(x),\qquad e^{(A-B)k}\leqslant x\leqslant[e^{(A+B)k}-1],$$

und

$$(4.17)\qquad \mu_2\leqslant(k-1)2^{2(k-1)}(Bk)^{k-2}(2Bk+1)\max_x|R(x)|,$$

$$e^{(A-B)k}\leqslant x\leqslant[e^{(A+B)k}-1].$$

Um I_k von oben abzuschätzen müssen wir noch l_1+l_2 berücksichtigen. Wir haben einfach

$$(4.18)\qquad |l_1+l_2|\leqslant 2^k\big((2Bk)^{k-1}+1\big)\max_x|R(x)|,\qquad e^{(A-B)k}-1\leqslant x\leqslant e^{(A+B)k}.$$

Aus (4.9), (4.13), (4.16), (4.17) und (4.18) folgt endlich

(4.19)

$$|I_k|\leqslant G_k\big(2^k+2^{k+1}(2Bk)^{k-1}+(k-1)2^{2(k-1)}(Bk)^{k-2}(2Bk+1)\big)\max_x|R(x)|,$$

$$e^{(A-B)k}-1\leqslant x\leqslant[e^{(A+B)k}].$$

Wenn $e^{(A-B)k}$ nicht ganz ist bekommt man auf ähnlichem Weg

$$(4.20)\qquad |I_k|\leqslant G_k(\ldots)\max_x|R(x)|,\qquad [e^{(A-B)k}+1]\leqslant x\leqslant[e^{(A+B)k}].$$

In beiden Fällen, wenn wir nur voraussetzen daß $2Bk>1$, haben wir

$$(4.21)\qquad |I_k|\leqslant e^{2(k+2\log k)}\max_x|R(x)|,\qquad e^{(A-B)k}-1\leqslant x\leqslant e^{(A+B)k}.$$

Wegen (3.2) und (3.6) kann man wirklich T so groß wählen daß $2Bk$ größer als 1 ist.

Nach (3.1), (3.2) und (3.6), für $T > c_6$ ergibt sich aus (4.21)

$$(4.22)\qquad |I_k| \leqslant \exp\left(3\frac{\log T}{\log\log T}\right)\max_x |R(x)|,$$

$$T\exp\left(-\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}\right)-1 \leqslant x \leqslant T.$$

Nach dem Cauchyschen Satz hat man

$$(4.23)\qquad I_k = -\sum_{\varrho}\left(e^{A\varrho}\frac{e^{B\varrho}-e^{-B\varrho}}{2B\varrho}\right)^k - $$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{(-1)}\left(e^{A\omega}\frac{e^{B\omega}-e^{-B\omega}}{2B\omega}\right)^k\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\omega)+\zeta(\omega)\right)d\omega,$$

wo ϱ die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ bezeichnen.

Wenn D das letzte Integral bezeichnet, dann ist

$$(4.24)\qquad |D| \leqslant \frac{e^{-Ak}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{|e^{B(-1+iv)}-e^{-B(-1+iv)}|}{2B\sqrt{1+v^2}}\right)^k\left|\frac{\zeta'}{\zeta}+\zeta\right|dv$$

$$\leqslant \frac{e^{-Ak}(e^B+e^{-B})^k}{2\pi(2B)^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+v^2)^{k/2}}\left(\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+iv)\right|+|\zeta(-1+iv)|\right)dv.$$

Aber wie bekannt ist

$$(4.25)\qquad \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+iv)\right| \leqslant c_7\log(2+|v|)$$

und

$$(4.26)\qquad |\zeta(-1+iv)| \leqslant c_8\big(1+(|v|+2)\big)\log(|v|+2)+\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Aus (3.1), (3.2), (3.6), (4.24), (4.25) und (4.26) für $T > c_9$ ergibt sich

$$(4.27)\qquad |D| \leqslant c_{10}\frac{1}{B^k e^{(A-B)k}} \leqslant c_{11}\frac{1}{T^{0,99}}.$$

Die Summe in (4.23) teilen wir jetzt in zwei Summen ein

$$(4.28)\qquad \sum_{\varrho}\left(e^{A\varrho}\frac{e^{B\varrho}-e^{-B\varrho}}{2B\varrho}\right)^k = \sum_{\substack{\varrho=\beta+\gamma i\\|\gamma|<T_l}}{}'(\ldots)^k + \sum_{\substack{\varrho=\beta+\gamma i\\|\gamma|\geqslant T_l}}{}''(\ldots)^k$$

Für die zweite Summe gilt nach (3.4), (3.6) und (3.11) für $T > c_{10}$ folgende Abschätzung

$$(4.29)\qquad \Bigg|\sum_{\substack{\varrho=\beta+\gamma i\\|\gamma|\geqslant T_l}}{}''\Bigg| \leqslant c_{11}\frac{e^{(A+B)k}}{B^k([l]-1)^{k-2}(k-2)} \leqslant T^{0,03}.$$

Die erste Summe schätzen wir von unten nach dem Satz (2.1) ab. Wir wählen als k, das ν des Satzes (2.1) und das m dieses Satzes bestimmen wir nach (3.3).

