Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:

ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 \$.

Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

PRINTED IN POLAND

Sur l'équation $f(X) \cdot f(Y) = f(X \cdot Y)$

par S. GOŁĄB (Kraków)

Introduction. Soient deux espaces: l'un dont les éléments seront désignés par des majuscules et le second, dont les éléments seront désignés par des minuscules.

Nous supposons définie dans chacun de ces deux espaces une „multiplication” des éléments (opération intérieure dont le résultat appartient au même espace).

Supposons donnée, en plus, une transformation univoque f qui à chaque élément X du premier espace fait correspondre un élément x du second:

$$x = f(X).$$

On peut se proposer de déterminer toutes les solutions de l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad f(X) \cdot f(Y) = f(X \cdot Y).$$

Les opérations $X \cdot Y$ et $x \cdot y$ ne doivent pas former de groupe. Dans le cas où elles en forment un, il s'agit de trouver tous les homomorphismes du premier groupe en second.

Dans le cas spécial où les deux espaces représentent l'ensemble des nombres réels et l'opération définie est l'addition des nombres, l'équation (1) se réduit à l'équation bien connue de Cauchy qui possède aussi des solutions non mesurables et, parmi les mesurables, seulement des solutions linéaires et homogènes.

Dans le cas où les éléments X et x sont des matrices, l'équation (1) a été traitée par I. Schur ([1] et [2]) qui a résolu le problème en se bornant aux transformations f qui sont des polynômes. Dans ce cas le problème a été résolu par Schur par des méthodes purement algébriques.

K. Stephanos [4] a démontré en 1913 que si X est une matrice quadratique de degré fixe mais arbitraire et x un scalaire, alors dans l'hypothèse supplémentaire que $f(X)$ est dérivable par rapport aux éléments

ξ_{ij} de la matrice X , toutes les solutions f de l'équation (1) sont contenues dans la formule

$$(2) \quad f = [\det(\xi_{ij})]^a,$$

où a est une constante⁽¹⁾.

Le cas général où les éléments de tous les deux espaces sont des matrices quadratiques a été considéré en 1942 par O. Perron [5]. Perron ne s'est pas borné dans ses recherches aux polynômes — comme l'a fait I. Schur — mais aux solutions $f(X)$ dont les éléments sont analytiques dans le voisinage de la matrice unitaire $X = E$, c'est-à-dire peuvent être développés suivant les puissances des variables $\xi_{ij} - \delta_{ij}$ ⁽²⁾. Perron a donné, sous ces hypothèses de régularité, les solutions de l'équation fonctionnelle (1) dans les cas suivants: $m = 1$, n arbitraire, $m = 2$, n arbitraire, $n = 1$, m arbitraire⁽³⁾.

Le travail de P. Reisch [6] a poussé un peu plus loin les résultats de M. Perron, en se bornant aussi aux solutions analytiques.

Le but de ce travail est de donner les solutions de l'équation (1) dans le cas $n = 2$, $m = 1$ en supposant que les variables indépendantes ξ_{ij} , ainsi que la valeur de la fonction f sont réelles, mais sans aucune hypothèse de régularité quant à la fonction f . Le résultat est formulé dans l'énoncé du théorème à la page 12⁽⁴⁾.

§ 1. Pour $n = 2$ et $m = 1$ l'équation (1) prend la forme suivante:

$$(3) \quad f(x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21}, x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22}, x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21}, x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22}) \\ = f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \cdot f(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}).$$

L'identité doit être satisfaite pour toutes les valeurs réelles des 8 variables indépendantes $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$. La fonction f est, par hypothèse, définie dans l'espace $\mathcal{X}_4$ à quatre dimensions tout entier.

(1) Le raisonnement de M. Stephanos n'est pas correct et la formule finale n'est pas exacte. L'auteur n'établit pas exactement quelle est la valeur de a . Comme $\det(\xi_{ij})$ peut être aussi négatif, la valeur a ne peut pas être arbitraire. Il y a lieu de distinguer deux cas suivant que f est complexe ou réel. L'auteur suppose d'ailleurs la dérivabilité de f aussi dans les points où f est nul, et, par conséquent, certaines solutions doivent être exclues qui jouent chez nous un certain rôle à cause de nos hypothèses générales.

