ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

Sur l'effet épidermique extérieur et intérieur pour les inégalités différentielles ordinaires

par A. LASOTA (Kraków)

L'effet dit *épidermique* dans les inégalités différentielles ordinaires a été découvert par T. Ważewski en 1951 [5]. En 1956 W. Mlak a établi un théorème général sur cet effet pour les inégalités différentielles ordinaires [2] et partielles [3]. Les applications de cet effet épidermique ont été étudiées dans le travail de J. Szarski [4]. Dans la présente note je donne un théorème général relatif à l'effet épidermique pour les inégalités différentielles ordinaires. Ce théorème englobe, en particulier, un théorème établi par J. Mikusiński [1] sur l'existence d'inégalités fortes entre les composantes des courbes comparées dans le cas où de telles inégalités ont lieu entre leurs valeurs initiales.

§ 1. Nous allons d'abord expliquer ce qu'on doit entendre par effet épidermique.

Supposons que la courbe $y_1 = \tau_1(x), \ldots, y_n = \tau_n(x)$, définie pour $x \in \langle a, a+\alpha)$ soit l'intégrale supérieure à droite du système d'équations différentielles

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Soit $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)$ une suite de fonctions continues et positives, définies dans le même intervalle. Désignons par Z l'ensemble défini par les inégalités

$$\begin{aligned} & a \leqslant x < a+\alpha \\ & y_j \leqslant \tau_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, m \leqslant n), \\ & y_k < \tau_k(x) \qquad (k = m+1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{2}$$

par E_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ l'ensemble défini par les inégalités

$$\begin{aligned} & a \leqslant x < a+\alpha \\ & \tau_j(x) < y_j < \tau_j(x)+\varepsilon_j(x) \\ & y_\nu < \tau_\nu(x)+\varepsilon_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m), \\ & y_\mu < \tau_\mu(x) \qquad (\mu = m+1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3}$$

et, enfin, par J_k $(k = m+1, \ldots, n)$ l'ensemble défini par les inégalités

$$(4)\qquad \begin{aligned} & a \leqslant x < a+\alpha \\ & \tau_k(x) - \varepsilon_k(x) < y_k < \tau_k(x) \\ & y_\nu \leqslant \tau_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, m), \\ & y_\mu < \tau_\mu(x) \qquad (\mu = m+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Les ensembles E_j $(j = 1, \ldots, m)$ sont situés en dehors de l'ensemble Z — nous les appellerons *épidermes extérieurs*. Les ensembles J_k $(k = m+1, \ldots, n)$ font partie de Z — nous les appellerons donc *épidermes intérieurs*.

L'effet épidermique consiste en ce que chaque courbe $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, définie dans l'intervalle $\langle a, a+\alpha)$ qui satisfait pour tout x, pour lequel $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in E_i$ (ou J_i), à l'inégalité

$$D\varphi_i(x) \leqslant f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\,(^1)$$

et à des inégalités initiales convenables, doit forcément être située dans l'ensemble Z.

Dans les travaux mentionnés il n'est question que des épidermes extérieurs. Dans le théorème que je démontre dans cette note, les épidermes extérieurs et intérieurs peuvent se présenter simultanément.

§ 2. Pour abréger l'énoncé du théorème en question nous allons introduire certaines hypothèses.

HYPOTHÈSE (H). Nous disons que le système d'équations (1) satisfait à l'hypothèse (H) si:

1° les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont continues dans l'ensemble ouvert Ω de points $(x, y_1, \ldots, y_n)$;

2° pour tout i $(i = 1, \ldots, n)$ et tout couple de points

$$A_i(x, a_1, \ldots, a_{i-1}, C, a_{i+1}, \ldots, a_n), \qquad B_i(x, b_1, \ldots, b_{i-1}, C, b_{i+1}, \ldots, b_n)$$

appartenant à l'ensemble Ω et tels que $a_\nu \leqslant b_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$, on a $f_i(A_i) \leqslant f_i(B_i)$.

HYPOTHÈSE (G). Nous disons que le système d'équations (1) satisfait à l'hypothèse (G) si:

1° pour tout couple de points

$$A(x, a_1, \ldots, a_n), \qquad B(x, b_1, \ldots, b_n)$$

appartenant au produit d'ensembles $\sum\limits_{k=m+1}^{n} J_k$ et Ω et tels que $a_\nu \leqslant b_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ on a

$$f_i(A) - f_i(B) \leqslant \omega(x, a_i - b_i);$$

2° la fonction $\omega(x, z)$ est définie et continue dans la bande $a \leqslant x < a+\alpha$, $-\infty \leqslant z \leqslant 0$ $(\alpha > 0)$ et telle que la fonction $\zeta(x) \equiv 0$ soit intégrale inférieure à gauche de l'équation

$$z' = \omega(x, z)$$

par rapport à tout point de l'intervalle $\langle a, a+\alpha)$.

(¹) D désigne, ici et dans la suite, une dérivée quelconque, mais fixe, de Dini.

