Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur la limitation et l'unicité des solutions des problèmes de Fourier pour un système non linéaire d'équations paraboliques

par J. Szarski (Kraków)

Dans une note antérieure [1], nous avons obtenu certaines limitations et quelques critères d'unicité des solutions des problèmes de Fourier pour un système d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$(0.1)\qquad \frac{\partial z_i}{\partial t} = f_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m, \frac{\partial z_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_i}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_j \partial x_k}, \ldots\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où la i-ème équation ne contient pas de dérivées des fonctions $z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m$. Les solutions étaient supposées définies dans le produit topologique R d'un intervalle $0 < t < T$ et d'un ensemble ouvert et borné G situé dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$.

Dans la présente note nous nous proposons de généraliser les résultats concernant le premier et le troisième problème de Fourier, en remplaçant le produit topologique R par un ensemble Ω dont la définition sera donnée au paragraphe 1. Dans le même paragraphe nous démontrons un lemme qui est une modification du lemme 1.1 de la note [1]. Ce lemme sert à la démonstration des théorèmes 2.1, 2.2 et 3.1 qui sont formulés dans les paragraphes 2 et 3 et qui constituent les généralisations des théorèmes 2.1, 2.3 resp. 2.2, 2.4 et 3.1, 3.2 de la note [1].

§ 1. Définition de l'ensemble Ω. Nous considérons un ensemble Ω dans l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n)$ jouissant des propriétés suivantes:

a) Ω est ouvert, situé dans la couche $0 < t < T$, où $T \leqslant +\infty$, et pour chaque t_0, $0 \leqslant t_0 < T$, la portion de Ω contenue dans la couche $0 \leqslant t \leqslant t_0$ est bornée.

b) Pour chaque t_0, $0 \leqslant t_0 < T$, l'intersection de la fermeture de Ω avec le plan $t = t_0$ est non vide; nous désignons par S_t la projection de cette intersection sur le plan $t = 0$.

c) Pour chaque t_0, $0 \leqslant t_0 < T$, et pour tout point $X_0 \epsilon S_{t_0}$ on peut faire correspondre à toute suite t_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, telle que $0 < t_\nu < T$ et $t_\nu \to t_0$, une suite de points X_ν de façon que $X_\nu \epsilon S_{t_\nu}$ et $X_\nu \to X_0$.

DÉFINITION DE L'ENSEMBLE Σ ET Σ_a. Nous désignons par Σ la partie de la frontière de Ω que est située dans la couche $0 < t < T$.

Etant donnée une fonction $a(t, x_1, \ldots, x_n)$ définie sur Σ nous désignons par Σ_a le sous-ensemble de Σ (qui peut être vide ou identique à Σ) dans lequel on a $a > 0$.

LEMME 1.1. *Soit $\varphi(t, X)$, où $X = (x_1, \ldots, x_n)$, une fonction continue dans la fermeture de l'ensemble Ω qui vient d'être défini. Posons pour $0 \leqslant t < T$*

$$M(t) = \max_{X \epsilon S_t} \varphi(t, X).$$

Nous disons que:

I. *La fonction $M(t)$ est continue dans l'intervalle $0 \leqslant t < T$.*

II. *Si $M(t) = \varphi(t, X)$, où le point (t, X) appartient à l'intérieur de Ω, et si la dérivée partielle $\varphi_t(t, X)$ existe, on a l'inégalité*

$$\bar{D}_- M(t) \leqslant \varphi_t(t, X),$$

où $\bar{D}_-$ désigne le nombre dérivé supérieur à gauche.

Démonstration. I. Soit $0 \leqslant t_0 < T$ et t_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite quelconque telle que $0 < t_\nu < T$, $t_\nu \to t_0$. Il suffit de montrer qu'il existe une suite partielle t_{ν_μ}, $\mu = 1, 2, \ldots$, telle que

$$M(t_{\nu_\mu}) \to M(t_0). \tag{1.1}$$

D'après a) et b) (cf. la définition de l'ensemble Ω) et en vertu de la continuité de $\varphi(t, X)$, il existe un point $\bar{X}_\nu \epsilon S_{t_\nu}$ tel que

$$M(t_\nu) = \varphi(t_\nu, \bar{X}_\nu)$$

et, d'une façon analogue, un point $X_0 \epsilon S_{t_0}$ tel que

$$M(t_0) = \varphi(t_0, X_0).$$

En vertu de a) nous pouvons extraire une suite partielle $\bar{X}_{\nu_\mu}$ de telle façon que

$$\bar{X}_{\nu_\mu} \to \bar{X}_0 \epsilon S_{t_0}.$$

On a alors, vu la continuité de $\varphi(t, X)$,

$$\varphi(t_{\nu_\mu}, \bar{X}_{\nu_\mu}) \to \varphi(t_0, \bar{X}_0). \tag{1.2}$$