(2) ξ_{ij} désigne l'élément de la matrice X , δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, c'est-à-dire l'élément de la matrice unitaire E .

(3) n désigne ici le degré de la matrice X , m celui de la matrice $f(X)$.

(4) Comme l'a remarqué M. C. Ryll-Nardzewski, le théorème reste vrai si nous supposons que ξ_{ij} et f appartiennent à des corps algébriques arbitraires (différents ou non).

Nous introduisons les abréviations suivantes:

$$(4) \quad \begin{aligned} F(x, y, z) &= f(1, x, y, z), \\ G(x, y) &= F(x, 0, y) = f(1, x, 0, y), \\ \varphi(x) &= G(1, x) = f(1, 1, 0, x), \\ \psi(x) &= G(x, 1) = f(1, x, 0, 1), \\ h(x) &= F(0, x, 1) = f(1, 0, x, 1), \\ \Phi(x) &= f(x, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

La méthode de résolution de l'équation (1) consistera à substituer successivement dans cette équation au lieu de certaines variables x_{ij}, y_{ij} quelques valeurs concrètes et à exprimer ainsi la fonction f de quatre variables comme produit de deux fonctions dont l'une est une fonction d'une variable, et l'autre dépend de trois variables. En appliquant au second facteur une méthode analogue, nous l'exprimerons comme produit d'une fonction d'une seule variable et d'une fonction de deux variables. Enfin la fonction f sera exprimée comme produit de quatre fonctions (composées) d'une variable. Deux de ces facteurs se montreront constants et les deux autres vérifieront des équations fonctionnelles simples et bien connues.

Nous éliminons tout d'abord deux solutions triviales. Il est évident que les fonctions

$$(5) \quad f \equiv 0 \quad \text{et} \quad f \equiv 1$$

sont des solutions de notre équation. Dans la suite nous écarterons ces deux solutions particulières.

§ 2. En posant dans l'équation (3)

$$x_{11} = x, \quad x_{12} = x_{21} = 0, \quad x_{22} = 1, \quad y_{11} = 1, \quad y_{12} = y_{21} = 0, \quad y_{22} = 1$$

nous obtenons pour la fonction Φ l'équation fonctionnelle

$$(6) \quad \Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y).$$

D'une façon analogue, en posant

$$x_{11} = x_{22} = 1, \quad x_{12} = x, \quad x_{21} = 0, \quad y_{11} = y_{22} = 1, \quad y_{12} = y, \quad y_{21} = 0$$

nous obtenons pour la fonction ψ l'équation

$$(7) \quad \psi(x + y) = \psi(x) \cdot \psi(y).$$

Enfin, en substituant dans (3)

$$x_{11} = x_{22} = 1, \quad x_{12} = 0, \quad x_{21} = x, \quad y_{11} = y_{22} = 1, \quad y_{12} = 0, \quad y_{21} = y$$

on obtient pour la fonction $h(x)$ une équation identique à celle pour ψ , c'est-à-dire

$$(8) \quad h(x+y) = h(x) \cdot h(y).$$

Remarquons que, si Φ représente une solution quelconque (non constante) de l'équation (6), on a

$$(9) \quad \Phi(0) = 0,$$

$$(10) \quad \Phi(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0.$$

En effet, nous avons pour $y = 0$

$$\Phi(0) = \Phi(x) \cdot \Phi(0).$$

L'inégalité $\Phi(0) \neq 0$ entraînerait $\Phi(x) \equiv 1$, contrairement à notre hypothèse. La relation (9) est donc démontrée. En supposant pour l'instant que l'on ait pour un $x_0 \neq 0$ $\Phi(x_0) = 0$, nous aurions dans ce cas $\Phi(x_0 \cdot y) = 0$ pour tous les y et, par conséquent, $\Phi(x) \equiv 0$ contrairement à notre hypothèse. Remarquons en outre que l'on a

$$\Phi(1) = \Phi^2(1),$$

et, en tenant compte de l'inégalité (10)

$$(11) \quad \Phi(1) = 1.$$

De là il s'ensuit (en posant $y = 1/x$ dans l'équation (6)) que

$$(12) \quad \Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\Phi(x)} \quad \text{pour tous les } x \neq 0.$$