Um die Erfüllung der einzigen Beschränkung (3.6) über k zu garantieren, genügt es zu zeigen, daß die Anzahl der Glieder der ersten Summe kleiner als L_1 ist.

Diese Anzahl ist

$$(4.30)\qquad 2N(T_l) \leqslant c_{12}T_l\log T_l \leqslant c_{13}\frac{\log T}{(\log\log T)^3},$$

was für $T > C_{14}$ wirklich $< L_1$ ausfällt.

Nach dem Satz (2.1) kann man k so wählen, daß

$$(4.31)\qquad \Bigg|\sum_{\substack{\varrho=\beta+\gamma i\\|\gamma|<T_l}}{}'(\ldots)^k\Bigg| \geqslant \left(\frac{L_1}{23(m+L_1)}\right)^{L_1}|z_1|^k.$$

Wegen (1.5) ist aber $|\varrho_0| < T_l$. Für das z_1 im (2.1) gilt also

$$(4.32)\qquad |z_1|^k \geqslant e^{kA\beta_0}\left|\frac{e^{B\varrho_0}-e^{-B\varrho_0}}{2B\varrho_0}\right|^k.$$

Aus (1.5) und (3.2) schließt man, daß $|B\varrho_0| < \frac{1}{2}$ ist. Daraus wegen (3.1), (3.2) und (3.5) für $T > c_{15}$ folgt

$$(4.33)\qquad |z_1|^k \geqslant e^{kA\beta_0}\left(1-\frac{|B\varrho_0|^2}{3}\right)^k$$

$$\geqslant T^{\beta_0}\exp\left(-\left(\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}+\frac{\log T}{\log\log T}\right)\right).$$

Nach (3.4) und (3.5) für $T > c_{16}$ gilt endlich

$$(4.34)\qquad \left(\frac{L_1}{23(m+L_1)}\right)^{L_1} \geqslant \exp\left(-2\frac{\log T(\log\log\log T)^2}{(\log\log T)^3}\right).$$

Wir haben weiter aus (4.23) und (4.28)

$$(4.35)\qquad |I_k| \geqslant \Bigg|\sum_{|\gamma|<T_l}{}'\Bigg| + \Bigg(\Bigg|\sum_{|\gamma|\geqslant T_l}{}''\Bigg| + |D|\Bigg).$$

Aus (4.22), (4.29), (4.31), (4.32), (4.33) und (4.34) ergibt sich weiter für (1.5)

$$T^{\beta_0}\exp\left(-\left(\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}+2\frac{\log T(\log\log\log T)^2}{(\log\log T)^3}+\frac{\log T}{\log T}\right)\right)$$

$$\leqslant \exp\left(3\frac{\log T}{\log\log T}\right)\max_x|R(x)|+T^{0,03}+c_{16}\frac{1}{T^{0,99}},$$

$$T\exp\left(-\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}\right)-1\leqslant x\leqslant T.$$

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] V. T. Sós and P. Turán, *On some new theorems in the theory of diophantine approximation*, Acta Math. Hung. 6 (1955), S. 241-257.

[2] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.

[3] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

[4] — *On the remainder-term of prime-number-formula I*, Acta Math. Hung. 1 (1950), S. 48-63.

[5] — *On the so-called density-hypothesis in the theory of the zeta-function of Riemann*, Acta Arithmetica IV (1957), S. 31-56.

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
ADAM MICKIEWICZ UNIVERSITÄT IN POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 16. 5. 1959

ACTA ARITHMETICA
V (1959)

Remarks to the paper of E. Cohen "Arithmetical functions associated with arbitrary sets of integers"

(This volume, pp. 407-415)

1. Between the statement of Theorem 3.1 and the proof, insert the following:

Remark. If $1\leqslant x\leqslant 2$, then (3.1) may be assumed to hold with $O(x\log x)$ replaced by $O(1)$.

2. In the displayed formula immediately following (3.5), replace

$$O\left(x\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\log\frac{x}{n}\right)\quad \text{if}\quad k=2$$

by

$$O\left(x\sum_{n\leqslant x/2}\frac{1}{n}\log\frac{x}{n}\right)+O(x)\quad \text{if}\quad k=2.$$