Pour achever la démonstration de (1.1), il suffit de prouver que

$$\varphi(t_0, \bar{X}_0) = M(t_0). \tag{1.3}$$

Or, en vertu de c), il existe une suite de points $X_{\nu_\mu} \epsilon S_{t_{\nu_\mu}}$ telle que

$$X_{\nu_\mu} \to X_0$$

et par conséquent

$$\varphi(t_{\nu_\mu}, X_{\nu_\mu}) \to \varphi(t_0, X_0) = M(t_0). \tag{1.4}$$

D'autre part, nous avons

$$\varphi(t_{\nu_\mu}, X_{\nu_\mu}) \leqslant M(t_{\nu_\mu}) = \varphi(t_{\nu_\mu}, \bar{X}_{\nu_\mu}). \tag{1.5}$$

Les relations (1.2), (1.4) et (1.5) impliquent l'inégalité

$$\varphi(t_0, \bar{X}_0) \geqslant M(t_0),$$

d'où l'on obtient (1.3).

La démonstration de la partie II de notre lemme est tout à fait analogue à celle du lemme 1.1 de la note [1].

§ 2. THÉORÈME 2.1. *Supposons que*

1° *Les fonctions $f_i(t, X, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$, $g_i(t, X, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont définies dans un ensemble D dont la projection sur le plan $(t, x_1, \ldots, x_n)$ recouvre l'ensemble Ω défini au paragraphe 1.*

2° *Lorsque les valeurs $\bar{r}_{jk}$ et $\bar{\bar{r}}_{jk}$ sont telles que*

$$\sum_{j,k=1}^{n} (\bar{r}_{jk} - \bar{\bar{r}}_{jk}) \lambda_j \lambda_k \leqslant 0 \qquad \textit{pour tout système } \lambda_1, \ldots, \lambda_n,$$

alors on a les inégalités

$$f_i(t, X, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, \bar{r}_{jk}, \ldots) - \\ - f_i(t, X, z_1, \ldots, z_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, \bar{\bar{r}}_{jk}, \ldots) \leqslant 0,$$

et des inégalités analogues pour les fonctions g_i.

3° $$|f_i(t, X, u_1, \ldots, u_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, r_{jk}, \ldots) - \\ - g_i(t, X, v_1, \ldots, v_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, r_{jk}, \ldots)| \leqslant \sigma_i(t, |u_1 - v_1|, \ldots, |u_m - v_m|),$$

où les fonctions $\sigma_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ sont continues et non négatives pour $0 \leqslant t < T$, $y_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ et la fonction σ_i est non décroissante par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m$; pour $\varepsilon_i \geqslant 0$ nous désignons par

$$y_i = \omega_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

l'intégrale supérieure à droite du système d'équations différentielles ordinaires

$$dy_i/dt = \sigma_i(t, y_1, \ldots, y_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2.1}$$

issue du point $(0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ *et nous supposons que cette intégrale existe dans l'intervalle* $0 \leqslant t < T$.

4° *Les fonctions* $u_i(t, X)$ *et* $v_i(t, X)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *sont continues dans la fermeture de* Ω, *de classe* C^1 *dans* Ω *et possèdent des dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables* $x_1, \ldots, x_n$ *continues dans* Ω.

5° *On a dans* Ω

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i\Big(t, X, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}, \ldots\Big),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = g_i\Big(t, X, v_1, \ldots, v_m, \frac{\partial v_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v_i}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}, \ldots\Big).$$

6° $|u_i(0, X) - v_i(0, X)| \leqslant \varepsilon_i$ *pour* $X \in S_0$.