THÉORÈME 1. *Nous supposons que:*

(a₁) *le système* (1) *satisfait aux hypothèses* (H) *et* (G);

(b₁) *la courbe* $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, *définie et continue pour* $x \in \langle a, a+\alpha)$, *est située dans l'ensemble* Ω;

(c₁) *on a les inégalités initiales*

$$(5)\qquad \begin{aligned} & \varphi_j(a) \leqslant \tau_j(a) \qquad (j = 1, \ldots, m \leqslant n), \\ & \varphi_k(a) < \tau_k(a) \qquad (k = m+1, \ldots, n); \end{aligned}$$

(d₁) *pour tout* x *de l'intervalle* $\langle a, a+\alpha)$ *pour lequel* $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in E_i$ (*ou* J_i *si* $i \geqslant m+1$) *on a l'inégalité*

$$(6)\qquad D\varphi_i(x) \leqslant f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Cela posé, on a dans l'intervalle $\langle a, a+\alpha)$

$$(7)\qquad \varphi_j(x) \leqslant \tau_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

$$(8)\qquad \varphi_k(x) < \tau_k(x) \qquad (k = m+1, \ldots, n).$$

§ 3. Dans la démonstration du théorème 1 nous nous appuierons sur le théorème suivant établi par W. Mlak [2]:

THÉORÈME 2. *Nous supposons que:*

(a₂) *le système* (1) *satisfait à l'hypothèse* (H);

(b₂) *la courbe* $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, *définie et continue pour* $x \in \langle a, a+\alpha)$, *est située dans l'ensemble* Ω;

(c₂) *on a les inégalités initiales*

$$\varphi_i(a) \leqslant \tau_i(a) \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

(d₂) *pour tout* x *de l'intervalle* $\langle a, a+\alpha)$ *et tout indice* i $(i = 1, \ldots, n)$ *pour lequel*

$$\tau_i(x) < \varphi_i(x) < \tau_i(x) + \varepsilon_i(x)$$

on a l'inégalité

$$D\varphi_i(x) \leqslant f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Cela posé, on a dans l'intervalle $\langle a, a+a)$

$$\varphi_i(x) \leqslant \tau_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Remarque. Le théorème 2 résulte du théorème 1 dans le cas où $m = n$, car l'hypothèse (G) est alors évidemment satisfaite.

§ 4. La démonstration du théorème 1, énoncé au § 2, se composera de deux parties. Nous allons démontrer d'abord que chaque fois que l'on a dans l'intervalle $\langle a, a+\beta)$ $(0 < \beta < a)$ les inégalités (7), on y a aussi les inégalités (8). Pour la démonstration par l'impossible supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit $x_1 < a+\beta$ la borne supérieure des nombres pour lesquels on a les inégalités (8). Les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\tau_i(x)$ étant continues, il existe un indice k_0 $(m+1 \leqslant k_0 \leqslant n)$ tel que

$$\varphi_{k_0}(x_1) = \tau_{k_0}(x_1).$$

Choisissons maintenant un nombre $x_2 < x_1$ de telle sorte que l'on ait dans l'intervalle $\langle x_2, x_1)$

$$\tau_{k_0}(x) - \varepsilon_{k_0}(x) < \varphi_{k_0}(x).$$

On a alors pour $x \in \langle x_2, x_1)$

$$\tau_{k_0}(x) - \varepsilon_{k_0}(x) < \varphi_{k_0}(x) < \tau_{k_0}(x),$$

$$(9) \qquad \varphi_\nu(x) \leqslant \tau_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, m),$$

$$\varphi_\mu(x) < \tau_\mu(x) \qquad (\mu = m+1, \ldots, n).$$

Les inégalités (9) signifient que $\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) \in J_{k_0}$ pour $x \in \langle x_2, x_1)$, d'où, en vertu de l'hypothèse (d_1), il résulte que

$$(10) \qquad D\varphi_{k_0}(x) \leqslant f_{k_0}\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big).$$

Des inégalités (9), (10), de l'identité $\tau'_{k_0}(x) = f_{k_0}\big(x, \tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)\big)$ et de l'hypothèse (G) il vient

$$D[\varphi_{k_0}(x) - \tau_{k_0}(x)] = D\varphi_{k_0}(x) - \tau'_{k_0}(x)$$
$$\leqslant f_{k_0}\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big) - f_{k_0}\big(x, \tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)\big) \leqslant \omega\big(x, \varphi_{k_0}(x) - \tau_{k_0}(x)\big)$$
$$\text{pour} \quad x \in \langle x_2, x_1).$$

La fonction $r(x) = \varphi_{k_0}(x) - \tau_{k_0}(x)$ satisfait donc à l'inégalité

$$(11) \qquad Dr(x) \leqslant \omega\big(x, r(x)\big) \quad \text{pour} \quad x \in \langle x_2, x_1)$$

et aux conditions

$$(12) \qquad r(x_2) < 0, \quad r(x_1) = 0.$$

D'autre part, $\zeta(x) \equiv 0$ étant intégrale inférieure à gauche de l'équation $z' = \omega(x, z)$, on a, en vertu de (11), (12) et du théorème bien connu sur les inégalités différentielles [6]

$$r(x_2) \geqslant \zeta(x_2) = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (12).