§ 3. Posons dans (3) $y_{12} = y_{21} = 0, y_{22} = 1$. Nous obtenons alors

$$(13) \quad f(x_{11}y_{11}, x_{12}, x_{21}y_{11}, x_{22}) = \Phi(y_{11}) \cdot f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}).$$

Admettons, dans la suite, que

$$(14) \quad x_{11} \neq 0,$$

et posons $y_{11} = 1/x_{11}$. En tenant compte de (4) et de (12), on en tire

$$(15) \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_{11}) \cdot F\left(x_{12}, \frac{x_{21}}{x_{11}}, x_{22}\right) \quad \text{pour } x_{11} \neq 0.$$

§ 4. Nous allons préciser la forme de la fonction F . Dans ce but, nous posons dans (3) $x_{11} = 1, x_{12} = 0, x_{22} = 1, y_{21} = 0, y_{11} = 1$. Ceci nous donne

$$F(y_{12}, x_{21}, x_{21}y_{12} + y_{22}) = F(0, x_{21}, 1) \cdot F(y_{12}, 0, y_{22}).$$

En particulier, pour $y_{12} = x, x_{21} = y, x_{21}y_{12} + y_{22} = z$ nous obtenons l'équation fonctionnelle suivante pour F :

$$F(x, y, z) = F(0, y, 1) \cdot F(x, 0, z - xy)$$

ou bien, d'après les notations (4):

$$(16) \quad F(x, y, z) = h(y) \cdot G(x, z - xy).$$

§ 5. Dans l'étape suivante nous réduirons la fonction G à un produit de deux fonctions d'une seule variable. A cet effet nous posons dans (3) $x_{11} = y_{11} = 1, x_{21} = y_{21} = 0, x_{12} = y_{22} = 1$ et nous obtenons

$$f(1, y_{12} + 1, 0, x_{22}) = f(1, 1, 0, x_{22}) \cdot f(1, y_{12}, 0, 1)$$

ou bien

$$(17) \quad G(x, y) = \varphi(y) \cdot \psi(x - 1).$$

§ 6. En substituant (17) dans (16) nous obtenons

$$(18) \quad F(x, y, z) = h(y) \cdot \varphi(z - xy) \cdot \psi(x - 1).$$

La substitution de (18) dans (15) nous donne

$$(19) \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_{11}) \cdot h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot \varphi\left(x_{22} - \frac{x_{21}x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot \psi(x_{12} - 1),$$

pour $x_{11} \neq 0$

ce qui exprime la fonction cherchée au moyen de quatre fonctions d'une variable. En posant, pour abréger,

$$(20) \quad x_0 = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

on peut écrire la relation (19) sous la forme plus simple:

$$(21) \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_{11}) \cdot h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \psi(x_{12} - 1).$$

§ 7. Nous allons démontrer que les fonctions ψ et h sont constantes. Dans ce but nous supposons de plus que

$$(22) \quad y_{11} \neq 0$$

et substituons (21) avec $y_{21} = 0$ dans (3). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \Phi(x_{11}y_{11}) \cdot h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot \varphi\left(\frac{y_{22}x_0}{x_{11}}\right) \cdot \psi(x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} - 1) \\ &= \Phi(x_{11}) \cdot h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \psi(x_{12} - 1) \cdot \Phi(y_{11}) \cdot h(0) \cdot \varphi(y_{22}) \cdot \psi(y_{12} - 1), \\ & \text{pour } x_{11}y_{11} \neq 0. \end{aligned}$$

D'après (12) et les inégalités

$$\Phi(x_{11}) \neq 0, \quad \Phi(y_{11}) \neq 0$$

nous pouvons écrire la relation précédente sous la forme

$$\begin{aligned} (23) \quad & h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot \varphi\left(y_{22} \cdot \frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \psi(x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} - 1) \\ &= h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot h(0) \cdot \varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \varphi(y_{22}) \cdot \psi(x_{12} - 1) \cdot \psi(y_{12} - 1). \end{aligned}$$