7° *Les fonctions* $\alpha_i(t, X)$ *et* $\beta_i(t, X)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *sont définies sur* Σ *et satisfont aux inégalités*

$$\alpha_i \geqslant 0, \qquad \beta_i \geqslant B_i = \text{const} > 0;$$

à chaque point appartenant à Σ_a *correspond une demi-droite* l *issue de ce point, orthogonale à l'axe* t *et dont un segment est contenu dans la fermeture de* Ω.

8° *Les fonctions* u_i *et* v_i *admettent une dérivée suivant la demi-droite* l *en tout point de l'ensemble* Σ_a *et vérifient les inégalités*

$$|\alpha_i(t, X)\partial[u_i(t, X) - v_i(t, X)]/\partial l - \beta_i(t, X)[u_i(t, X) - v_i(t, X)]| \leqslant \varepsilon_i B_i$$

pour $(t, X) \in \Sigma$, *où l'on a posé*

$$\partial(u_i - v_i)/\partial l \overset{\mathrm{df}}{=} 0 \quad \textit{pour} \quad (t, X) \in \Sigma - \Sigma_a. \tag{2.2}$$

Dans toutes ces hypothèses, les inégalités

$$|u_i(t, X) - v_i(t, X)| \leqslant \omega_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ont lieu dans Ω.

Démonstration. La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2.1 resp. 2.3 de la note [1], lorsqu'on s'appuie sur le lemme 1.1 de la présente note. Il n'y a qu'un point de la démonstration qu'il sera utile de reproduire ici. Posons notamment

$$W_i(t) = \max_{X \in S_t} |u_i(t, X) - v_i(t, X)|$$

(la continuité de $W_i(t)$ dans l'intervalle $0 \leqslant t < T$ résulte de la partie I du lemme 1.1) et supposons que pour un indice i_0 et un t_0, $0 < t_0 < T$, on ait l'inégalité

$$W_{i_0}(t_0) > \omega_{i_0}(t_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \tag{2.3}$$

et par exemple

$$W_{i_0}(t_0) = u_{i_0}(t_0, X_0) - v_{i_0}(t_0, X_0),$$

où $X_0 \in S_{t_0}$. Il s'agit de prouver que dans nos hypothèses le point (t_0, X_0) *est un point intérieur de* Ω. Admettons donc, par l'impossible, que $(t_0, X_0) \in \Sigma$. D'après 8° on a alors

$$\beta_{i_0}(t_0, X_0)[u_{i_0}(t_0, X_0) - v_{i_0}(t_0, X_0)] \leqslant \varepsilon_{i_0} B_{i_0} + \alpha_{i_0}(t_0, X_0)[\partial(u_{i_0} - v_{i_0})/\partial l]_{(t_0, X_0)}. \tag{2.4}$$

D'autre part, d'après (2.2) et la définition de $W_i(t)$, on a

$$[\partial(u_{i_0} - v_{i_0})/\partial l]_{(t_0, X_0)} \leqslant 0,$$

d'où, selon 7°, on obtient de (2.4) l'inégalité

$$u_{i_0}(t_0, X_0) - v_{i_0}(t_0, X_0) \leqslant \varepsilon_{i_0},$$

ce qui est impossible, puisque en vertu de (2.3) on a

$$\varepsilon_{i_0} < W_{i_0}(t_0) = u_{i_0}(t_0, X_0) - v_{i_0}(t_0, X_0).$$

Une conséquence immédiate du théorème 2.1 est le critère suivant d'unicité de la solution du problème mixte pour le système d'équations (0.1).

Théorème 2.2. *Maintenons les hypothèses* 1°, 2°, 3° *et* 7°, *du théorème* 2.1 *en admettant que*

a) $f_i \equiv g_i$,

b) *l'intégrale unique du système* (2.1), *issue de l'origine, est identiquement nulle, c'est-à-dire*

$$\omega_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans ces hypothèses, le problème mixte

$$z_i(0, X) = \varphi_i(X) \quad \textit{pour} \quad X \in S_0,$$

$$\alpha_i(t, X)\frac{\partial z_i(t, X)}{\partial l} - \beta_i(t, X) z_i(t, X) = \psi_i(t, X) \quad \textit{pour} \quad (t, X) \in \Sigma \tag{2.5}$$

relatif au système d'équations (0.1), *admet dans* Ω *au plus une solution continue dans la fermeture de* Ω, *possédant une dérivée suivant* l *en tout point de* Σ_a *et toutes les dérivées figurant dans* (0.1) *continues dans* Ω. *Cette solution (lorsqu'elle existe) dépend d'une façon continue des valeurs initiales* $\varphi_i(X)$ *et des valeurs aux limites* $\psi_i(t, X)$.

