parts we obtain

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{d^m}{dt^m}[\lambda(t)P(t)]D_n(x-t)\,dt - a_0$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}\lambda^{(\nu)}(t)P^{(m-\nu)}(t)D_n(x-t)\,dt - a_0$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m}\binom{m}{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_a^b \lambda^{(\nu)}(t)P^{(m-\nu)}(t)D_n(x-t)\,dt -$$

$$-\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1-\lambda(t)]D_n(x-t)\,dt.$$

Since for $x\in\langle a', b'\rangle$ $1-\lambda(x) = \lambda'(x) = \ldots = \lambda^{(m)}(x) = 0$, the sequence $p_n(x)$ uniformly converges to 0 and therefore is uniformly $\mathrm{N}_k(A_n)$ summable to 0. Thus the theorem is proved.

Theorems 3.1 and 3.2 contain the theory of localization for trigonometric series.

THEOREM 3.3. *If $a_p = o(A_{|p|}^{(k)})$, $m \geqslant 2k+1$ and the function*

$$F(x) = \frac{a_0 x^m}{m!} + u_1 x^{m-1} + \ldots + u_m + \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{a_p}{(ip)^m}e^{ipx}$$

vanishes in an interval $\langle a, b\rangle$, then in any interval $\langle a', b'\rangle$ interior to $\langle a, b\rangle$ the trigonometric series $\sum a_p e^{ipx}$ is uniformly $\mathrm{N}_k(A_n)$ summable to 0.

THEOREM 3.4. *Let a_p and a'_p be $o(A_{|p|}^{(k)})$, $m \geqslant 2k+1$ and let $F(x)$ and $\tilde{F}(x)$ be the sums of the series obtained by integrating m times the series $\sum a_p e^{ipx}$ and $\sum a'_p e^{ipx}$ respectively. If $F(x) = \tilde{F}(x)$ in an interval $\langle a, b\rangle$ or, more generally, if $F(x)-\tilde{F}(x)$ is equal to a polynomial of degree m in this interval, then in any interval $\langle a', b'\rangle$ interior to $\langle a, b\rangle$ the series $\sum a_p e^{ipx}$ and $\sum a'_p e^{ipx}$ are uniformly $\mathrm{N}_k(A_n)$ equisummable, which means that the difference of these two series is uniformly $\mathrm{N}_k(A_n)$ summable to 0.*

References

[1] A. Zygmund, *Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques*, Math. Zeit. 24 (1926), p. 47-104.

[2] R. P. Gosselin, *On the theory of localization for double trigonometric series*, Ann. Soc. Polon. Math. 24, fasc. 2 (1953), p. 49-77.

[3] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949.

Reçu par la Rédaction le 14. 10. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Remarque sur la régularité des intégrales des équations différentielles hyperboliques du second ordre

par J. SZARSKI, Z. SZMYDT et T. WAŻEWSKI (Kraków)

Considérons le problème de Darboux dans lequel il s'agit de trouver une intégrale de l'équation

$$u_{xy}(x, y) = f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) \tag{1}$$

prenant des valeurs données le long des caractéristiques $x = 0$ et $y = 0$. Cette solution peut être cherchée parmi les fonctions appartenant à diverses classes de régularité.

DÉFINITION 1. Une fonction ψ définie dans un ensemble Z sera appelée dans la suite *fonction de classe C^n* $(n \geqslant 1)$, lorsqu'elle possède des dérivées partielles continues d'ordre n dans l'ensemble Z.

La plupart des théorèmes concernant le problème de Darboux relatif à l'équation (1) assure l'existence d'une solution dans l'ensemble des fonctions $u(x, y)$ continues avec leurs dérivées u_x, u_y, u_{xy} ou, ce qui revient au même, en vertu de la continuité de la fonction f qui y intervient, dans l'ensemble des fonctions de classe C^1. L'importance des solutions de classe C^2 a été indiquée par E. Kamke (cf. [1], p. 402, renvoi (1)). Dans l'hypothèse que $f(x, y, u, p, q)$ est une fonction de classe C^1 dans le parallélépipède: $|x|, |y| < d$, $|u|, |p|, |q| < M$ $(d > 0, M > 0)$, H. Schaefer (cf. [2]) a démontré que l'équation (1) admet dans le rectangle suffisamment petit: $|x|, |y| < d_1$ $(d_1 \leqslant d)$ une solution unique de classe C^2 s'annulant le long des caractéristiques $x = 0$ et $y = 0$.