La dernière relation peut être simplifiée. Remarquons que l'on a

$$(24) \quad h(0) = \Phi(1) = 1.$$

Nous affirmons que

$$(25) \quad h(y) \neq 0.$$

En effet, l'égalité $h(y_0) = 0$ aurait comme conséquence (d'après l'équation (8))

$$h(x + y_0) = h(x) \cdot h(y_0) = 0$$

contrairement au fait que $h(0) = 1$. La relation (23) peut alors être divisée par $h(x_{21}/x_{11})$ ce qui donne

$$(26) \quad \varphi\left(y_{22} \frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \psi(x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} - 1) = \varphi(y_{22}) \cdot \varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \psi(x_{12} - 1) \cdot \psi(y_{12} - 1).$$

La dernière relation nous permettra de démontrer que la fonction ψ est constante.

Nous disons que

$$(27) \quad \varphi(1) \neq 0.$$

En effet, l'égalité $\varphi(1) = 0$ entraînerait d'après (26) (avec la substitution $y_{22} = 1$)

$$\varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \psi(x_{11}y_{12} + x_{12} - 1) = 0.$$

Pour $y_{12} = (1 - x_{12})/x_{11}$ nous aurions dans ce cas

$$\varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \psi(0) = 0.$$

Mais

$$(28) \quad \psi(0) = \Phi(1) = 1,$$

donc $\varphi(x_0/x_{11}) = 0$, ce qui entraînerait $f \equiv 0$ d'après (21), contrairement à notre hypothèse. Posons maintenant dans (26)

$$x_{12} = y_{12} = 1, \quad y_{22} = 1, \quad x_{21} = x_{11}(x_{22} - 1).$$

Nous obtiendrons

$$\varphi(1) \cdot \psi(x_{11}) = \varphi^2(1) \cdot \psi^2(0).$$

De là, nous tirons d'après (27) et (28)

$$(29) \quad \psi(x_{11}) = \varphi(1) \quad \text{pour } x_{11} \neq 0.$$

En posant

$$(30) \quad \varphi(1) = C,$$

nous avons, en tenant compte de (7) $C = C^2$. Mais, comme $C \neq 0$, il s'ensuit que

$$(31) \quad C = 1.$$

$\psi(0)$ étant égal à 1 d'après (28), nous avons en vertu de (29), (30), (31)

$$(32) \quad \psi(x) \equiv 1.$$

Ayant égard à (26), nous constatons que

$$\varphi\left(y_{22} \frac{x_0}{x_{11}}\right) = \varphi(y_{22}) \cdot \varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right);$$

les variables $y_{22}, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ étant arbitraires, nous sommes ainsi amenés à l'équation fonctionnelle pour φ :

$$(33) \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y),$$

identique à l'équation pour Φ .

§ 8. Nous allons démontrer que la fonction h est constante. Dans ce but, nous substituons dans (3) $x_{12} = 0, y_{12} = 0$ et tenons compte du fait que l'on a

$$(34) \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_{11}) \cdot h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right).$$

Ceci fournit la relation suivante:

$$\begin{aligned} \Phi(x_{11}, y_{11}) \cdot h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}} + \frac{x_{22}y_{21}}{x_{11}y_{11}}\right) \cdot \varphi(x_{22}y_{22}) \\ = \Phi(x_{11}) \cdot h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) \cdot \varphi(x_{22}) \cdot \Phi(y_{11}) \cdot h\left(\frac{y_{21}}{y_{11}}\right) \cdot \varphi(y_{22}). \end{aligned}$$

Puisque la fonction φ satisfait à la même équation que Φ et que $\varphi \equiv 0$ entraînerait $f = 0$, nous avons

$$\varphi(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0.$$

Supposons dans la suite que

$$(35) \quad x_{22}y_{22} \neq 0.$$

Dans ce cas nous pouvons diviser l'identité précédente par $\Phi(x_{11}) \cdot \Phi(y_{11}) \cdot \varphi(x_{22}) \cdot \varphi(y_{22})$ ce qui donne

$$h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}} + \frac{x_{22}y_{21}}{x_{11}y_{11}}\right) = h\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right) h\left(\frac{y_{21}}{y_{11}}\right)$$

pour $x_{11}y_{11}x_{22}y_{22} \neq 0$. En posant $x_{21} = 0$ et en se rappelant que $h(0) = 1$ nous avons

$$h\left(\frac{x_{22}y_{21}}{x_{11}y_{11}}\right) = h\left(\frac{y_{21}}{y_{11}}\right).$$