Remarque. Le problème mixte (2.5) devient, en particulier, le premier problème de Fourier lorsque $\alpha_i \equiv 0$. Dans le cas où $\alpha_i \equiv 1$ et la demi-droite l est normale à l'intersection de Σ avec le plan dans lequel l est située, le problème (2.5) devient le troisième problème de Fourier.

§ 3. Nous allons maintenant formuler un critère d'unicité plus général que celui qui est contenu dans le théorème 2.2.

THÉORÈME 3.1. *Supposons que les seconds membres du système d'équations* (0.1) *satisfassent aux hypothèses* 1° *et* 2° *du théorème* 2.1 *et aux inégalités*

$$|f_i(t, X, u_1, \ldots, u_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, r_{jk}, \ldots)-$$
$$-f_i(t, X, v_1, \ldots, v_m, p_1, \ldots, p_n, \ldots, r_{jk}, \ldots)| \leqslant \sigma(t, \max_j |u_j - v_j|),$$

où la fonction $\sigma(t, y)$ *est continue et non négative pour* $0 < t < T$, $y \geqslant 0$ (1), *et admettons que pour chaque intervalle*

$$0 < t \leqslant t_0, \tag{3.1}$$

où $0 < t_0 < T$, *l'intégrale unique* $y(t)$ *de l'équation*

$$dy/dt = \sigma(t, y),$$

définie dans (3.1) *et satisfaisant à la condition*

$$\lim_{t\to 0} y(t) = 0,$$

soit identiquement nulle. Maintenons enfin l'hypothèse 7° *du théorème* 2.1.

Ceci étant admis, le problème mixte (2.5) *relatif au système d'équations* (0.1) *admet dans* Ω *au plus une solution continue dans la fermeture de* Ω, *possédant une dérivée suivant* l *en tout point de* Σ_a *et toutes les dérivées figurant dans* (0.1) *continues dans* Ω.

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du théorème 3.1 de la note [1]. Il suffit d'y introduire des modifications analogues à celles dont nous avons parlé dans la démonstration du théorème 2.1 de la présente note.

Travaux cités

[1] J. Szarski, *Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 237-249.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 3. 9. 1957

(1) La fonction $\sigma(t, y)$ n'est pas supposée continue pour $t = 0$.

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Application of the Nörlund summability to the theory of localization for single and double trigonometric series (I)

by L. JEŚMANOWICZ (Toruń)

The theory of localization for single trigonometric series developed by Zygmund [1] and that for double trigonometric series developed by Gosselin [2] are restricted to the Cesàro summability. The purpose of this paper is to extend their results by involving a special class of the Nörlund means, containing the Cesàro means as a particular case.

I. On the Nörlund summability

Let $\{B_n\}$ be a sequence with non-zero terms for n large enough. We shall say that the series $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, or the sequence s_n of its partial sums, is *summable by the Nörlund method* $\mathrm{N}(B_n)$, or $\mathrm{N}(B_n)$ *summable* to the sum s, if the following sequence (determined for n large enough)

$$t_n = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} B_{n-\nu} a_\nu}{B_n} = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} \Delta B_{n-\nu} s_\nu}{B_n},$$

where $\Delta B_0 = B_0$, $\Delta B_\nu = B_\nu - B_{\nu-1}$ for $\nu \geqslant 1$, converges to s as $n \to \infty$.

In numerous applications we deal with B_n positive and non-decreasing for n large enough. For such a sequence the condition

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n-1}}{B_n} = 1$$

is sufficient and necessary for the convergence of the series to involve its $\mathrm{N}(B_n)$ summability to the same sum (the condition of regularity).

Let $\{A_n\}$ be a sequence satisfying the following conditions:

$$A_n > 0 \quad \text{for} \quad n \geqslant n_0, \tag{1.1}$$

$$A_n \geqslant A_{n+1} \quad \text{for} \quad n \geqslant n_0, \tag{1.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \infty \tag{1.3}$$