§ 5. Pour achever la démonstration du théorème 1 il suffit maintenant de prouver que $a+a$ est la borne supérieure des nombres b tels que les inégalités (7) sont satisfaites dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Supposons, pour la démonstration par l'impossible, que $\bar{b} < a+a$ soit la borne supérieure de ces nombres. Les inégalités (7) auront alors lieu dans l'intervalle $\langle a, \bar{b}\rangle$. Comme nous l'avons montré § 4, il en résulte que dans cet intervalle on aura aussi les inégalités (4). On a donc pour $x \in \langle a, \bar{b}\rangle$

$$\varphi_j(x) \leqslant \tau_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, m),$$
$$\varphi_k(x) < \tau_k(x) \qquad (k = m+1, \ldots, n)$$

et, par suite

$$\varphi_j(x) < \tau_j(x) + \varepsilon_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, m),$$
$$\varphi_k(x) < \tau_k(x) \qquad (k = m+1, \ldots, n).$$

En vertu de la continuité des fonctions envisagées il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que pour $x \in \Delta_\varepsilon = \langle a, \bar{b}+\varepsilon)$

$$(13) \qquad \varphi_j(x) < \tau_j(x) + \varepsilon_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

$$(14) \qquad \varphi_k(x) < \tau_k(x) \qquad (k = m+1, \ldots, n).$$

Pour tout point x de l'intervalle Δ_ε et tout indice i $(i = 1, \ldots, n)$ l'inégalité

$$(15) \qquad \tau_i(x) < \varphi_i(x) < \tau_i(x) + \varepsilon_i(x)$$

entraîne l'inégalité

$$(16) \qquad D\varphi_i(x) \leqslant f_i\big(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big).$$

En effet, pour $i = 1, \ldots, m$ cette propriété découle, en vertu de (13), de l'hypothèse (d_1). Pour $i = m+1, \ldots, n$ cette implication est vraie à plus forte raison, puisque dans ce cas l'inégalité (15) peut en vertu de (14), ne pas être remplie. L'implication (15) $\to$ (16) et les hypothèses (a_1), (b_1), (c_1), (d_1) nous permettent de conclure, en vertu du théorème 2, que dans l'intervalle $\Delta_\varepsilon = \langle a, \bar{b}+\varepsilon)$ on a les inégalités

$$\varphi_\nu(x) \leqslant \tau_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ce qui est en contradiction avec la définition du nombre $\bar{b}$.

Travaux cités

[1] J. G.-Mikusiński, *Sur un problème d'interpolation pour les intégrales des équations différentielles linéaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 19 (1947), p. 178.

[2] W. Mlak, *On the epidermic effect for ordinary differential inequalities of the first order*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 37-40.

[3] — *The epidermic effect for partial differential inequalities of the first order*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 157-164.

[4] J. Szarski, *Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 237-249.

[5] T. Ważewski, *Certaines propositions de caractère „épidermique" relatives aux inégalités différentielles*, Ann. Soc. Polon. Math. 24, fasc. 2 (1953), p. 9-16.

[6] — *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), p. 112-166.

Reçu par la Rédaction le 19. 12. 1957

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
VI (1959)

On some constants related to the generalized potentials

by A. Szybiak (Kraków)

Let $\mathcal{E}^m$ denote the m-dimensional $(m \geqslant 2)$ Euclidean space and $x, y, \ldots$ be the points in this space with the coordinates respectively $x^1, \ldots, x^m$, $y^1, \ldots, y^m$. We denote by $x \pm y$ the point in this space with the coordinates $x^1 \pm y^1, \ldots, x^m \pm y^m$. $|x|$ denotes the Cartesian distance of x from the origin; then $|x| = \left(\sum_{i=1}^{m} (x^i)^2\right)^{1/2}$.

We consider in $\mathcal{E}^m$ a function $K(x)$ which is continuous outside 0 and satisfies the following assumptions:

1. $0 < \lim_{x \to 0} K(x) = K(0) \leqslant +\infty$.
2. $K(x) = K(-x)$.
3. $\int_{|x|<1} K(x)\,dx < \infty$ (dx being the volume element in $\mathcal{E}^m$).
4. (Maximum principle of O. Frostman.) *For every measure $\mu \geqslant 0$ of the carrier $F \subset \mathcal{E}^m$ we have*

$$\sup_{x \in \mathcal{E}^m} \int K(x-y)\,d\mu(y) = \sup_{x \in F} \int K(x-y)\,d\mu(y).$$

The function K will be named the *kernel* and the functions of the shape

$$\int K(x-y)\,d\mu(y)$$

the *generalized potentials*.

These potentials have the following fundamental property:

Equilibrium theorem. *If E is a compact in $\mathcal{E}^m$ such that*

$$\inf_{\mu} \iint K(x-y)\,d\mu(y)\,d\mu(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma_E < \infty \qquad (\mu \geqslant 0,\ \mu(E) = 1,\ \mu(\mathcal{E}^m - E) = 0)$$

then there exists a measure μ^* realizing this infimum and such that for $x \in E$ we have

$$\int K(x-y)\,d\mu^*(y) \leqslant \gamma_E; \tag{1}$$