L'une des deux démonstrations de ce théorème, données dans [2], est basée sur le résultat bien connu concernant l'existence et l'unicité d'une solution $u(x, y)$ de classe C^1 du problème considéré. Ainsi cette démonstration se ramène à prouver l'existence et la continuité des dérivées $u_{xx}(x, y)$ et $u_{yy}(x, y)$ (cf. [2], 2). Dans la suite nous donnons une autre démonstration, plus simple, de cette dernière propriété et même dans un cas plus général, à savoir dans le cas où $u(x, y)$ est une solution arbitraire de l'équation (1), de classe C^1 dans le rectangle R,

$$R\colon\quad -\alpha < x < \alpha, \quad -\beta < y < \beta \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < \infty, \quad 0 < \beta < \infty$$

qui se réduit le long des caractéristiques $y = 0$ et $x = 0$ aux fonctions de classe C^2 dans les intervalles $-\alpha < x < \alpha$, et $-\beta < y < \beta$ respectivement (qui ne sont pas supposées nulles, comme dans le cas considéré par H. Schaefer). Nous complétons ce résultat en indiquant les conditions dans lesquelles la solution $u(x, y)$ du problème de Darboux, de classe C^1 dans le rectangle R, admet des dérivées continues d'ordre n $(n \geqslant 2)$.

Nos démonstrations sont basées sur les théorèmes connus concernant la dérivation des intégrales des équations différentielles ordinaires par rapport au paramètre (cf. [1], § 88 et § 89).

THÉORÈME 1. *Supposons que $f(x, y, u, p, q)$ soit une fonction de classe C^1 dans l'ensemble S, défini comme le produit cartésien du rectangle R par le cube: $|u|, |p|, |q| < M$ $(M > 0)$. Soit $\varphi(x, y)$ une solution de l'équation (1) de classe C^1 dans R telle que les fonctions $\sigma(x)$ et $\tau(y)$ définies par les relations: $\sigma(x) = \varphi(x, 0)$, $\tau(y) = \varphi(0, y)$ soient des fonctions de classe C^2 dans les intervalles $-\alpha < x < \alpha$ et $-\beta < y < \beta$ respectivement.*

Alors $\varphi(x, y)$ est une fonction de classe C^2 dans le rectangle R tout entier.

Démonstration. L'existence et la continuité de la dérivée $\varphi_{xy}(x, y)$ (et, par suite, de $\varphi_{yx}(x, y)$) étant évidentes d'après l'identité

$$\varphi_{xy}(x, y) = f\big(x, y, \varphi(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)\big),$$

satisfaite par hypothèse dans le rectangle R, passons à la démonstration de l'existence et de la continuité de $\varphi_{xx}(x, y)$. On vérifie facilement les propriétés suivantes P_1 et P_2:

P_1. La fonction $g(y, p, x)$ définie par la relation

$$g(y, p, x) \equiv f\big(x, y, \varphi(x, y), p, \varphi_y(x, y)\big)$$

est continue dans le cube: $-\beta < y < \beta$, $|p| < M$, $-\alpha < x < \alpha$ et elle y admet des dérivées continues par rapport aux variables p et x.

P_2. Pour chaque x fixé dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, la fonction

$$p = \varphi_x(x, y)$$

est une intégrale de l'équation différentielle ordinaire avec le paramètre x:

$$dp/dy = g(y, p, x). \tag{2}$$

C'est une intégrale passant par le point: $y = 0$, $p = \sigma'(x)$.

Soit

$$p = \Pi(x, y^*, p^*, y)$$

la solution de l'équation (2) qui passe par le point initial $y = y^*$, $p = p^*$ (x étant considéré comme paramètre). En tenant compte de la propriété P_1 on déduit d'un théorème connu (cf. [1], p. 161) que la fonction Π est de classe C^1 dans l'ensemble $|x| < \alpha$, $|y| < \beta$, $|y^*| < \beta$, $|p^*| < M$. En vertu de la propriété P_2 et de l'unicité des intégrales de l'équation (2) issues du point $y = y^*$, $p = p^*$ on a l'identité

$$\varphi_x(x, y) = \Pi\big(x, 0, \sigma'(x), y\big) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in R. \tag{3}$$

La fonction $\Pi(x, y^*, p^*, y)$ étant de classe C^1 et la fonction $\sigma''(x)$ étant continue, il résulte de la formule (3) que la dérivée $\varphi_{xx}(x, y)$ existe et qu'elle est continue dans le rectangle R.

Nous nous dispensons de donner une démonstration tout à fait analogue relative à la dérivée $\varphi_{yy}(x, y)$.