Cette identité montre que $h(x) = \text{const}$ pour tous les $x \neq 0$. D'après l'équation (8) cette constante peut être égale ou bien à 0 ou bien à 1. La possibilité $h \equiv 0$ est exclue et il nous reste

$$(36) \quad h(x) \equiv 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 9. D'après (36), la relation (34) se réduit à l'équation

$$(37) \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_{11}) \cdot \varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \quad \text{pour} \quad x_{11}x_{22} \neq 0.$$

En substituant cette formule dans (3) on obtient

$$(38) \quad \Phi(x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21}) \cdot \varphi\left(\frac{x_0y_0}{x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21}}\right) = \Phi(x_{11}) \cdot \Phi(y_{11}) \cdot \varphi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \cdot \varphi\left(\frac{y_0}{y_{11}}\right)$$

où nous avons posé pour abrégé

$$(39) \quad y_0 = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}.$$

L'identité (38) est vérifiée pour tous les x_{ij}, y_{ij} pour lesquels on a

$$x_{11} \neq 0, \quad x_{22} \neq 0, \quad y_{11} \neq 0, \quad y_{22} \neq 0, \quad x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} \neq 0.$$

Posons $x_{21} = y_{12} = 0$ dans (38). Nous obtenons alors

$$x_0 = x_{11}x_{22}, \quad y_0 = y_{11}y_{22}$$

et l'identité (38) devient

$$(40) \quad \Phi(x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21}) \cdot \varphi\left(\frac{x_{11}x_{22}y_{11}y_{22}}{x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21}}\right) = \Phi(x_{11}) \cdot \Phi(y_{11}) \cdot \varphi(x_{22}) \cdot \varphi(y_{22}).$$

En fixant les valeurs $x_{11}, x_{22}, y_{11}, y_{22}$ (non nulles), en posant $a = x_{11}y_{11}$, $b = y_{11}y_{22}$, en profitant des relations (6), (33) et enfin en prenant $u = x_{12}y_{21}$ pour variable indépendante, on obtient la relation

$$(41) \quad \Phi(a+u) \cdot \varphi\left(\frac{ab}{a+u}\right) = \Phi(a) \cdot \varphi(b),$$

valable pour tous les u tels que $a+u \neq 0$. Posons en particulier $b = 1/a$, $a+u = v$. La relation (41) pourra être écrite sous la forme

$$(42) \quad \Phi(v) \cdot \varphi\left(\frac{1}{v}\right) = D,$$

où D est une constante. Puisque

$$\Phi(1) = \varphi(1) = 1$$

on en tire $D = 1$, ce qui donne, d'après (42),

$$\varphi\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{\Phi(v)}$$

ou

$$\varphi(v) = \frac{1}{\Phi(1/v)}.$$

Mais, en vertu de (12), nous avons

$$\Phi\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{\Phi(v)},$$

donc

$$\varphi(x) = \Phi(x) \quad \text{pour tous les } x \neq 0.$$

Il s'ensuit que l'identité (37) prend la forme

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_{11}) \cdot \Phi\left(\frac{x_0}{x_{11}}\right) \quad \text{pour} \quad x_{11}x_{22} \neq 0.$$

En vertu de (12) l'identité précédente prend alors la forme définitive

$$(43) \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_0) \quad \text{pour} \quad x_{11}x_{22} \neq 0.$$

§ 10. Il nous reste à montrer que (43) subsiste aussi pour $x_{11} = 0$ ou bien pour $x_{22} = 0$. Dans ce but, remarquons qu'il est — mutatis mutandis — possible de démontrer l'existence d'une fonction Ψ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\Psi(x \cdot y) = \Psi(x) \cdot \Psi(y),$$

non constante et telle que

$$(44) \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Psi(x_0) \quad \text{pour} \quad x_{12} \cdot x_{21} \neq 0.$$

$\mathcal{X}_4$ étant l'espace à quatre dimensions tout entier nous désignons par $Q(x_0)$ l'hypercône d'équation

$$x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = x_0 \quad (x_0 \text{ est un paramètre}).$$

Désignons, en outre, par A la somme des deux hyperplans d'équations:

$$x_{11} = 0, \quad x_{22} = 0$$

et par B la somme des deux hyperplans d'équations:

$$x_{12} = 0, \quad x_{21} = 0.$$

Remarquons que tout l'hypercône $Q(x_0)$ coupe A ainsi que B . De la relation (43) il suit que la fonction f a une valeur constante α sur l'ensemble $Q(x_0) - A$. D'une façon analogue il suit de (44) que f a une valeur constante β sur $Q(x_0) - B$. Les ensembles $Q(x_0) - A$ et $Q(x_0) - B$ ont une partie commune non vide (il suffit de prendre un point qui appartient à $Q(x_0)$ et n'appartient pas à la somme $A + B$, c'est-à-dire un point $(\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22})$ tel que $\xi_{11}\xi_{12}\xi_{21}\xi_{22} \neq 0$ et $\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21} = x_0$), donc on a $\alpha = \beta$. Par conséquent, l'inégalité $f(p) \neq \alpha$ est possible seulement dans le cas où p appartient à $A \cdot B$. Nous avons donc

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_0) \quad \text{pour} \quad p \in (\mathcal{X}_4 - \mathcal{C})$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points de coordonnées x_{ij} telles que le déterminant $\|x_{ij}\|$ possède au moins une ligne composée de zéros.

Nous affirmons que pour les points de l'ensemble $\mathcal{C}$ on a la relation

$$f(x_{ij}) = \Phi(x_0).$$

Dans ce but, il suffit de montrer que de $p \in \mathcal{C}$ il suit $f(p) = 0$, car dans ce cas on a $x_0 = 0$ et $\Phi(0) = 0$.

§ 11. Afin de prouver l'implication ci-dessus, introduisons les notations

$$(45) \quad \begin{aligned} f_1(x, y) &= f(0, 0, x, y), & f_3(x, y) &= f(x, 0, y, 0), \\ f_2(x, y) &= f(0, x, 0, y), & f_4(x, y) &= f(x, y, 0, 0). \end{aligned}$$

En substituant dans (3) convenablement quatre zéros et quatre valeurs x, y, u, v , nous obtenons les quatre relations suivantes:

$$\begin{aligned} f_1(x, y)f_1(u, v) &= f_1(yu, yv), & f_3(x, y)f_3(u, v) &= f_3(xu, yu), \\ f_2(x, y)f_2(u, v) &= f_2(xv, yv), & f_4(x, y)f_4(u, v) &= f_4(xu, xv). \end{aligned}$$

De là nous tirons les conséquences

$$(46) \quad \begin{aligned} f_1(x, y) &= w_1(y), & f_3(u, v) &= w_3(u), \\ f_2(u, v) &= w_2(v), & f_4(x, y) &= w_4(x). \end{aligned}$$

Calculons maintenant le produit

$$f(0, 0, x, y) \cdot f(0, u, 0, v).$$

D'une part, ce produit est égal à $w_1(y) \cdot w_2(v)$; d'autre part, d'après l'équation fonctionnelle, il est égal à $f(0, 0, 0, xu + yv)$. Mais, en vertu de (46) nous pouvons écrire

$$f(0, 0, 0, xu + yv) = w_1(xu + yv), \quad f(0, 0, 0, xu + yv) = w_2(xu + yv),$$

donc

$$w_1(y) \cdot w_2(v) = w_1(xu + yv) = w_2(xu + yv).$$

Les variables x, y, u, v étant indépendantes il s'ensuit que

$$(47) \quad w_1 = w_2 = C,$$

où C désigne une constante. D'une façon analogue, en considérant le produit

$$(48) \quad f(x, y, 0, 0) \cdot f(u, 0, v, 0)$$

nous obtenons d'une part qu'il est égal à $f(xu + y, v, 0, 0)$ ce qui est à son tour égal à