En utilisant les notations introduites ci-dessus, nous énonçons encore le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Supposons que $f(x, y, u, p, q)$ soit une fonction de classe C^n $(n \geqslant 1)$ dans l'ensemble S et que $\varphi(x, y)$ soit une solution de l'équation (1) de classe C^1 dans R, telle que les fonctions $\sigma(x) = \varphi(x, 0)$ et $\tau(y) = \varphi(0, y)$ soient des fonctions de classe C^{n+1} dans les intervalles $-\alpha < x < \alpha$ et $-\beta < y < \beta$ respectivement.*

Alors $\varphi(x, y)$ et une fonction de classe C^{n+1} dans le rectangle R tout entier.

Démonstration. Dans le cas où $n = 1$ le théorème 2 coïncide avec le théorème 1. Admettons, pour la démonstration par l'induction, que le théorème 2 soit vrai lorsque $n = k$ (k naturel). Soit $\varphi(x, y)$ une solution de l'équation (1) de classe C^1 dans le rectangle R, telle que les fonctions $\sigma(x) = \varphi(x, 0)$ et $\tau(y) = \varphi(0, y)$ soient de classe C^{k+2}. Il en résulte que $\varphi(x, y)$ est une fonction de classe C^{k+1} dans R d'où, en vertu de l'indentité

$$\varphi_{xy}(x, y) \equiv f\big(x, y, \varphi(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)\big),$$

on constate facilement que $\varphi_{xy}(x, y)$ est une fonction de classe C^k dans R. L'existence et la continuité de la dérivée $\partial^{k+2}\varphi(x, y)/\partial x^{k+2}$ dans le rectangle R résultent d'un théorème connu (cf. [2], p. 164), appliqué à l'équation (2) et à sa solution $\varphi_x(x, y)$. La démonstration relative à la dérivée $\partial^{k+2}\varphi(x, y)/\partial y^{k+2}$ étant tout à fait analogue, nous l'omettons ici.

Remarque 1. En utilisant les résultats connus concernant l'existence et l'unicité des solutions de classe C^1 du problème de Darboux relatif à l'équation (1), le théorème 2 permet d'obtenir les théorèmes assurant l'existence et l'unicité de la solution de classe C^n $(n \geqslant 2)$ du problème en question.

Remarque 2. Les théorèmes 1 et 2 restent vrais dans le cas où (1) désigne le système de n équations différentielles $u_{xy}^{(i)}(x,y) = f^{(i)}(x, y, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, u_x^{(1)}, \ldots, u_x^{(n)}, u_y^{(1)}, \ldots, u_y^{(n)})$ $(i = 1, \ldots, n)$ écrit sous la forme vectorielle [1].

Travaux cités

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[2] H. Schaefer, *Eine Bemerkung über hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 58 (1955), p. 39-42.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 25. 10. 1957

[1] La norme d'un vecteur $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})$ étant donnée par la formule $|u| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |u^{(i)}|$.

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Some properties of plane curves

by A. Sharma (Lucknow)

Recently Gołąb has generalized an old problem known since the time of Archimedes, viz. that if $\widetilde{AB}$ denotes an arbitrary arc of a parabola and $\overline{AB}$ the chord joining its extremeties and if p denotes the area of the segment and P the area of the rectangle with base AB circumscribing the parabola, then

$$\frac{p}{P} = \frac{2}{3}.$$

He is led in his investigations to a new formula of quadrature which is claimed to be an improvement on the trapezoidal formula.

In the same order of ideas we shall prove a few results partly generalizing Gołąb's results and partly of an analogous nature. We are further led to a result which in turn leads to a new quadrature formula. Part I deals with some situations analogous to those of Gołąb's while part II has been suggested by a generalization of Taylor's formula due to Kloosterman.

I. Let Γ be an arc of a curve given by the equation $y = f(x)$. If $f(x)$ possesses continuous derivatives of order k we say that the curve is of class C_k. We shall also make the following hypotheses about the curves we consider:

Hypothesis H_n. If $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n+1)}(0) = 0$ we say that the curve satisfies the hypothesis H_n. The curve has then a contact of order at least $n+1$ with the x-axis at the origin O.

Hypothesis A. If the function $f(x)$ is increasing to the right of the origin in a neighbourhood of the origin, we say that the curve Γ satisfies the hypothesis A.

We can now prove

Theorem 1. *Let Γ be a curve of class C_1 satisfying H_0 and let it be infinitesimal of order $2+\alpha$ $(\alpha \geqslant 1)$ and let P and Q be two points on it with abscissae h and $\frac{1}{2}h$ respectively. Let the straight line through O drawn parallel*