$$f_3(xu + yv, 0) = w_3(xu + yv).$$

D'autre part, le produit (48) est égal à $w_4(x) \cdot w_3(u)$, nous avons donc

$$w_3(u) \cdot w_4(x) = w_3(xu + yv) = w_4(xu + yv)$$

ce qui entraîne $w_3 = w_4 = D$, où D est une constante. Les constantes C, D doivent satisfaire aux équations $C = C^2, D = D^2$, d'où résulte $C = 0$ ou $C = 1, D = 0$ ou $D = 1$. Mais on a

$$f_2(x, y) \cdot f_1(u, v) = f(xu, xv, yu, yv).$$

En supposant que $xyuv \neq 0$ nous avons, en vertu de (43),

$$f(xu, xv, yu, yv) = \Phi(xuyv - xvyu) = \Phi(0) = 0,$$

donc $C = 0$. D'une façon analogue nous obtenons par des substitutions convenables $D = 0$. La relation

$$f(x_{ij}) = \Phi(x_0)$$

a donc été démontrée pour toutes les valeurs x_{ij} . Ainsi nous avons établi le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si la fonction f satisfait à l'équation (3) dans l'espace $\mathcal{X}_4$ tout entier, il existe une fonction Φ d'une variable vérifiant l'équation (6) et telle que l'on a dans tout $\mathcal{X}_4$*

$$(49) \quad f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \Phi(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}).$$

§ 12. Réciproquement, nous pouvons constater sans difficulté que si Φ est une solution arbitraire de l'équation (6), la fonction f définie par l'intermédiaire de la formule (49) satisfait à l'équation (3).

L'équation (6) possède une infinité de solutions. Si nous demandons additionnellement que la solution Φ soit une fonction continue, Φ doit avoir l'une des formes suivantes:

$$(50) \quad \Phi(x) = |x|^\alpha$$

ou bien

$$(51) \quad \Phi(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^\alpha$$

ou enfin

$$(52) \quad \Phi(x) \equiv 0,$$

où α est un nombre constant arbitraire non négatif. Si nous demandons la continuité de Φ seulement pour les valeurs pour lesquelles $\Phi \neq 0$, l'exposant α dans les formules (50), (51) peut être un nombre réel quelconque.

On sait que l'équation (6) possède des solutions discontinues (non mesurables) qui peuvent être facilement déduites des solutions non mesurables de l'équation de Cauchy. Dans ce cas la fonction $\Phi(x_0)$ sera une solution non mesurable de l'équation (3). Nous pouvons donc conclure

que parmi les solutions régulières (discontinues au plus sur l'hypercône $Q(0)$) les seules solutions de l'équation (3) sont les suivantes:

$$(53) \quad \begin{aligned} f &= |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}|^\alpha, \\ f &= \operatorname{sgn}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) \cdot |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}|^\alpha, \\ f &= 0, \end{aligned}$$

où α désigne un nombre réel arbitraire.

Remarque. Pour $\alpha = 0$ la deuxième des formules (53) fournit une solution qui est égale à zéro sur l'hypercône $Q(0)$, à 1 sur l'un des côtés du cône et à -1 à l'autre côté du cône (l'hypercône $Q(0)$ coupe l'espace $\mathcal{X}_4$ en deux parties).

Travaux cités

- [1] I. Schur, *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Dissertation, Berlin 1901.
- [2] — *Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe*, Sitzber. d. Preuss. Akad. Wiss. (1927), p. 58-75.
- [3] — *Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe*, Sitzber. d. Preuss. Akad. Wiss. (1928), p. 100-124.
- [4] K. Stephanos, *Sur une propriété caractéristique des déterminants*, Ann. di Matem., Ser. III, 21 (1913), p. 233-236.
- [5] O. Perron, *Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung*, Math. Zeitschr. 48 (1942), p. 136-172.
- [6] P. Reisch, *Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen $\Phi(X) \cdot \Phi(Y) = \Phi(X \cdot Y)$* , Math. Zeitsch. 49 (1943-1944), p. 411-426.

Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1956